Appunti del corso di ApvIII ,
prof. Paolo Acquistapace,
a.a. 2010-2011

Daniele Agostini

21 febbraio 2011

Indice

Capitolo 1

Spazi L^p e Convoluzioni

1.1 Spazi L^p

1.1.1 Spazi $L^p, 1 \leq p < \infty$

Prendiamo uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ed un numero reale $p \geq 1$: allora è naturale considerare l'insieme

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f\colon X \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ misurabile}, \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty \right\}$$

Lemma 1.1.1. *$\mathcal{L}^p(X)_{\mathbb{R}}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni reali.*

Dimostrazione. Verifichiamo che $\mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ è chiuso rispetto alla somma: siano $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$, allora sappiamo già che $f+g$ è misurabile e ci basta dimostrare che $|f+g|$ è sommabile: ricordiamoci che la funzione $x \mapsto x^p$ è convessa per $p \geq 1$ e quindi abbiamo che

$$|f+g|^p = 2^p \left| \frac{f}{2} + \frac{g}{2} \right|^p \leq 2^p \left(\frac{|f|^p}{2} + \frac{|g|^p}{2} \right) = 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$$

Allora segue subito che $\int_X |f+g|^p \, d\mu \leq 2^{p-1}(\int_X |f|^p \, d\mu + \int_X |g|^p \, d\mu) < +\infty$. Poi, la parte con il prodotto per scalari è immediata: se $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora λf è misurabile e $\int_X |\lambda f|^p \, d\mu = |\lambda|^p \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty$. □

In generale possiamo prendere funzioni a valori complessi $f\colon X \to \mathbb{C}$: diciamo che una tale funzione è misurabile se e solo se le funzioni reali $\Re f, \Im f$ sono misurabili e diciamo che una tale funzione è sommabile se e solo se le funzioni reali $\Re f, \Im f$ sono sommabili e in questo caso poniamo

$$\int_X f d\mu = \int_X \Re f d\mu + i \int_X \Im f d\mu$$

Possiamo poi definire lo spazio $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X, \mathcal{A}, \mu)$ anche per le funzioni a valori complessi esattamente come abbiamo fatto per quelle a valori reali.

Lemma 1.1.2. *Sia $f\colon X \to \mathbb{C}$ una funzione misurabile. Allora $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X)$ se e solo se $\Re f, \Im f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X)$. Inoltre $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X)$ è un sottospazio vettoriale delle funzioni a valori complessi.*

Dimostrazione. Supponiamo che $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X)$, allora $|\Re f|^p \leq (|\Re f|^2 + |\Im f|^2)^{\frac{p}{2}} = |f|^p$ e lo stesso argomento applicato a $\Im f$ ci da la tesi. Supponiamo invece che $\Re f, \Im f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{R}}(X)$, allora $|f|^p \leq (|\Re f| + |\Im f|)^p$ e per il lemma precedente concludiamo. Il lemma precedente unito a quanto già dimostrato ci dice anche che $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(X)$ è un sottospazio vettoriale delle funzioni a valori complessi. □

D'ora in poi considereremo sempre funzioni a valori COMPLESSI e scriveremo semplicemente $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Consideriamo ora la funzione

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposizione 1.1.1. *$\|\cdot\|_p$ è una seminorma su $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ ma non è una norma. Più precisamente $\|\cdot\|_p$ verifica quasi tutte le proprietà delle norme: accade soltanto che $\|f\|_p = 0 \iff f = 0$ q.o. .*

Dimostrazione. E' chiaro dalla definizione che $\|f\|_p$ è ben definito e non negativo per ogni $f \in \mathcal{L}^p$. La freccia se e solo se è abbastanza ovvia. Siano $f \in \mathcal{L}^p$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\|\lambda f\|_p = (\int_X |\lambda f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} = (|\lambda|^p \int_X |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, \|f\|_p$. (Ecco spiegato il senso dell'esponente misterioso $\frac{1}{p}$). La subadditività segue dalla Disuguaglianza di Minkowski (vedi sotto). □

Ora dimostriamo le disuguaglianze di Young, Hölder e Minkowski:

Proposizione 1.1.2 (Disuguaglianza di Young)**.** *Siano $p, q > 0$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e siano $a, b \geq 0$. Allora*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Inoltre,vale l'uguaglianza se e solo se $a^p = b^q$.

Dimostrazione. Se $a = 0$ o $b = 0$ la tesi è banale. Allora supponiamo che $a, b > 0$ e sfruttiamo la convessità della funzione $x \mapsto e^x$:

$$ab = e^{\log ab} = e^{\log a + \log b} = e^{\frac{p}{p} \log a + \frac{q}{q} \log b} = e^{\frac{\log a^p}{p} + \frac{\log b^q}{q}} \leq \frac{e^{\log a^p}}{p} + \frac{e^{\log b^q}}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Per finire, vediamo che in quanto scritto sopra l'uguaglianza vale se e solo se $\log a^p = \log b^q$ e la tesi è completamente dimostrata. □

Proposizione 1.1.3 (Disuguaglianza di Hölder)**.** *Siano $p, q > 0$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e siano $f \in \mathcal{L}^p(X)$ e $g \in \mathcal{L}^q(X)$. Allora $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$$

Inoltre, si ha l'uguaglianza se e solo se $f^p = \lambda g^q$ quasi ovunque, per un certo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Sappiamo che il prodotto di funzioni misurabili è misurabile, si tratta di dimostrare ora la disuguaglianza. Supponiamo prima che $\|f\|_p = 0$ o che $\|g\|_q = 0$, allora f o g sono nulle quasi ovunque e quindi anche fg è nulla quasi ovunque e la tesi è ovvia. Allora mettiamo che $\|f\|_p = \|g\|_p = 1$: utilizzando la disuguaglianza di Young dimostrata prima si ha che

$$\int_X |fg| \, d\mu = \int_X |f| \, |g| \, d\mu \leq \int_X \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

e questa è un'uguaglianza se e solo se $|f| \, |g| = \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^q}{q}$ quasi ovunque e cioè se e solo se $f^p = \lambda g^q$ quasi ovunque per un certo $\lambda \in \mathbb{C}$. Poi, per quanto appena dimostrato, nel caso generale abbiamo che

$$\frac{\|fg\|_1}{\|f\|_p \, \|g\|_q} = \left\| \frac{f}{\|f\|_p} \frac{g}{\|g\|_q} \right\|_1 \leq 1$$

e come sopra si dimostra la condizione per l'uguaglianza. □

Vale una versione più forte della disuguaglianza:

Proposizione 1.1.4 (Disuguaglianza di Hölder generalizzata)**.** *Siano $p_1, p_2, \ldots, p_n, r > 0$ tali che $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = \frac{1}{r}$. Allora, se $f_i \in \mathcal{L}^{p_i}(X)$ per $i = 1, \ldots, n$ si ha che $f_1 f_2 \ldots f_n \in \mathcal{L}^r(X)$ e*

$$\|f_1 f_2 \ldots f_n\|_r \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}$$

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione su n. Se $n = 1$ la tesi è banale; quindi supponiamo di aver dimostrato la tesi per $n-1$ e dimostriamola per n: intanto vediamo che

$$\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_{n-1}} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p_n} = \frac{p_n - r}{rp_n} > 0$$

quindi, per ipotesi induttiva, si ha che $|f_1 f_2 \dots f_{n-1}|^r \in \mathcal{L}^{\frac{p_n}{p_n - r}}$ e d è chiaro che $|f_n|^r \in \mathcal{L}^{\frac{p_n}{r}}$: ora, notiamo che $\frac{p_n - r}{p_n} + \frac{r}{p_n} = 1$ e quindi per la disuguaglianza di Holder classica abbiamo che

$$\int_X |f_1 f_2 \dots f_n|^r \, d\mu = \int_X |f_1 f_2 \dots f_{n-1}|^r |f_n|^r \, d\mu \leq \left(\int_X |f_1 f_2 \dots f_{n-1}|^{\frac{rp_n}{p_n - r}} \, d\mu \right)^{\frac{p_n - r}{p_n}} \left(\int_X |f_n|^{p_n} \, d\mu \right)^{\frac{r}{p_n}} =$$
$$= \|f_1 f_2 \dots f_{n-1}\|^r_{\frac{rp_n}{p_n - r}} \|f_n\|^r_{p_n} \leq \text{ (per l'ipotesi di induzione) } \leq \left(\|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_n\|_{p_n}\right)^r$$

e abbiamo finito. □

Osservazione 1.1.1. Nella proposizione precedente potrebbe essere che $r < 1$: allora chi sono $\mathcal{L}^r(X)$ e $\|\cdot\|_r$? Sono esattemente quello che ci aspettiamo, cioè

$$\mathcal{L}^r : = \left\{ f : X \to \mathbb{C} \,\middle|\, f \text{ misurabile }, \int_X |f|^r \, d\mu \leq +\infty \right\} \qquad \|f\|_r = \left(\int_X |f|^r \, d\mu \right)^{\frac{1}{r}}$$

Tuttavia questi spazi non ci interesseranno in seguito perchè hanno alcuni problemi: infatti si vede che $\|\cdot\|_r$ non è una seminorma.

Proposizione 1.1.5 (Disuguaglianza di Minkowski)**.** *Sia* $p \geq 1$ *e siano* $f, g \in \mathcal{L}^p(X)$*. Allora* $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$.

Dimostrazione. Supponiamo prima che $p = 1$: allora $\|f + g\|_1 = \int_X |f + g| \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu + \int_X |g| \, d\mu = \|f\| + \|g\|$ e abbiamo fatto. Se invece $p > 1$, ragioniamo così: se $\|f + g\|_p = 0$ abbiamo finito e siamo contenti, altrimenti

$$\|f + g\|_p^p = \int_X |f + g|^p \, d\mu = \int_X |f + g| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu \leq$$
$$\leq \int_X |f| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu$$

Ora, sia $q = \frac{p}{p-1}$ il coniugato di p (cioè $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), allora vediamo che $(f + g)^{p-1} \in \mathcal{L}^q(X)$, infatti $|f + g|^{(p-1)q} = |f + g|^p$ e per la disuguaglianza di Hölder abbiamo che

$$\int_X |f| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g| \, |f + g|^{p-1} \, d\mu \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \left\|(f + g)^{p-1}\right\|_q =$$
$$= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f + g\|_p^{p-1}$$

quindi, riassumendo, abbiamo trovato che

$$\|f + g\|_p^p \leq \frac{\|f\|_p + \|g\|_p}{\|f + g\|_p} \|f + g\|_p^p$$

e quindi fine. □

Quindi abbiamo visto che $\|\cdot\|_p$ è una seminorma su $\mathcal{L}^p(X)$; ora, è facile dimostrare (grazie alla subadditività) che per ogni seminorma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale V, il suo nucleo $\operatorname{Ker} \|\cdot\| = \{ v \in V \mid \|v\| = 0 \}$ è un sottospazio vettoriale di V e quindi possiamo realizzare lo spazio quoziente $V / \operatorname{Ker} \|\cdot\|$ su cui la funzione $\|\cdot\|$ è ora una vera norma. Nel caso dello spazio $\mathcal{L}^p(X)$, quozientare per $\operatorname{Ker} \|\cdot\|_p$ equivale ad identificare le funzioni che coincidono quasi ovunque su X : infatti $f, g \in \mathcal{L}^p$ coincidono quasi ovunque se e solo se $f - g = 0$ quasi ovunque e cioè se e solo se $\|f - g\|_p = 0$.
Così otteniamo lo spazio vettoriale $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ su cui $\|\cdot\|_p$ è un'autentica norma. (Nota: continueremo ad indicare gli elementi di L^p come indicavamo gli elementi di $\mathcal{L}^p$).

Teorema 1.1.1. *Lo spazio $L^p(X)$ è uno spazio di Banach per ogni $p \geq 1$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che se $\{ f_n \}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $L^p(X)$ tale che $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_p$ converge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge in $L^p(X)$. Intanto vediamo che la serie definisce un elemento di $L^p(X)$:

$$\int_X \left|\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right|^p d\mu \leq \int_X \left(\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|\right)^p d\mu = \int_X \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} |f_n|\right)^p d\mu = (\text{ per Beppo-Levi }) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} \int_X \left(\sum_{n=0}^{N} |f_n|\right)^p d\mu = \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{n=0}^{N} |f_n|\right\|_p^p \leq \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_p\right)^p < \infty$$

Quindi la serie definisce un elemento S di $L^2(X)$, ora vediamo anche che la serie converge ad S in $L^2(X)$:

$$\lim_{N\to\infty} \left\|S - \sum_{n=0}^{N} f_n\right\|_p^p = \lim_{N\to\infty} \int_X \left|S - \sum_{n=0}^{N} f_n\right|^p d\mu$$

ma vediamo subito che $\left|S - \sum_{n=0}^{N} f_n\right|^p \leq (|S| + \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|)^p$ che è sommabile per quanto dimostrato prima, quindi il teorema di convergenza dominata ci da la tesi. □

C'è anche un altro importante risultato di convergenza:

Proposizione 1.1.6. *Sia $\{ f_n \} \subseteq L^p(X)$ una successione tale che $f_n \to f$ in $L^p(X)$. Allora esiste una sottosuccessione $\{ f_{n_k} \}$ che converge puntualmente ad f quasi ovunque ed in modo dominato.*

Dimostrazione. **NON SERVE, PERO' MAGARI DOPO LA SCRIVO** □

Ora ci chiediamo se ci sono inclusioni fra gli spazi L^p:

Proposizione 1.1.7. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura finita, cioè $\mu(X) < \infty$. Allora $L^p(X) \subseteq L^q(X)$ se $p \geq q$.*

Dimostrazione. Attenzione: adesso dimostriamo che $\mathcal{L}^p \subseteq \mathcal{L}^q$, però l'inclusione passa ai quozienti e tutti i soliti blabla. Allora, sappiamo che se $q \leq p$, abbiamo che $|x|^q \leq 1 + |x|^p$ e quindi, se $f \in L^p(X)$ allora

$$\int_X |f|^q \, d\mu \leq \int_X 1 + |f|^p \, d\mu = \mu(X) + \int_X |f|^p \, d\mu < \infty$$

□

Se lo spazio ha misura infinita ci sono dei problemi e in generale va tutto in merda, tuttavia se ci limitiamo, per esempio, a funzioni il cui supporto ha misura finita, vale ancora il risultato precedente.

1.1.2 Spazi L^∞

Prendiamo il solito spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e consideriamo le funzioni che sono essenzialmente limitate, cioè definiamo $\operatorname{supess} f = \inf \{ M \mid f \leq M \text{ q.o. } \}$ per ogni $f \colon X \to \mathbb{R}$ e consideriamo l'insieme delle funzioni essenzialmente limitate:

$$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) = \{ f \colon X \to \mathbb{C} \mid f \text{ misurabile}, \operatorname{supess} |f|^p < +\infty \}$$

Proposizione 1.1.8. *$\mathcal{L}^\infty(X)$ è un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni complesse.*

Dimostrazione. La faccenda sulla moltiplicazione per scalari è facile. Poi, siano $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, allora $|f + g| \leq |f| + |g|$ e quindi $\operatorname{supess} |f + g| \leq \operatorname{supess} |f| + \operatorname{supess} |g| < \infty$. □

Di nuovo , è naturale considerare la funzione

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad \|f\|_\infty = \text{supess } |f|$$

Proposizione 1.1.9. *La funzione $\|\cdot\|_\infty$ è una seminorma su $\mathcal{L}^\infty(X)$ ma non è una norma. Più precisamente $\|\cdot\|_\infty$ verifica quasi tutte le proprietà delle norme: accade soltanto che $\|f\|_\infty = 0 \iff f = 0$ q.o. .*

Dimostrazione. E' chiaro che $\|f\|_\infty$ è ben definita e non negativa per ogni $f \in \mathcal{L}^\infty$ e di nuovo la doppia freccia è abbastanza facile. L'omogeneità è sempre ovvia e la subadditività l'abbiamo dimostrata prima. Fine □

Osserviamo che valgono anche in questo caso le disuguaglianze di Hölder e di Minkowski: quella di Minkowski l'abbiamo vista prima (nella dimostrazione della proposizione 1.1.8), quella di Hölder dice che

Proposizione 1.1.10 (Disuguaglianza di Hölder con $1, \infty$)**.** *Siano $f \in \mathcal{L}^1(X)$ e $g \in \mathcal{L}^\infty$, allora $fg \in \mathcal{L}^1$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$$

Dimostrazione. Facile. □

Allora, come prima definiamo lo spazio $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ e su questo spazio $\|\cdot\|_\infty$ è una norma che lo rende uno spazio di Banach.

Teorema 1.1.2. *$L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ è uno spazio di Banach*

Dimostrazione. La dimostrazione è uguale uguale a quella fatta per $1 \leq p \leq \infty$, basta sostituire p con ∞. □

Come ultima cosa ci occupiamo delle inclusioni tra lo spazio L^∞ e gli altri: di nuovo, se lo spazio ha misura finita è tutto facile

Proposizione 1.1.11. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura finita. Allora $L^\infty(X)$ è incluso in $L^p(X)$ per ogni $p \geq 1$.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^\infty$ e sia $p \geq 1$, allora $\int_X |f|^p \, d\mu \leq \|f\|_\infty \mu(X) < \infty$. □

1.1.3 Teoremi di densità negli spazi L^p

Ora ci interesserà vedere quando possiamo approssimare le funzioni in L^p con funzioni decenti. Ci sono intanto le funzioni semplici:

Proposizione 1.1.12. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $1 \leq p \leq \infty$, allora le funzioni semplici sono dense in $L^p(X)$; più precisamente, le funzioni semplici a supporto di misura finita sono dense in $L^p(X)$.*

Dimostrazione. Sappiamo che per ogni funzione misurabile $f \colon X \to \mathbb{R}$ esiste una successione di funzioni semplici $\{ \varphi_n \}$ tali che $\varphi_n(x) \to f(x)$ e $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|, |f(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \ \forall\, n \in \mathbb{N} \ \forall\, x \in X$. Allora, se $f \in L^p(X)$, abbiamo che $\{ \varphi_n \} \subseteq L^p(X)$ grazie al fatto che $|\varphi_n(x)| \leq |f(x)|$, ed inoltre, se $p < \infty$, si ha che $|f - \varphi_n|^p \leq 2^p |f|^p$ che è sommabile, e quindi, per il teorema di convergenza dominata

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - \varphi_n\|_p^p = \lim_{n\to+\infty} \int_X |f - \varphi_n|^p \, d\mu = \int_X \lim_{n\to+\infty} |f - \varphi_n| \, d\mu = 0$$

e si conclude. Invece, se $p = \infty$ è facile vedere che

$$\lim_{n\to+\infty} \|f - \varphi_n\|_\infty \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

e fine. La precisazione dice semplicemente che le funzioni semplici che sono anche in $L^p(X)$ sono proprio quelle con supporto di misura finita. □

Ora ci occupiamo più specificamente del caso che ci interesserà poi: cioè il caso in cui lo spazio di misura è un aperto di $\mathbb{R}^N$ con la relativa misura di Lebesgue m_N

Proposizione 1.1.13. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $1 \leq p < \infty$. Allora le funzioni continue sono dense in $L^p(\Omega)$.*

Dimostrazione. Supponiamo intanto che $\Omega = \mathbb{R}^N$: allora, per quanto visto prima, basta verificare che per ogni sottoinsieme misurabile $E \subseteq \mathbb{R}^N$ di misura finita esiste una successione di funzioni continue $\{ f_n \} \subseteq L^p(\mathbb{R}^N)$ tali che $\lim \|\chi_E - f_n\|_p = 0$. Allora, sappiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono un aperto A_n ed un chiuso C_n tali che $C_n \subseteq E \subseteq A_n$ e $m_N(A_n \setminus C_n) < \frac{1}{2^n}$ (in particolare, A_n ha misura finita): prendiamo

$$f_n(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{x}, A_n^c)}{d(\mathbf{x}, A_n^c) + d(\mathbf{x}, C_n)}$$

Si vede subito che $f_n \equiv 1$ su C_n,$0 \leq f_n \leq 1$ su $A_n \setminus C_n$ e $f_n \equiv 0$ su A_n^c, e quindi $\{ f_n \} \subseteq L^p(X)$, inoltre

$$\|\chi_E - f_n\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\chi_E - f_n| \, dm_N = \int_{A_n \setminus C_n} |\chi_E - f_n| \, dm_N \leq \int_{A_n \setminus C_n} 2^p dm_N \leq \frac{2^p}{2^n}$$

e quindi, $\lim_{n \to +\infty} \|\chi_E - f_n\| = 0$. Ora consideriamo il caso di una aperto Ω qualunque: sia $f \in L^p(\Omega)$, e sia $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ la funzione f estesa a $\mathbb{R}^N$ ponendo $\tilde{f} \equiv 0$ su Ω^c. Allora, per quanto dimostrato prima esiste una successione di funzioni continue $\left\{ \tilde{f_n} \right\} \subseteq L^p(\mathbb{R}^N)$ che convergono ad $\tilde{f}$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$: cioe'

$$\left\| \tilde{f} - \tilde{f_n} \right\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^N} \left| \tilde{f} - \tilde{f_n} \right|^p dx = \int_{\Omega} \left| f - \tilde{f}_{n|\Omega} \right|^p + \int_{\Omega^c} \left| \tilde{f} - \tilde{f_n} \right|^p dx \to 0 \qquad \text{per } n \to \infty$$

$\square$

Ma c'è di più

Proposizione 1.1.14. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto e sia $1 \leq p < \infty$. Allora le funzioni continue a supporto compatto sono dense in $L^p(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sappiamo che ogni aperto Ω di $\mathbb{R}^N$ ammette un esaustione in compatti: cioè esistono dei sottospazi compatti K_n tali che K_n è contenuto nella parte interna di K_{n+1} e $\bigcup K_n = \Omega$. Allora, presa $f \in L^p(\Omega)$ continua un'idea sarebbe quella di approssimare f con le $f\chi_{K_n}$, ma queste funzioni non sono in generale continue, quindi dobbiamo ammorbidirle un pó. Possiamo fare così: definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$g_n(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{x}, K_{n+1}^c)}{d(\mathbf{x}, K_{n+1}^c) + d(\mathbf{x}, K_n^c)}$$

allora, grazie alle proprietà dell'esaustione in compatti, si ha che le funzioni fg_n sono continue a supporto compatto e che $fg_n \to f$ per $n \to +\infty$. Infine osserviamo che $|fg_n(\mathbf{x})| \leq |f(\mathbf{x})|$ e quindi, $|f - fg_n|^p \leq 2^p |f|^p$; allora, per il teorema di convergenza dominata, troviamo che

$$\lim_{n \to \infty} \|f - fg_n\|_p^p = \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} |f - fg_n|^p \, dm_n = \int_{\Omega} \lim_{n \to \infty} |f - fg_n|^p \, dm_n = 0$$

$\square$

Dimostriamo ora un corollario di quest'ultimo risultato che ci sarà utile in seguito:

Corollario 1.1.1 (Continuità delle traslazioni negli spazi $L^p(\mathbb{R}^N)$)**.** *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ allora definiamo per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ la funzione $f_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}+\mathbf{h})$. Allora $f_{\mathbf{h}} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $\|f_{\mathbf{h}} - g_{\mathbf{h}}\|_p = \|f - g\|_p$ (se $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$) e $\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \|f - f_{\mathbf{h}}\|_p = 0$.*

Dimostrazione. Le prime due asserzioni seguono dall'invarianza per traslazioni della misura di Lebesgue. Per dimostrare l'ultima, supponiamo dapprima che f sia continua a supporto compatto K, allora la tesi segue dal teorema di convergenza dominata. Nel caso generale, presa $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ fissiamo $\varepsilon > 0$: sappiamo che esiste una funzione continua a supporto compatto $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - g\|_p < \varepsilon$, allora si ha che $\|f_{\mathbf{h}} - f\|_p = \|f_{\mathbf{h}} - g_{\mathbf{h}} + g_{\mathbf{h}} - g + g - f\|_p \leq \|f_{\mathbf{h}} - g_{\mathbf{h}}\|_p + \|g_{\mathbf{h}} - g\|_p + \|g - f\|$, e per quanto dimostrato prima, concludiamo. □

1.2 Convoluzioni in $\mathbb{R}^N$

Definizione 1.1 (Convoluzione)**.** Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Allora la convoluzione fra f e g è la funzione $f \star g$ definità così:

$$(f \star g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})g(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}$$

Proposizione 1.2.1. *La convoluzione tra $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ è ben definita e $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Inoltre la convoluzione è anche bilineare e simmetrica, cioè $(\lambda f_1 + \mu f_2) \star g = \lambda(f_1 \star g) + \mu(f_2 \star g)$ e $f \star g = g \star f$. Infine $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Dimostrazione. **MAGARI DA METTERE LA PARTE SULLA MISURABILITA' DELLA CONVOLUZIONE** Ora, vediamo che, per Fubini-Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|\, |g(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|\, d\mathbf{x}\, |g(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} = \\ = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}^N} |g(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} = \|f\|_1 \|g\|_1$$

e quindi $f \star g$ è ben definita quasi ovunque ed è facile vedere da quanto scritto prima che $\int_{\mathbb{R}^N} |f \star g(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leq \int_{\mathbb{R}^N} (\int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|\, |g(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y}) d\mathbf{x} \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ il che dimostra che $f \star g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e che $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Inoltre, grazie alla linearità dell'integrale, la convoluzione è bilineare ed è simmetrica per l'invarianza della misura di Lebesgue rispetto alle traslazioni. □

Quindi, possiamo considerare lo spazio $L^1(\mathbb{R}^N)$ come un'algebra commutativa: cioè è uno spazio vettoriale (la struttura di spazio vettoriale standard di L^p) ed un anello commutativo (il prodotto in L^p è dato dalla convoluzione) in modo che le due strutture siano compatibili (il che ci è assicurato dalla proposizione precedente). Purtroppo, è un'algebra senza identità, come vediamo dalla seguente proposizione:

Proposizione 1.2.2. *Non esiste una funzione $e \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $e \star f = f$ per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che una tale e esista. Allora consideriamo, per $r \leq 0$ le funzioni $\chi_{B(\mathbf{0},r)}$, abbiamo che:

$$\chi_{B(\mathbf{0},r)}(\mathbf{x}) = e \star \chi_{B(\mathbf{0},r)}(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{0},r)} e(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{B(\mathbf{x},r)} e(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

in particolare, se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ troviamo che

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B(\mathbf{0},r)}(\mathbf{y}) e(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

ma il teorema di convergenza dominata ci dice che $\lim_{r \to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_{B(\mathbf{0},r)}(\mathbf{y}) e(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0$ ed abbiamo un assurdo. □

Ritorneremo su questo argomento fra un pó, ora andiamo avanti. Vediamo che possiamo convolvere due funzioni anche sotto ipotesi più generali, come ci spiega il buon Young:

Teorema 1.2.1 (Teorema di Young)**.** *Siano* $1 \leq p, q, r \leq \infty$ *tali che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ *e siano* $f \in L^p(\mathbb{R}^N), g \in L^q(\mathbb{R}^N)$*. Allora la loro convoluzione*

$$(f \star g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

è ben definita ed inoltre $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *e* $\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$*. Infine, la convoluzione è sempre bilineare e simmetrica.*

Dimostrazione. Facciamo prima il caso in cui p e q sono coniugati, cioè $r = \infty$. Allora

$$|f \star g| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \, |g(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} \leq \text{ (Hölder) } \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

quindi $f \star g$ è ben definita q.o., $f \star g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\|f \star g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Il caso in cui p e q non sono coniugati è simile, nel senso che bisogna usare sempre Hölder con funzioni un poco peggiori: abbiamo che

$$|f \star g|^r \leq (\int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})| \, |g(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y})^r = (\int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{\frac{p}{r}} |g(\mathbf{y})|^{\frac{q}{r}} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{1-\frac{p}{r}} |g(\mathbf{y})|^{1-\frac{q}{r}} d\mathbf{y})^r$$

Vediamo che $(|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{\frac{p}{r}} |g(\mathbf{y})|^{\frac{q}{r}})^r = |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^p |g(\mathbf{y})|^q$ è sommabile per quanto dimostrato prima sulle convoluzioni in $L^1(\mathbb{R}^N)$, quindi $|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{\frac{p}{r}} |g(\mathbf{y})|^{\frac{q}{r}} \in L^r(\mathbb{R}^N)$, inoltre $|f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{1-\frac{p}{r}} \in L^{\frac{pr}{r-p}}(\mathbb{R}^N)$ e $|g(\mathbf{y})|^{1-\frac{q}{r}} \in L^{\frac{qr}{r-q}}(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{1}{r} + \frac{r-p}{pr} + \frac{r-q}{rq} = 1$, quindi, utilizzando una versione generalizzata di Hölder,

$$\begin{aligned}&(\int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{\frac{p}{r}} |g(\mathbf{y})|^{\frac{q}{r}} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^{1-\frac{p}{r}} |g(\mathbf{y})|^{1-\frac{q}{r}} d\mathbf{y})^r \leq \\ &\qquad \leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-p} \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \mathbf{y})|^p |g(\mathbf{y})|^q \, d\mathbf{y} = \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-p} (|f|^p \star |g|^q)(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Perciò $f \star g$ è ben definita, ed inoltre gli istessi identici conti ci dicono subito che

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N} |(f \star g)(\mathbf{x})|^r \, d\mathbf{x} \leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-p} \int_{\mathbb{R}^N} (|f|^p \star |g|^q)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \\ &\qquad = \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-p} \||f|^p \star |g|^q\|_1 \leq \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-p} \|f^p\|_1 \|g^q\|_1 = \\ &\qquad\qquad = \|f\|_p^{r-p} \|g\|_q^{r-p} \|f\|_p^p \|g\|_q^q = (\|f\|_p \|g\|_q)^r\end{aligned}$$

e quindi $f \star g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e $\|f \star g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$. Finito! □

Osservazione 1.2.1.
1. Il teorema di Young ci dice che la convoluzione fra una funzione in L^p ed una funzione di L^1 è ancora una funzione $L^p(X)$.
2. Grazie al teorema di Young, troviamo che la convoluzione di una funzione in L^p con una funzione che è in L^q per ogni $1 \leq q \leq \infty$ è in L^r per $p \leq r \leq \infty$. In particolare, la convoluzione di due funzioni che sono in ogni spazio L^p è ancora in ogni spazio L^p.

Proposizione 1.2.3.
1. *Se* f, g *sono funzioni convolvibili (cioè per cui la convoluzione ha senso),* $supp(f \star g) \subseteq \overline{supp(f) + supp(g)}$*. In particolare, se* f *e* g *hanno supporto compatto, anche* $f \star g$ *avrà supporto compatto.*
2. *Siano* $1 \leq p, q \leq \infty$ *coniugati, cioè tali che* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Allora, prese* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ *la loro convoluzione* $f \star g$ *è uniformemente continua.*
3. *Siano* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *con* $D_i f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *oppure* g *a supporto compatto. Allora* $f \star g \in C^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $D_i(f \star g) = D_i f \star g$*. Inoltre, se* $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^\infty(\mathbb{R}^N)$ *ed* f *e tutte le sue derivate parziali sono in* $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *oppure* g *è a supporto compatto, allora* $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$*.*

Dimostrazione. 1. Supponiamo che $\mathbf{x} \notin \text{supp}(f)+\text{supp}(g)$, allora $\mathbf{x}-\mathbf{y} \notin \text{supp}(f)\ \forall\ \mathbf{y} \in \text{supp}(g)$ e quindi $(f \star g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\text{supp}g} f(\mathbf{x}-\mathbf{y})g(\mathbf{y})d\mathbf{y} = 0$. Ora, notiamo che se $\text{supp}(f)$ e $\text{supp}(g)$ sono compatti, allora $\text{supp}(f)+\text{supp}(g)$ è limitato, e quindi lo è anche la su chiusura, perciò $\text{supp}(f \star g)$ è chiuso e limitato e quindi compatto.

2. Intanto per simmetria possiamo supporre che sia $p < \infty$, poi prendiamo $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^N$, allora

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N} |(f \star g)(\mathbf{x}) - (f \star g)(\mathbf{x}+\mathbf{h})| = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{y}))g(\mathbf{y})d\mathbf{y} \right| \leq$$
$$\leq \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{y})|\, |g(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} \leq \text{ (Hölder) } \leq$$
$$\leq \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N} \|g\|_q \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}+\mathbf{h}-\mathbf{y})|^p \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= \|g\|_q \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{y}+\mathbf{h})|^p \, d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{p}}$$

e concludiamo grazie alla continuità delle traslazioni in $L^p(\mathbb{R}^n)$.

3. Facciamo il caso $N = 1$, tanto gli altri sono uguali (basta usare il teorema del differenziale totale): sappiamo già che la convoluzione è uniformemente continua, poi

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f \star g)(x+h) - (f \star g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x-y+h) - f(x-y)}{h} g(y)dy$$

ora, grazie al teorema del valor medio e all'ipotesi di $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ abbiamo che $\left| \frac{f(x-y+h)-f(x-y)}{h} g(y) \right| \leq \|f'\|_\infty |g|$ q.o. e quindi possiamo usare il teorema di convergenza dominata ed ottenere la tesi. Se invece $f' \notin L^\infty(\mathbb{R})$ ma g è a supporto compatto, possiamo usare di nuovo la convergenza dominata sostituendo a $\|f'\|_\infty$ il massimo di f' sul supporto di g. La parte sulle funzioni C^∞ segue facilmente per induzione.

□

Osservazione 1.2.2.

Sappiamo che una funzione continua a supporto compatto appartiene a $L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$, allora, la convoluzione fra due funzioni continue a supporto compatto è ancora continua a supporto compatto e dunque è in L^p per ogni $1 \leq p \leq \infty$.

La proposizione precedente mostra che la convoluzione ha ottime proprietà regolarizzatrici, vediamo se riusciamo a sfruttarle un pó:

Lemma 1.2.1. *Esiste una funzione $\varphi \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \qquad 0 \leq \varphi \leq 1 \qquad \mathit{supp}(\varphi) \subseteq B(\mathbf{0}, 1) \qquad \int_{\mathbb{R}^N} \varphi \, d\mathbf{x} = 1$$

(Una funzione con queste proprietà è chiamata a volte mollificatore).

Dimostrazione. Possiamo prendere, per esempio, la funzione

$$\varphi(\mathbf{x}) \colon = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

□

Ora, sia φ un mollificatore come sopra e sia $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ per $1 \leq p \leq \infty$. Allora definiamo per ogni $\varrho > 0$ le funzioni:

$$\varphi_\varrho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varrho^N} \varphi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varrho}\right) \qquad f_\varrho(\mathbf{x}) = (f \star \varphi_\varrho)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\varrho^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varphi\left(\frac{\mathbf{y}}{\varrho}\right) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x} - \varrho\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y}$$

la funzione f_ϱ è detta regolarizzata di f di parametro ϱ e gode di ottime proprietà di approssimazione:

Teorema 1.2.2 (Le magiche proprietà delle funzioni regolarizzate)**.** *Siano φ, φ_ϱ ed f, f_ϱ come sopra. Allora*

1. *Se $f \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ allora $f_\varrho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed inoltre $\|f_\varrho\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ e $f_\varrho \to f$ uniformemente in $\mathbb{R}^N$ per $\varrho \to 0$.*

2. *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ allora $f_\rho \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ed inoltre $\|f_\varrho\|_p \leq \|f\|_p$ e $f_\varrho \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $\varrho \to 0$.*

Dimostrazione. 1. Intanto f_ϱ è in $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ ed ha supporto compatto per la proposizione precedente. Poi, abbiamo che

$$|f_\varrho| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \varrho\mathbf{y})|\,\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y} \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \|f\|_\infty$$

Infine controlliamo l'uniforme convergenza:

$$\begin{aligned}|f_\varrho(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{x} - \varrho\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y} - f(\mathbf{x})\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} (f(\mathbf{x} - \varrho\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}))\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y}\right| \leq \\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x} - \varrho\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})|\,\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{B(0,1)} |f(\mathbf{x} - \varrho\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})|\,\varphi(\mathbf{y})d\mathbf{y}\end{aligned}$$

ora, fissato $\varepsilon > 0$, poichè f è uniformemente continua (essendo a supporto compatto), scegliendo ϱ sufficientemente piccolo, abbiamo che $|f(\mathbf{x} - \varrho\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon \;\forall\; \mathbf{y} \in B(0,1)$ e quindi $\|f_\varrho - f\|_\infty < \varepsilon$.

2. Poichè $\varphi_\varrho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, il teorema di Young ci dice che $f_\varrho = f \star \varphi_\varrho \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e che $\|f_\varrho\|_p \leq \|f\|_p \|\varphi_\varrho\|_1 = \|f\|_p$. Ora, fissato $\varepsilon > 0$, sappiamo che esiste una funzione $g \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ tale che $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$: allora

$$\begin{aligned}\|f - f_\varrho\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - g_\varrho\|_p + \|g_\varrho - f_\varrho\|_p = \|f - g\|_p + \|g - g_\varrho\|_p + \|(g - f)_\varrho\|_p \leq \\ \leq 2\,\|f - g\|_p + \|g - g_\varrho\| = 2\varepsilon + \|g - g_\varrho\|_p\end{aligned}$$

e quindi, per il punto 1, vediamo che $\|f - f_\varrho\|_p \leq 3\varepsilon$ per $\rho \to \infty$.

□

Grazie alle funzioni regolarizzate otteniamo un ulteriore risultato di densità:

Proposizione 1.2.4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$. Allora le funzioni C^∞ a supporto compatto sono dense in $L^p(\Omega)$ per ogni $1 \leq p < \infty$.*

Dimostrazione. Poichè le funzioni continue a supporto compatto sono dense in $L^p(\Omega)$, basta verificare che le funzioni C^∞ a supporto compatto sono dense in $C_c^0(\Omega)$: sia allora $f \in C_c^0(\Omega)$, possiamo considerare f come definita su tutto $\mathbb{R}^N$ ponendola uguale a 0 fuori dal suo supporto, e in questo modo otteniamo ancora una funzione continua $f \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$: allora , fissato $\varepsilon > 0$, il teorema precedente ci dice che $\|f - f_\varrho\|_p \leq \varepsilon$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $\varrho > 0$ abbastanza piccolo, ed inoltre $\mathrm{supp}(f_\varrho) \subseteq \mathrm{supp}(f)$ e quindi la disuguaglianza vale anche in $L^p(\Omega)$. Fine. □

Capitolo 2

Serie di Fourier

2.1 Polinomi e Serie Trigonometrici

Un polinomio trigonometrico è una funzione del tipo

$$p(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z},|k|\leq N} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N}$$

il più grande $N = |k|$ per cui $c_k \neq 0$ è detto grado del polinomio. E'facile vedere che lo spazio $\mathcal{T}_N$ dei polinomi trigonometrici di grado al più N è uno spazio vettoriale ed inoltre i polinomi trigonometrici sono funzioni $C^\infty(\mathbb{R})$ e 2π-periodiche, quindi $\mathcal{T}_N$ è un sottospazio di $L^p(-\pi,\pi)$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$.

Una serie trigonometrica è la sorella maggiore dei polinomi di sopre: infatti è una serie della forma

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Allora ci chiediamo quando una tale serie è convergente, intanto vediamo un criterio rozzo ma efficace:

Proposizione 2.1.1. *Prendiamo una serie trigonometrica* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ *tale che* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$ *o equivalentemente* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|, \sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n| < \infty$. *Allora la serie converge uniformemente in* $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dal criterio di convergenza totale,poichè $\left|e^{ikx}\right| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. □

Vediamo ora la relazione fra una serie trigonometrica ed i suoi coefficienti

Proposizione 2.1.2. *Sia* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ *uniformemente convergente in* $[-\pi,\pi]$ *e sia* $f(x)$ *la sua somma. Allora vale che*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

Dimostrazione. Poichè la serie converge uniformemente possiamo scambiare la serie con l'integrale e poi è un conto facile. □

2.2 Serie di Fourier

Definizione 2.1 (Serie di Fourier)**.** Sia $f \in L^1(-\pi,\pi)$ una funzione 2π-periodica a valori complessi. Allora definiamo i coefficienti di Fourier di f come

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

e la serie di Fourier di f come

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Elenchiamo alcuni fatti importanti sulle serie di Fourier:

Proposizione 2.2.1 (Lemma di Riemann-Lebesgue)**.** *Sia $f \in L^1(-\pi,\pi)$ e siano c_k i suoi coefficienti di Fourier. Allora $\lim_{|k|\to+\infty} c_k = 0$.*

Dimostrazione. Supponiamo prima che $f \in C^\infty(-\pi,\pi)$; allora abbiamo che, per $k \neq 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt = \left[\frac{f(t)e^{-ikt}}{-ik}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(t)e^{-ikt}}{-ik}\,dt = \frac{1}{-ik}\left(\left[f(t)e^{-ikt}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt}\,dt\right)$$

e quindi

$$|c_k| \leq \frac{C}{k}$$

per un certo $C \in \mathbb{R}$ il che implica la tesi. Sia ora f qualsiasi, allora sappiamo che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste una funzione $g \in C^\infty(-\pi,\pi)$ tale che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g(t)|\,dt < \varepsilon$$

e perciò

$$|c_k| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right| \leq \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(t)-g(t))e^{-ikt}\,dt\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ikt}\,dt\right| \leq \varepsilon + \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)e^{-ikt}\,dt\right|$$

e per quanto già dimostrato, concludiamo. □

Le serie di Fourier sono particolarmente importanti negli spazi $L^2(-\pi,\pi)$:

Proposizione 2.2.2. *Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$ e sia $\mathcal{T}_N$ il sottospazio vettoriale di $L^2(-\pi,\pi)$ dei polinomi trigonometrici di grado al più N. Allora, detta S_N la somma parziale N-esima della serie di Fourier di f:*

$$S_N(x) = \sum_{|k|\leq N} c_k e^{ikx}$$

S_N è la proiezione ortogonale di f su $\mathcal{T}_N$, cioè $\|f - S_N\|_2 = \min_{p\in\mathcal{T}_N} \|f-p\|_2$ per $p \in \mathcal{T}_N$

Dimostrazione. Il corso di ApvII. □

Teorema 2.2.1. *$\mathcal{T}_N$ è denso in $L^2(-\pi,\pi)$.*

Dimostrazione. Il corso di ApvII □

Teorema 2.2.2. *Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$ allora la serie di Fourier di f converge a f nello spazio $L^2(-\pi,\pi)$. Quindi $\{\, e^{ikx} \,\}_{k\in\mathbb{Z}}$ è una base ortogonale di $L^2(-\pi,\pi)$.*

Dimostrazione. Segue dal teorema e dalla proposizione precedenti. □

Proposizione 2.2.3 (Identità di Parseval)**.** *Siano $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$ e siano c_k, γ_k i rispettivi coefficienti di Fourier complessi. Allora*

$$\langle f, g\rangle_{L^2(-\pi,\pi)} = 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \overline{\gamma_k}$$

Dimostrazione. Il corso di ApvII. □

Proposizione 2.2.4 (Identità di Bessel)**.** *Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$ e siano c_k i suoi coefficienti di Fourier complessi. Allora*

$$\|f\|_2 = 2\pi(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2)^{\frac{1}{2}}$$

Dimostrazione. Il corso di ApvII. □

Perciò abbiamo visto che le serie di Fourier convergono sempre in $L^2(-\pi,\pi)$, ma ci piacerebbe anche avere qualche risultato sulla convergenza puntuale delle stesse. Un teorema di Lennart Carleson dimostra che la serie di Fourier di una funzione in $L^2(-\pi,\pi)$ converge puntualmente quasi ovunque alla funzione stessa, e questo vale anche per funzioni in $L^p(-\pi,\pi)$ per $1 < p < \infty$ (questo l'ha dimostrato Richard Hunt); ma noi ci accontentiamo di risultati più modesti:

Lemma 2.2.1. *Sia $f \in L^2(-\pi,\pi)$ e siano c_k i suoi coefficienti di Fourier. Allora, se $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f q.o.. Se invece sappiamo già che f è continua e se abbiamo che $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, allora la serie di Fourier di f converge uniformemente ad f.*

Dimostrazione. Sappiamo dalla proposizione 2.1.1 che nelle nostre ipotesi la serie di Fourier converge uniformemente ad una funzione continua $S(x)$, e sappiamo che $\|f - S\|_2 = 0$, quindi $f(x) = S(x)$ quasi ovunque. Se invece sappiamo già che f è continua, allora la serie di Fourier converge uniformemente ad f dappertutto perchè $S(x) - f(x) = 0$ quasi ovunque e l'unica funzione continua che è nulla quasi ovunque è quella identicamente nulla. □

Proposizione 2.2.5. *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica e derivabile tale che $f' \in L^2(-\pi,\pi)$. Allora*

1. *Se indichiamo con $c_k(f), c_k(f')$ i coefficienti di Fourier di f ed f' rispettivamente, abbiamo che $c_k(f') = ikc_k(f)$.*
2. *La serie di Fourier di f converge uniformemente ad f.*

Dimostrazione. Il primo punto è un facile conto:

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)e^{-ikt}\,dt = \frac{1}{2\pi}\left([f(t)e^{-ikt}]_{-\pi}^{\pi} + ki\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,dt\right) = ikc_k(f)$$

ma allora, otteniamo subito che $\sum_{k\neq 0} |c_k(f)| = \sum \frac{|c_k(f')|}{|k|} \leq (\sum \frac{1}{|k|^2})^{\frac{1}{2}}(\sum |c_k(f')|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$ e per il lemma 2.2.1 concludiamo. □

Teorema 2.2.3 (Dirichlet)**.** *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione 2π-periodica tale che $f \in L^2(-\pi,\pi)$. Se in un punto $x_0 \in [-\pi,\pi]$ esistono finiti il limite destro e sinistro di f in x_0 e le derivate destra e sinistra di f in x_0 allora la serie di Fourier di f converge in x_0 e vale*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx_0} = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right)$$

.

Dimostrazione. Corso di ApvII. □

2.3 Convoluzione tra funzioni periodiche

2.3.1 Convoluzione in $[-\pi,\pi]$

Una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si dice periodica di periodo $T > 0$ se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; è chiaro che una funzione è periodica se e solo se $f(x+kT) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Se ci fa comodo, possiamo considerare f come una funzione in $S^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \,\}$ tramite l'identificazione $S^1 = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$; in particolare, se f è una funzione 2π-periodica e continua, rimane continua anche come funzione su S^1. E'anche ovvio che le funzioni periodiche formano un sottospazio delle funzioni complesse.

Lemma 2.3.1. *Sia f una funzione T-periodica. Allora*

$$\int_0^T f(t+x)dt = \int_x^{T+x} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

Dimostrazione. La prima uguaglianza è data dal cambio di variabile $y = t + x$. Per la seconda, osserviamo che

$$\int_x^{T+x} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt - \int_0^x f(t)dt + \int_T^{T+x} f(t)dt =$$
$$= \int_0^T f(t)dt - \int_0^x f(t)dt + \int_0^x f(t+T)dt = \int_0^T f(t)dt - \int_0^x f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$$

□

Ora ci occuperemo sempre di funzioni 2π-periodiche, ma il discorso si può generalizzare facilmente a funzioni di periodo qualsiasi. Vediamo che possiamo fare la convoluzione anche fra funzioni periodiche:

Definizione 2.2 (Convoluzione fra funzioni periodiche)**.** Siano f, g funzioni 2π-periodiche tali che $f, g \in L^1(-\pi, \pi)$. Allora definiamo la loro convoluzione come

$$f \star g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt$$

Proposizione 2.3.1. *La convoluzione $f \star g$ è ben definita, bilineare e simmetrica. Inoltre $f \star g$ è periodica, $f \star g \in L^(-\pi, \pi)$ e $\|f \star g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede identica a quella per le convoluzioni in $\mathbb{R}^N$, l'unica differenza è che quando abbiamo delle traslazioni dobbiamo sfruttare la periodicità delle funzioni con il lemma 2.3.1. □

Quindi lo spazio delle funzioni 2π-periodiche e in $L^1(-\pi, \pi)$ è un algebra esattamente come lo spazio $L^1(\mathbb{R}^N)$, ed esattamente come quello spazio, è un algebra senza unità. Per dimostrarlo, sfruttiamo il legame fra la convoluzione periodica e serie di Fourier:

Proposizione 2.3.2. *Non esiste una funzione e, 2π-periodica ed in $L^1(-\pi, \pi)$ tale che $f \star e = f$ per ogni f 2π periodica ed in $L^1(\mathbb{R}^N)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che una tale e esista. Allora, per ogni $k \in \mathbb{Z}$ deve valere

$$e^{ikx} = (e^{ikt} \star e)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{-ikt}e(t)\,dt = e^{ikx}\int_{-\pi}^{\pi} e(t)e^{-ikt}\,dt$$

ma allora vediamo che i coefficienti di Fourier della funzione e sono tutti quanti $\frac{1}{2\pi}$, il che è assurdo per il lemma di Riemann-Lebesgue. □

In generale, vale la seguente proposizione che lega i coefficienti di Fourier di due funzioni ai coefficienti di Fourier della loro convoluzione:

Proposizione 2.3.3. *Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodiche e tali che $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$; allora indicando con $c_k(f), c_k(g), c_k(f \star g)$ i coefficienti di Fourier delle due funzioni e della loro convoluzione, si ha che $c_k(f \star g) = 2\pi c_k(f)c_k(g)$ e la serie di Fourier di $f \star g$ converge uniformemente ad $f \star g$.*

Dimostrazione. Intanto sappiamo già che $f \star g$ è uniformemente continua perchè gli esponenti $2, 2$ sono coniugati:

$$c_k(f \star g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt\right)e^{-ikx}dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)e^{-ik(x-t)}dx\right)g(t)e^{-ikt}\,dt = 2\pi c_k(f)c_k(g)$$

allora abbiamo che $\sum |c_k(f \star g| = 2\pi \sum |c_k(f)|\,|c_k(g)| \leq 2\pi(\sum |c_k(f)|^2)^{\frac{1}{2}}(\sum |c_k(g)|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$ e concludiamo sempre per il lemma 2.2.1. □

Poi, continuano a valere tutte le proprietà delle convoluzioni in $\mathbb{R}^N$, e le dimostrazioni sono praticamente identiche, con l'unica differenza di dover usare la periodicità delle funzioni quando ci sono delle traslazioni.

2.3.2 Dirichlet e Fejér

Abbiamo visto che le funzioni e^{ikt} rivestono un ruolo particolarmente importante, quindi, perchè non calcolarne la convoluzione?

Esempio 2.3.1. Prendiamo $h, k \in \mathbb{Z}$ e calcoliamo $e^{iky} \star e^{ihy}$:

$$e^{iky} \star e^{ihy}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-ikt} e^{iht}\, dt = 2\pi e^{ikx} \delta_{hk}$$

Allora il conto precedente ci dice che anche lo spazio $\mathcal{T}_N$ è un algebra di convoluzione; e stavolta è anche un algebra unitaria, e sappiamo anche chi è l'unità:

Definizione 2.3 (Nucleo di Dirichlet)**.** Sia $N \in \mathbb{N}$. Allora l'N-esimo nucleo di Dirichlet è il polinomio trigonometrico

$$D_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le N} e^{ikx}$$

L'esempio precedente mostra subito che $D_N \star e^{iky} = e^{iky}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}, |k| \le N$ e per linearità, questo ci dice che D_N è proprio l'identità di convoluzione in $\mathcal{T}_N$. E c'è di più, infatti, se f è 2π-periodica e $f \in L^1(-\pi, \pi)$, allora

$$(D_N \star f)(x) = \sum_{|k| \le N} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt \right) e^{ikx}$$

cioè $D_N \star f$ è proprio la somma parziale N-esima della serie di Fourier di f.

Il nucleo di Dirichlet ha un amico:

Definizione 2.4 (Nucleo di Fejér)**.** L' N-esimo nucleo di Fejér è la media aritmetica dei nuclei di Dirichlet:

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} D_k(x)$$

Lemma 2.3.2. *Si ha che:*

1.

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(2N+1) & se\ x = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(Nx) - \cos((N+1)x)}{1 - \cos x} & se\ x \neq 0 \end{cases} \qquad F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(N+1) & se\ x = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2 \frac{(N+1)x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} & se\ x \neq 0 \end{cases}$$

2.

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = 1$$

Dimostrazione. 1. Se $x = 0$ entrambe le identità sono facilmente verificate. Se $x \neq 0$ è sempre un facile conto, magari un pó più lungo: per la prima identità basta ricordare la formula per le somme parziali di una serie geometrica. Dimostriamo la seconda:

$$\sum_{k=0}^{N} D_k(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2\pi} \frac{\cos(kx) - \cos((k+1)x)}{1 - \cos x} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1 - \cos x} \sum_{k=0}^{N} (\cos(kx) - \cos((k+1)x)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \cos((N+1)x)}{1 - \cos x} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{(N+1)x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}}$$

(nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la formula di duplicazione) e la tesi è provata.

2. La prima uguaglianza è un facile conto senza niente di speciale e la seconda segue subito dalla prima.

□

Proposizione 2.3.4.

$$\|D_N\|_1 \approx \log N \qquad per\ N \to \infty$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sull'identità

$$D_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}(2N+1) & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{2\pi}\frac{\sin((N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

che puó essere dimostrata facilmente (spero, io non l'ho fatto). Ora, sappiamo anche che

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x \qquad \forall\, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

e perció

$$\frac{x}{\pi} < \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2} \qquad \forall\, x \in (0,\pi)$$

Quindi:

$$\|D_N\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{pi}\left|\frac{\sin((N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\right|dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin((N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\right|dx \approx \int_0^{\pi}\frac{\left|\sin((N+\frac{1}{2})x)\right|}{x}dx =$$

$$= \int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt = \int_0^{N\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt + \int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt$$

e

$$\int_0^{N\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt = \sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt = \sum_{k=0}^{N-1}\int_0^{\pi}\frac{|\sin t|}{t+k\pi}dt \approx \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt \approx \log N$$

mentre

$$\int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi}\frac{|\sin t|}{t}dt \leq \int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi}\frac{1}{t}dt \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{N\pi} = \frac{1}{2N} \to 0 \qquad \text{per } N \to \infty$$

□

La divergenza in norma del Nucleo di Dirichlet che abbiamo appena dimostrato è alla base di molti fenomeni in cui la serie di Fourier di una funzione non converge alla funzione, ma si comporta in modo strano. Invece, con in nuclei di Fejér, riusciamo a costruire delle successioni di polinomi trigonometrici che convergono:

Teorema 2.3.1 (Fejér)**.** *Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una funzione continua e 2π-periodica. Allora i polinomi di Fejér*

$$T_N :\, = F_N \star f$$

convergono uniformemente ad f in $\mathbb{R}$ per $N \to \infty$.

Dimostrazione. Intanto vediamo che per periodicità ci basta dimostrare la convergenza uniforme in $[-\pi, \pi]$. Ora cominciamo:

$$|f(x) - (F_N \star f)(x)| = \left| f(x) - \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_N(t)dt \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x)F_N(t)dt - \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)F_N(t)dt \right| =$$
$$= \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x-t)]F_N(t)dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)| \, F_N(t)dt$$

(per l'ultima disuguaglianza, notiamo che $F_N(t) \geq 0$ per il lemma precedente). Adesso, poichè f è continua, è anche uniformemente contunua su $[-\pi, \pi]$, quindi, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ piccolo tale che $|f(x) - f(x-t)| \leq \varepsilon$ se $t \in [-\delta, \delta]$; allora:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f(x-t)| \, F_N(t)dt = \int_{|t|\leq\delta} |f(x) - f(x-t)| \, F_N(t)dt + \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} |f(x) - f(x-t)| \, F_N(t)dt \leq$$
$$\leq \varepsilon \int_{|t|\leq\delta} F_N(t)dt + 2\,\|f\|_\infty \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} F_N(t)dt \leq \varepsilon + \frac{2\,\|f\|_\infty}{2\pi(N+1)} \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \frac{\sin^2 \frac{(N+1)t}{2}}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt \leq$$
$$\leq \varepsilon + \frac{2\,\|f\|_\infty}{2\pi(N+1)} \int_{\delta\leq|t|\leq\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}} dt \leq \varepsilon + \frac{4\pi\,\|f\|_\infty}{2\pi(N+1)\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

e quindi $|f(x) - (F_N \star f)(x)| \leq 2\varepsilon$ per $N \to \infty$ per $x \in [-\pi, \pi]$ e abbiamo finito. $\square$

Capitolo 3

Trasformata di Fourier

3.1 Proprietà della Trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier serve ad un sacco di cose.

Nota: adesso non indichiamo più i vettori multidimensionali in grassetto.

Definizione 3.1 (Trasformata di Fourier)**.** La trasformata di Fourier è l' operatore

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^N) &\longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N) \\ f &\mapsto \widehat{f} \end{aligned}$$

dove

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle \xi, x\rangle} dx$$

Proposizione 3.1.1 (Proprietà della Trasformata di Fourier)**.** *Elenchiamo alcune delle proprietà più importanti della Trasformata di Fourier.*

1. *$\mathcal{F}$ è un operatore lineare iniettivo da $L^1(\mathbb{R}^N)$ a $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$ (quindi è anche continuo).*

2. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, allora $\mathcal{F}(f \star g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$*

3. *$\mathcal{F}(f)$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}^N$.*

4. *(Lemma di Riemann-Lebesgue) $\mathcal{F}(f)(\xi) \to 0$ per $|\xi| \to \infty$.*

5. *se $x \mapsto |x|^r f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ per ogni $r \leq n$ allora $\mathcal{F}(f)$ è di classe C^n e*

$$D^\alpha(\mathcal{F}(f))(\xi) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha f(x))(\xi) \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq n$$

6. *sia $f \in C^n$ tale che $D^\alpha(f) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq n$. Allora*

$$\mathcal{F}(D^\alpha(f))(\xi) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}(f)(\xi) \quad \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq n$$

Dimostrazione. 1. La linearità della trasformata di Fourier segue subito dalla linearità dell'integrale. Poi, vediamo che, se $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, allora

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x)e^{-i\langle \xi, x\rangle} dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$$

e quindi $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\|f\|_\infty \leq \|f\|_1$. L'iniettività la dimostreremo dopo.

2. Intanto sappiamo che, se f, g sono sommabili, anche la loro convoluzione è sommabile e quindi la Trasformata di Fourier è ben definita. Ora vediamo che

$$\widehat{f \star g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-t) g(t) dt \right) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-t) g(t) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dt dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-t) g(t) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx dt = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(x-t) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx \right) g(t) dt =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f(y) e^{-i\langle \xi, y+t \rangle} dy \right) g(t) dt = \widehat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}^N} g(t) e^{-i\langle \xi, t \rangle} = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi)$$

3. Mostriamo che $\widehat{f}$ è uniformemente continua:

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} \left| \widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi) \right| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle \xi+h, x \rangle} dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle \xi, x \rangle} dx \right| =$$
$$= \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) [e^{-i\langle \xi, x \rangle} e^{-i\langle h, x \rangle} - e^{-i\langle \xi, x \rangle}] dx \right| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle \xi, x \rangle} [e^{-i\langle h, x \rangle} - 1] dx \right| \leq$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| \left| e^{-i\langle h, x \rangle} - 1 \right| dx$$

ora, $|f(x)| \left| e^{-i\langle h, x \rangle} - 1 \right| \leq 2 |f|$ che è sommabile e quindi, per il teorema di convergenza dominata, troviamo

$$\lim_{h \to \mathbf{0}} \left| \widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi) \right| \leq \lim_{h \to \mathbf{0}} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| \left| e^{-i\langle h, x \rangle} - 1 \right| dx = \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{h \to \mathbf{0}} |f(x)| \left| e^{-i\langle h, x \rangle} - 1 \right| dx = 0$$

4. Dimostriamo il lemma di Riemann-Lebesgue: intanto vediamo che

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle \xi x \rangle} dx = \left(\text{osserviamo che } e^{-i\pi \frac{\langle \xi, \xi \rangle}{|\xi|^2}} = -1 \right) =$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\langle x + \frac{\pi\xi}{|\xi|^2}, \xi \rangle} dx = \left(y = x + \frac{\pi\xi}{|\xi|^2} \right) = -\int_{\mathbb{R}^N} f\left(y - \frac{\pi\xi}{|\xi|^2} \right) e^{-i\langle \xi, y \rangle} dy$$

ma allora

$$2\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} \left[f(x) - f\left(x - \frac{\pi\xi}{|\xi|^2} \right) \right] e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx$$

e poichè $\frac{\pi\xi}{|\xi|^2} \to 0$ per $|\xi| \to \infty$ otteniamo la tesi grazie alla continuità delle traslazioni in $L^1(\mathbb{R}^N)$.

5. Intanto osserviamo subito che $x \mapsto x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)\ \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq n$ se e solo se $x \mapsto |x|^r f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)\ \forall\ r \leq n$ e quindi la formula ha senso. Poi, se dimostriamo il caso $n = 1$ gli altri seguono facilmente per induzione e possiamo supporre tranquillamente $N = 1$ perchè tanto nel caso generale è tutto praticamente identico. Abbiamo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)] = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\xi x} \frac{e^{-ixh} - 1}{h} dx$$

e $\left| f(x) e^{-i\xi x} \frac{e^{-ixh}-1}{h} \right| = |x| |f(x)| \left| \frac{e^{-ixh}-1}{xh} \right| \leq M |x| |f(x)|$ perchè la funzione $t \mapsto \left| \frac{e^{-it}-1}{t} \right|$ è continua in e tende a 0 all'infinito. Quindi possiamo applicare il teorema di convergenza dominata e trovare che

$$\lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} f(x) e^{-i\xi x} \frac{e^{-ixh} - 1}{h} dx = \int_{\mathbb{R}} (-ix) f(x) e^{-i\xi x} dx = = (\widehat{-ix)f}(x)(\xi) = (-i)\widehat{xf(x)}(\xi)$$

Fine.

6. Al solito, facciamo solo il caso $N = 1$ e procediamo per induzione su n: se $n = 1$ allora

$$\widehat{f'}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)e^{-i\xi x}dx = [f(x)e^{-i\xi x}]_{-\infty}^{+\infty} + i\xi \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\xi x}dx = [f(x)e^{-i\xi x}]_{-\infty}^{+\infty} + i\xi\hat{f}(\xi)$$

ma se $f \in L^1(\mathbb{R})$, allora $f \to 0$ per $|x| \to \infty$ e quindi abbiamo la tesi. Il passo induttivo segue subito.

□

Vediamo alcune altre proprietà della Trasformata di Fourier:

Lemma 3.1.1. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e siano $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{R}^N$. Allora:*

1. $\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^N}\mathcal{F}(f)(\frac{\xi}{\lambda})$
2. $\mathcal{F}(f(x+v))(\xi) = e^{i\langle v,\xi\rangle}\mathcal{F}(f)(\xi)$
3. $\mathcal{F}(f)(\xi + v) = \mathcal{F}(e^{-\langle v,x\rangle}f(x))(\xi)$
4. $\mathcal{F}(\overline{f})(\xi) = \overline{\mathcal{F}(f)(-\xi)}$

Dimostrazione. Sono tutte facili verifiche. □

Ora calcoliamo una trasformata di Fourier importante :

Esempio 3.1.1. Calcoliamo la trasformata di $f(x) = e^{-a|x|^2} = e^{-a\langle x,x\rangle}$ con $a \in \mathbb{R}$: Consideriamo prima il caso $N = 1$: si ha che

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}e^{-ix\xi}dx$$

e quindi

$$\widehat{f}'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}(-ix)e^{-ix\xi}dx = \frac{i}{2a}\int_{\mathbb{R}}(-2ax)e^{-ax^2}e^{-ix\xi}dx = (\text{ integrazione per parti }) = -\frac{\xi}{2a}\widehat{f}(\xi)$$

e risolvendo questa equazione differenziale, troviamo che $\widehat{f}(\xi) = Ce^{-\frac{x^2}{4a}}$; calcoliamo C:

$$C = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}dx = \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ax^2}e^{-ay^2}dxdy\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)}dxdy\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{[0,+\infty)\times[0,2\pi]} \rho e^{-a\rho^2}d\rho d\theta\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

quindi $\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$. Passiamo al caso generale con $N \geq 1$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-a|x|^2}e^{-i\langle x,\xi\rangle}dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\langle ax+i\xi,x\rangle}dx = \int_{\mathbb{R}^N}\prod_{j=1}^{N} e^{-(ax_j+i\xi_j)x_j}dx =$$
$$= \prod_{j=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-ax_j^2}e^{-ix_j\xi_j}dx_j = \prod_{j=1}^{N}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi_j^2}{4a}} = (\frac{\pi}{a})^{\frac{N}{2}}e^{-\frac{|\xi|^2}{4a}}$$

3.2 Formula di Inversione, Teorema di Plancherel

Gli ultimi due punti della proposizione 3.1.1 ci portano a far conoscenza con un nuovo amico:

Definizione 3.2. (Spazio di Schwartz) Lo spazio di Schwartz di $\mathbb{R}^N$ è l'insieme

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \;\middle|\; x \mapsto x^\alpha D^\beta(\varphi(x)) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \;\forall\; \alpha, \beta \in \mathbb{N}^N \right\}$$

Osservazione 3.2.1. Intanto osserviamo che

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \left\{ \varphi \in C^\infty \;\middle|\; x \mapsto |x|^n D^\beta(\varphi(x)) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \;\forall\; n \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^N \right\}$$

(vedi proposizione precedente); e quindi è facile vedere che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^p(\mathbb{R}^N)$ per ogni $1 \leq p \leq \infty$, infatti gli unici problemi di sommabilità sono all'infinito, ma questi si risolvono confrontando φ con un opportuno $|x|^{-r}$. Inoltre, vediamo che $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ contiene le funzioni C^∞ a supporto compatto che sappiamo essere dense in ogni $L^p(\mathbb{R}^N)$ per $1 \leq p < \infty$ e quindi anche lo spazio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ è denso in essi. Infine, osserviamo che, se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ allora, presi $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$, $D^\alpha(x^\beta\varphi(x)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$: infatti $D^\alpha(x^\beta\varphi x) = D^\alpha(x^\beta)\varphi x + x^\beta D^{\varphi x}$ ed è chiaro il secondo addendo è in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, mentre per il primo vale la stessa cosa perchè la derivata di un monomio è un polinomio.

Proposizione 3.2.1. *Sia* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*: allora* $\forall\; \alpha \in \mathbb{N}^N$ *si ha che*

$$\mathcal{F}(D^\alpha(f)) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha\mathcal{F}(f)$$
$$D^\alpha(\mathcal{F}(f)) = (-i)^{|\alpha|}\mathcal{F}(x^\alpha f(x))$$

Dimostrazione. Conseguenza immediata della proposizione precedente. □

Nello spazio si Schwartz la trasformata di Fourier ha una proprietà fantastica:

Teorema 3.2.1 (Formula di Inversione)**.** *La trasformata di Fourier ristretta allo spazio di Schwartz è un isomorfismo ed in particolare, se* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*, allora*

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\mathcal{F}(\mathcal{F}(\varphi))(-x)$$

Dimostrazione. Intanto mostriamo che la trasformata di Fourier manda $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ in sè: sia $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$, allora $\xi^\alpha D^\beta(\widehat{\varphi})(\xi) = (-i)^{|\beta|}\xi^\alpha\widehat{x^\beta\varphi(x)}(\xi) = (-i)^{|\alpha|+|\beta|}\widehat{D^\alpha(x^\beta\varphi x)}(\xi)$ e quindi concludiamo per l'osservazione precedente e per il fatto che la trasformata di Fourier ha immagine in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Ora proviamo a dimostrare la formula: l'approccio più immediato è questo:

$$\widehat{\widehat{\varphi}}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(\xi)e^{-i\langle\xi,x\rangle}d\xi = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)e^{-i\langle\xi,y\rangle}dy\right)e^{-i\langle\xi,x\rangle}d\xi$$

ma ora il problema è che non possiamo applicare Fubini-Tonelli perchè la funzione $(\xi, y) \mapsto \varphi(y)e^{-i\langle\xi,y\rangle}e^{-i\langle\xi,x\rangle}$ non è sommabile a meno che $\varphi \equiv 0$. Allora siamo costretti a seguire un'altra strada.

Iniziamo con un lemma:

Lemma 3.2.1. *Siano* $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*, allora, fissato* $x \in \mathbb{R}^N$*,si ha che*

$$\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)e^{-i\langle x,\xi\rangle}d\xi = \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(x+y)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(u)\varphi u - xdu$$

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)e^{-i\langle x,\xi\rangle}d\xi = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\varphi(y)e^{-i\langle\xi,y\rangle}du\right)\psi(\xi)e^{-i\langle x,\xi\rangle}d\xi$$

Ora vediamo che la funzione $(y,\xi) \mapsto \varphi(y)\psi(\xi)e^{-i\langle\xi,y\rangle}e^{-i\langle x,\xi\rangle}$ è sommabile, e quindi possiamo usare Fubini-Tonelli ed ottenere che

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(\xi)\psi(\xi)e^{-i\langle x,\xi\rangle}d\xi = \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\xi)e^{-i\langle\xi,y\rangle}e^{-i\langle\xi,x\rangle}d\xi\right)\varphi(y)dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\xi)e^{-i\langle\xi,x+y\rangle}d\xi\right)\varphi(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(x+y)\varphi(y)dy$$

Infine, la terza uguaglianza segue da un semplice cambio di variabile. □

Ora, consideriamo la funzione $\psi(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$: sappiamo che $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, che $\psi(0) = 1$, che $\int_{\mathbb{R}^N}\psi(x)dx = (2\pi)^{\frac{N}{2}}$ e che $\widehat{\psi}(\xi) = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\psi\xi$.

Allora, per il lemma precedente, abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\varepsilon\xi)\widehat{\varphi(\xi)}e^{-i\langle\xi,x\rangle}d\xi = \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi(\varepsilon x)}(y)\varphi(y-x)dy = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{\varepsilon^N}\widehat{\psi}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)\varphi(y-x)dy = \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(u)\varphi(\varepsilon u-x)du$$

Perció, se calcoliamo il limite per $\varepsilon \to 0$ con il teorema di convergenza dominata, troviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\varphi(\xi)}e^{-i\langle\xi,x\rangle}d\xi = \varphi(-x)\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(u)du = (2\pi)^{\frac{N}{2}}\varphi(-x)\int_{\mathbb{R}^N}\psi(u)du = (2\pi)^N\varphi(-x)$$

che è la tesi

□

Osservazione 3.2.2. Vediamo che, se nel lemma 3.2.1 si pone $x = 0$, otteniamo che

$$\int_{\mathbb{R}^N}\psi(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^N}\widehat{\psi}(y)\varphi(y)dy$$

Di nuovo, lo spazio L^2 riveste un ruolo particolarmente importante:

Teorema 3.2.2 (Plancherel). *La trasformata di Fourier si estende in modo unico ad un automorfismo $\mathcal{F}$ di $L^2(\mathbb{R}^N)$ tale che*

$$\langle\mathcal{F}(f),\mathcal{F}(g)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N\langle f,g\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall\, f,g \in L^2(\mathbb{R}^N)$$
$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^N}\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x)\ \text{q.o. in}\ \mathbb{R}^N \qquad \forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Dimostrazione. Il teorema precedente ci dice che la trasformata di Fourier è un automorfismo dello spazio di Schwartz e l'identità di Parseval $\langle\mathcal{F}(\varphi),\mathcal{F}(\psi)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = (2\pi)^N\langle\varphi,\psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ si verifica facilmente se $\varphi,\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Ora, poichè lo sapzio di Schwartz è denso in $L^2(\mathbb{R}^N)$, per ogni $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ esiste una successione $\{\varphi_n\} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ che converge ad f in $L^2(\mathbb{R}^N)$: allora definiamo la Trasformata di Fourier di f come $\mathcal{F}(f) := \lim_{n\to\infty}\mathcal{F}(\varphi_n)$. E' facile vedere che questa è una buona definizione e che la trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^N)$ gode delle proprietà desiderate (per dimostrare la formula di inversione, si passa ad una sottosuccessione di $\{\varphi_n\}$ che converge ad f quasi ovunque, come nella Proposizione 1.1.6). □

Per finire, dimostriamo l'iniettività della Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R}^N)$:

Proposizione 3.2.2. *La Trasformata di Fourier $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\mathbb{R}^N)$ è iniettiva.*

Dimostrazione. Sia $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tale che $\widehat{(f)} = 0$. Allora, consideriamo le funzioni mollificate $f \star \varphi_\varrho$ (cfr 1.2.1): sappiamo che $f \star \varphi_\varrho \to f$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ e che $f \star \varphi_\varrho \in L^2(\mathbb{R}^N)$, ma $\widehat{f \star \varphi_\varrho} = \widehat{f}\widehat{\varphi_\varrho} = 0$ e poichè la trasformata di Fourier è un isomorfismo in $L^2(\mathbb{R}^N)$ ne segue che $f \star \varphi_\varrho$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$, cioè che $f \star \varphi_\varrho = 0$ quasi ovunque. Ma allora $f \star \varphi_\varrho = 0$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$ e quindi $f = 0$ in $L^1(\mathbb{R}^N)$. □

Capitolo 4

Forme Differenziali

4.1 Algebra Multilineare

4.1.1 Applicazioni Alternanti e Prodotto Esterno

Definizione 4.1 (Applicazioni Alternanti)**.** Sia V uno spazio vettoriale reale. Un'applicazione multilineare $f\colon V^p \to W$ si dice alternante se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. $f(v_1, v_2, \dots, v_p) = 0$ se i vettori $v_1, \dots, v_p$ sono linearmente dipendenti.
2. $f(v_1, v_2, \dots, v_p) = 0$ se esistono due indici distinti i, j per cui $v_i = v_j$.
3. $f(v_{\tau(1)}, v_{\tau(2)}, \dots, v_{\tau(p)}) = -f(v_1, v_2, \dots, v_p)$ se τ è una trasposizione di S_p.
4. $f(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, v_2, \dots, v_p)$ se σ è una permutazione di S_p, dove $\varepsilon(\sigma)$ è la segnatura di σ.

Lo spazio vettoriale delle applicazioni alternanti a valori in uno spazio W si indica con $\mathrm{Alt}(V^p, W)$. In particolare, gli elementi di $\mathrm{Alt}(V^p, \mathbb{R})$ sono detti forme alternanti.

Dimostrazione. Dimostriamo che le condizioni di sopra sono effettivamente equivalenti:

$1 \implies 2$: è chiaro che se $v_i = v_j$ per $i \neq j$ i vettori $v_1, v_2, \dots, v_p$ sono linearmente dipendenti.

$2 \implies 3$: supponiamo ad esempio che $\tau = (12)$: allora $0 = f(v_1 + v_2, v_1 + v_2, \dots, v_p) = f(v_1, v_1, \dots, v_p) + f(v_1, v_2, \dots, v_p) + f(v_2, v_1, \dots, v_p) + f(v_2, v_2, \dots, v_p) = f(v_1, v_2, \dots, v_p) + f(v_2, v_1, \dots, v_p)$ ed abbiamo trovato quel che cercavamo.

$3 \implies 4$: questo si vede scomponendo σ come prodotto di trasposizioni.

$4 \implies 3 \implies 2 \implies 1$: le prime due implicazioni sono banali. Dimostriamo l'ultima: supponiamo che i vettori $v_1, \dots, v_p$ siano linearmente dipendenti, ad esempio. supponiamo che $v_1 = \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$; allora $f(v_1, v_2, \dots, v_p) = f(\lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_k v_p, v_2, \dots, v_p) = \lambda_2 f(v_2, v_2, \dots, v_p) + \dots + \lambda_p f(v_k, v_2, \dots, v_p) = 0$

□

Ricordiamo ora le proprietà del prodotto tensoriale fra spazi vettoriali: sia V uno spazio vettoriale reale, allora consideriamo lo spazio vettoriale reale libero generato dagli elementi di $V \times V$, cioè $\mathbb{R}^{V \times V} = \{\, \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i, w_i) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i, w_i \in V \,\}$; abbiamo quindi un omomorfismo di inclusione $i\colon V \times V \to \mathbb{R}^{V \times V}$. Allora in $\mathbb{R}^{V \times V}$ prendiamo il sottospazio

$$\mathcal{R} = \{\, (u+v, w) - (u, w) - (v, w), (u, v+w) - (u, v) - (u, w), (\lambda u, v) - \lambda(u, v), (u, \lambda v) - \lambda(u, v) \,\}$$

e siano $V \otimes V$ il quoziente $\mathbb{R}^{V \times V}/\mathcal{R}$ e $\mu\colon V \times V \to V \otimes V$ la composizione dell'omomorfismo di inclusione di prima con la proiezione al quoziente: scriveremo $\mu(u, v) = u \otimes v$; gli elementi di $T_p(V)$ nell'immagine di μ sono detti decomponibili Allora è facile vedere che vale la seguente proprietà:

Proposizione 4.1.1 (Proprietà universale del prodotto tensoriale)**.** *Sia W uno spazio vettoriale reale e sia $f\colon V \times V \to W$ un'applicazione bilineare. Allora esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{f}\colon V \otimes V \to W$ tale che $f = \tilde{f} \circ \mu$. Inoltre, a meno di isomorfismi opportuni, la coppia $(V \times V, \mu)$ è l'unica con questa proprietà.*

questo discorso si generalizza facilmente al caso di applicazioni p-multilineari ed indichiamo con $T_p(V)$ il prodotto tensoriale di V con sè stesso p volte: $T_p(V) = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$. Dalla costruzione stessa di $T_p(V)$ si verifica facilmente anche la seguente proposizione:

Proposizione 4.1.2. *Sia V uno spazio vettoriale reale, allora gli elementi decomponibili generano $T_k(V)$. Inoltre se V ha dimensione finita n e se $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ è una base di V, allora una base di $T_p(V)$ è data da $(v_I | I$ multiindice in $\{1, 2, \ldots, n\}^p$) dove intendiamo $v_I = v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_p}$ se $I = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$.*

Ora passiamo alle applicazioni multilineari alternanti: consideriamo in $T_p(V)$ il sottospazio generato dagli elementi $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_p$ dove i $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sono vettori linearmente dipendenti in V; indichiamo con $\Lambda_p(V)$ il quoziente di $T_p(V)$ per questo sottospazio e con $\alpha\colon V^p \to \Lambda_p(V)$ la composizione di μ con la proiezione al quoziente: è facile vedere che α è un'applicazione multilineare alternante e scriveremo $\alpha(v_1, v_2, \ldots, v_p) = v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p$. $\Lambda_k(V)$ si dice prodotto eterno di V o prodotto wedge. Di nuovo, gli elementi di $\Lambda_p(V)$ nell'immagine di α si dicono decomponibili; dalla costruzione di $\Lambda_p(V)$ è chiaro che gli elementi decomponibili formano un insieme di generatori.

Abbiamo di nuovo la stessa proprietà universale:

Proposizione 4.1.3 (Proprietà universale del prodotto esterno)**.** *Sia W uno spazio vettoriale reale e sia $f\colon V^p \to W$ un'applicazione multilineare alternante. Allora esiste un'unica applicazione lineare $\tilde{f}\colon \Lambda_p(V) \to W$ tale che $f = \tilde{f} \circ \alpha$. Inoltre la coppia $(\Lambda_p(V), \alpha)$ è l'unica con questa proprietà, a meno di isomorfismi opportuni.*

Ora, sarabbe naturale introdurre un' operazione $\wedge\colon \Lambda_p(V) \times \Lambda_q(V) \to \Lambda_{p+q}(V)$ tale che $(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_q) = v_1 \wedge \ldots v_p \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_q$; vorremmo anche che quest'operazione fosse bilineare ed associativa. Facciamo così: per ogni fissato $(w_1, w_2, \ldots, w_q) \in V^q$ consideriamo l'applicazione $f_{(w_1,\ldots,w_q)}\colon V^p \to \Lambda_{p+q}(V)$ data da $(v_1, v_2, \ldots, v_p) \mapsto v_1 \wedge \ldots v_p \wedge w_1 \wedge \ldots w_q$; è chiaro che quest'applicazione è alternante e quindi passa ad un applicazione lineare $\tilde{f}_{(w_1,\ldots,w_q)}\colon \Lambda_p(V) \to \Lambda_{p+q}(V)$. Perciò è ben definita l' applicazione $V^q \to \mathrm{Hom}(\Lambda_p(V), \Lambda_{p+q}(V))$ data da $(w_1, \ldots, w_q) \to \tilde{f}_{(w_1,\ldots,w_q)}$; di nuovo, si vede che quest'applicazione è alternante e quindi passa ad un'applicazione lineare $\Lambda_q(V) \to \mathrm{Hom}(L_p(V), \Lambda_{p+q}(V))$ che definisce il nostro agognato prodotto wedge o prodotto esterno:

$$\wedge\colon \Lambda_p(V) \times \Lambda_q(V) \to \Lambda_{p+q}(V) \qquad (v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p) \wedge (w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_q) = v_1 \wedge \ldots v_p \wedge w_1 \wedge \cdots \wedge w_q$$

e poi viene esteso per bilinearità.

Proposizione 4.1.4 (Proprietà del prodotto esterno)**.** *(1) Il prodotto wedge è bilineare.*

(2) Il prodotto wedge è associativo.

(3) Se $v \in \Lambda_p(V)$ e $w \in \Lambda_p(W)$ allora $v \wedge w = (-1)^{pq} w \wedge v$

Dimostrazione. La bilinearità segue dal discorso fatto prima, le altre due proprietà basta verificarle sugli elementi decomponibili e questo è molto facile. □

Lemma 4.1.1. *Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n.*

(1) $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p = 0$ se e solo se i vettori $v_1, \ldots, v_p$ sono linearmente dipendenti. In particolare $\Lambda_p(V) = (0)$ se $p > n$.

(2) se $T\colon V \to V$ è un'applicazione lineare, allora $Tv_1 \wedge Tv_2 \wedge \ldots Tv_n = (\det T)(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p)$.

(3) *supponiamo che* $v_1, v_2, \dots, v_p$ *siano linearmente indipendenti, così come i vettori* $w_1, w-2, \dots, w_p$*; allora* $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p = c(w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p)$ *per un certo* $c \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ *se e solo se* $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_p) = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_p)$.

Dimostrazione.

1. se i vettori $v_1, \dots, v_p$ sono dipendenti, allora è chiaro che $v_1 \wedge \dots \wedge v_p = 0$, perchè l'applicazione α è alternante. Viceversa, supponiamo che $v_1 \wedge \dots \wedge v_p = 0$: allora, fissata una base $\mathcal{B}$ di V, consideriamo l' applicazione $V^p \to \mathbb{R}$ che associa a $(u_1, \dots, u_p) \in V^p$ il determinante dell' i-esimo minore della matrice che ha come colonne i vettori coordinate di $u_1, \dots, u_p$ rispetto alla base $\mathcal{B}$: allora quest'applicazione è alternante e passa al prodotto wedge e quindi si annulla su $(v_1, \dots, v_p)$ per ogni minore; quindi i vettori sono linearmente dipendenti.

2. se $\det T = 0$ allora la tesi è verificata per il punto precedente. Se invece $\det T \neq 0$, se i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono dipendenti, abbiamo finito ancora per il punto precedente; infine se $\det T \neq 0$ e se $v_1, \dots, v_n$ è una base di V, basta scrivere T in coordinate rispetto a questa base, sviluppare per alternanza e vedere che viene proprio la classica formula del determinante con le permutazioni.

3. supponiamo che $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p = c(w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p)$: allora, per ogni $i = 1, \dots, p$ si ha che $v_i \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_p = \frac{1}{c}(v_i \wedge v_1 \wedge \dots v_p) = 0$ e quindi $v_i \in \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_p)$ per il punto 1. Quindi $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_p) \subseteq \mathrm{Span}(w_1, dots, w_p)$ ma visto che hanno la stessa dimensione coincidono. Viceversa, se $\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_p) = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_p) = W$, prendiamo un' applicazione lineare $T \colon W \to W$ tale che $v_i = Tw_i$: si ha che $v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_p = Tw_1 \wedge Tw_2 \wedge \dots \wedge Tw_p = (\det T)(w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_p)$ e $\det T \neq 0$, per l'indipendenza dei vettori.

□

Proposizione 4.1.5. *Sia* V *uno spazio vettoriale reale di dimensione finita* n *e sia* $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ *una sua base. Allora una base di* $\Lambda_p(V)$ *è data da* $(v_I |\ I$ *multiindice crescente in* $\{ 1, \dots, n \}^p$) *dove intendiamo* $v_I = v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$ *se* $I = (i_1, i_2, \dots, i_p)$*. Chiameremo questa base la base indotta da* $\mathcal{B}$*. In particolare,* $\Lambda_p(V)$ *ha dimensione* $\binom{n}{k}$*.*

Dimostrazione. E' facile vedere che i v_I con I multiindice crescente generano $\Lambda_p(V)$. Per vedere che sono indipendenti, osserviamo prima che nel caso $p = n$ è ovvio perchè c'è un solo multiindice crescente $(1, 2, \dots, n)$, mentre nel caso generale si moltiplica una combinazione lineare che si annulla per un opportuno prodotto wedge. □

Ora, sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Allora possiamo fare tutte le costruzioni precedenti con lo spazio vettoriale duale V^* Indichiamo allora con $\Lambda^p(V)$ lo spazio $\Lambda_p(V^*)$.

Proposizione 4.1.6. *Sia* V *uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Allora si ha che*

$$\Lambda^p(V) \cong (\Lambda_p(V))^* \cong \mathrm{Alt}(V^p, \mathbb{R})$$

e l'isomorfismo $\Lambda^p(V) \cong (\Lambda_p(V))^*$ *è indotto dalla dualità*

$$\Lambda^p(V) \times \Lambda_p(V) \to \mathbb{R} \qquad (\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p, v_1 \wedge \dots \wedge v_p) \mapsto \det(\omega_i(v_j))$$

(a volte si scriva anche $(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p)(v_1 \wedge \dots \wedge v_p) = \langle \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_p, v_1 \wedge \dots \wedge v_p \rangle$ *per sottolineare la simmetricità).*

4.1.2 Spazi vettoriali orientati

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n. Allora stabiliamo una relazione di equivalenza fra le basi di V così: due basi $(v_1, \dots, v_n)$ e $(w_1, \dots, w_n)$ sono equivalenti se e solo se la trasformazione lineare che porta una nell'altra ha determinante positivo. E' facile vedere che questa è una realzione di equivalenze e che vi sono solo due classi di equivalenza: un' orientazione su V è la scelta di una di queste due classi di equivalenza. Praticamente si sceglie una certa base $v_1, \dots, v_n$ come orientata positivamente o positiva e poi si dice che tutte le basi nella sua classe di equivalenza sono orientate positivamente e le altre sono orientate negativamente.

Osserviamo che scegliere una base equivale a scegliere un elemento non nullo di $\Lambda_n(V)$ e si vede anche che scegliere un'orientazione su V equivale a scegliere un elemento non nullo di $\Lambda_n(V)$, ad esempio $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_n$ e dichiarare un altro elemento w in $\Lambda_n(V)$ non nullo orientato positivamente se $w = cv$ con $c > 0$ ed orientato negativamente se $w = cv$ con $c < 0$. Cioè, tramite l'identificazione $\Lambda_n(V) \cong \mathbb{R}$, scegliere un' orientazione equivale a scegliere una componente connessa di $\Lambda_n(V) \backslash \{ 0 \}$.

Infine, passando al duale, vediamo che un'altra formulazione equivalente di orientazione di uno spazio è quella di scegliere un elemento non nullo $\omega \in \Lambda^n(V)$ e di dichiarare un elemento $v \in \Lambda_p(V)$ orientato positivamente se $\omega(v) = \langle \omega, v \rangle > 0$ ed orientato negativamente se $\omega(v) = \langle \omega, v \rangle < 0$.

Poi, supponiamo che $V, \tilde{V}$ siano spazi vettoriali reali della stessa dimensione finita e supponiamo che siano orientati. Allora, se $T \colon V \to V'$ è un isomorfismo, diciamo che T conserva l'orientazione se manda basi orientate positivamente in basi orientate positivamente e non conserva l'orientazione altrimenti. In particolare, se $V = V'$ e se l'orietazione è la stessa, allora T conserva l'orientazione se e solo se $\det T > 0$.

4.1.3 Spazi con prodotto scalare ed aggiunzione

Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di un prodotto scalare definito positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora possiamo stabilire un prodotto scalare anche su $\Lambda_p(V)$ in questo modo:

$$\langle v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, w_1 \wedge \cdots \wedge w_p \rangle = \det(\langle v_i, w_j \rangle)$$

cioè si definisce solo per gli elementi decomponibili, magari crescenti, e poi si estende per bilinearità. E' facile verificare che questo è effettivamente un prodotto scalare ed è anche facile verificare il seguente

Lemma 4.1.2. *Supponiamo che V sia uno spazio vettoriale reale di dimensione n dotato di un prodotto scalare definito positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora, se $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ è una base ortonormale di V, la base indotta su $\Lambda_p(V)$ è una base ortonormale.*

Dimostrazione. Esercizio. □

Allora, definiamo l'operazione di aggiunzione:

Proposizione 4.1.7 (Aggiunzione e sue proprietà)**.** *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n dotato di un prodotto scalare definito positivo $\langle \cdot, \cdot \rangle$; supponiamo anche che V sia orientato. Allora esiste un unico operatore lineare*

$$* \colon \Lambda_p(V) \to \Lambda_{n-p}(V)$$

tale che, per ogni base ortonormale $\mathcal{C} = (e_1, \dots, \varepsilon_n)$ (ed in particolare per ogni riordinamento di una data base) si abbia che

$$*(1) = \pm e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \qquad * (e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \pm 1 \qquad * (e_1 \wedge \cdots \wedge e_p) = \pm e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_n$$

dove si prende $'+'$ se la base $\mathcal{C}$ è orientata positivamente e $'-'$ altrimenti. Inoltre l'operatore di aggiunzione $*$ gode delle seguenti proprietà:

(1) $** \colon \Lambda_p(V) \to \Lambda_p(V)$, $** = (-1)^{p(n-p)}$. In particolare, $*$ è un isomorfismo.

(2) $*$ è un isometria, cioè, se $v, w \in \Lambda_p(V)$, allora $\langle *v, *w \rangle = \langle v, w \rangle$.

(3) se $v, w \in \Lambda_p(V)$ allora $\langle v, w \rangle = *(v \wedge *w) = *(w \wedge *v)$.

(4) se $v = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0$ allora $*v = v_{p+1} \wedge \cdots \wedge v_n$ con $\mathrm{Span}(v_{p+1}, \dots, v_n) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_p)^\perp$ e $v \wedge *v$ è orientato positivamente.

Dimostrazione. Intanto è chiaro che se un tale operatore esiste è unico. Vediamo che esiste davvero: sia $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ una base ortonormale orientata positivamente: allora definiamo

$$*(1) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \quad *(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1$$

e, se $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ è un multiindice crescente, definiamo

$$*(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = \varepsilon(\sigma) e_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$$

dove $\{ i_{p+1}, \dots, i_n \} = \{ 1, 2, \dots, n \} \setminus \{ i_1, \dots, i_p \}$, $i_{p+1} < \cdots < i_n$ e σ è la permutazione che trasforma $(i_1, \dots, i_n)$ in $(1, \dots, n)$; visto che abbiamo definito $*$ sugli elementi di una base, possiamo estenderlo per linearità. Vediamo intanto che $*$ gode delle proprietà $(1)-(2)-(3)$: basta verificarle sugli elementi della base ortonormale indotta da $\mathcal{C}$:

(1) $** (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}) = *(\varepsilon(\sigma)(e_{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e_{i_n})) = \varepsilon(sigma)\varepsilon(\tau)(e_{i_1} \wedge e_{i_p})$ dove σ è la permutazione che trasforma $(i_1, \dots, i_p, i_{p+1}, \dots, i_n)$ in $(1, \dots, n)$ e tau è la permutazione che trasforma $(i_{p+1}, \dots, i_n, i_1, \dots, i_p)$ in $(1, \dots, n)$. Allora è facile vedere che $\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) = (-1)^{p(n-p)}$.

(2) è facile verificare l'isometricità.

(3) è anche facile verificare questa proprietà.

Ora dimostriamo che $*$ gode della proprietà sulle basi ortonormali: sia $\tilde{\mathcal{C}} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ un' altra base ortonormale di V. Allora, supponiamo che $T\colon V \to V$ sia l'isomorfismo per cui $\tilde{e}_i = Te_i$: vediamo che

$$*(\tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_n) = *(Te_1 \wedge \cdots \wedge Te_n) = *((\det T)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)) = (\det T)$$

e quindi $*(\tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_n) = +1$ se la base $\mathcal{C}'$ è orientata positivamente e -1 se è orientata negativamente, che è proprio quello che volevamo. In modo analogo si verifica che $*(1) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \frac{1}{\det T} \tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_n$ che è quel che vogliamo. Ora, passiamo al caso di $*(\tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_p)$: dalle proprietà $(1)-(3)$, vediamo che, se $v \in \Lambda_p(V)$ e $w \in \Lambda_{n-p}(V)$, allora $\langle *v, w \rangle = *(w \wedge **v) = (-1)^{p(n-p)} *(w \wedge v) = *(v \wedge w)$, quindi, ricordando che la base indotta da $\mathcal{C}'$ su $\Lambda_{n-p}(V)$ è una base ortonormale, vediamo che

$$\langle *(\tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_p), \tilde{e}_{p+1} \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_n \rangle = *(\tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_n) = \pm 1$$

sempre a seconda che la base sia orientata positivamente o negativamente. Invece, se $I \neq (p+1, \dots, n)$ allora

$$\langle *(\tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_p), \tilde{e}_I \rangle = *\tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_p \wedge e_I = *0 = 0$$

e quindi $*(\tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_p) = \pm \tilde{e}_{p+1} \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_n$ a seconda se $\mathcal{C}'$ sia orientata positivamente o negativamente, che era proprio quello che volevamo verificare. Da ultimo, vediamo che vale la proprietà (4): □

4.2 Forme Differenziali in $\mathbb{R}^N$

Definizione 4.2 (Forma Differenziale)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Una p-forma differenziale su A di classe C^1 è un applicazione $\omega\colon A \to \Lambda^p(\mathbb{R}^N)$. L'insieme delle p-forme su A di classe C^1 si indica con $\Omega^p(A)$.

In coordinate rispetto alla base dx_I di $\Lambda^p(\mathbb{R}^N)$ data dai multiindici crescenti, una p-forma ω di classe C^1 si scrive:

$$\omega = \sum_{I \text{cresc}} \omega_I dx_I$$

dove $\omega_I\colon A \to \mathbb{R}$ sono funzioni di classe C^1. Vediamo che la forma ω è di classe C^k se e solo se le ω_I sono di classe C^k. In particolare, le 0-forme si identificano con le funzioni C^1 su A a valori in $\mathbb{R}$: allora, se $f\colon A \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1, il differenziale $df_q\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ è un applicazione lineare per ogni $q \in A$, quindi possiamo considerare df come una mappa $df\colon A \to \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^N)^* = \Lambda^1(\mathbb{R}^N)$ e quindi come una 1-forma. Scriviamola in coordinate: sappiamo che

$$df_q(v) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}|_q(v)e_1$$

e quindi

$$df = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Possiamo estendere questo procedimento alle p-forme in generale? La risposta è sì:

Definizione 4.3 (Differenziale Esterno)**.** Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Allora il differenziale esterno su A è l'operatore su $\Omega^p(A)$ definito da

$$d(\sum_{I \text{ cresc}} \omega_I dx_I) = \sum_{I \text{ cresc}} d\omega_I \wedge dx_I$$

dove $d\omega_I$ è il differenziale sulle funzioni reali.

Proposizione 4.2.1 (Proprietà del differenziale esterno)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto.*

(1) d è un operatore lineare.

(2) d coincide con il differenziale standard su $\Omega^0(A)$.

(3) $(d \circ d)(\omega) = 0$ se ω è una forma di classe C^2.

(4) $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta)$ se $\omega \in \Omega^p(A)$.

(5) d è locale: cioè se $U \subseteq A$ è un aperto e $\omega \in \Omega^p(A)$ si ha che $d(\omega|_U) = (d\omega)|_U$.

Dimostrazione.

1. E' abbastanza chiaro che d sia lineare.
2. E' anche facile vedere che d coincide col differenziale standard su $\Omega^0(A)$.
3. Intanto, vediamo che, se I non è un multiindice crescente, allora

   $$d(\omega_I dx_I) = d(\varepsilon(\sigma)(\omega_I dx_{I'})) = \varepsilon(\sigma)d(\omega_I dx_{I'}) = \varepsilon(\sigma)(d\omega_I \wedge dx_{I'}) = d\omega_I \wedge \varepsilon\sigma dx_{I'} = d\omega_I \wedge dx_I$$

   Quindi, supponiamo che ω sia una forma di classe C^2: per mostrare la tesi, possiamo limitarci a considerare il caso $\omega = \omega_I dx_I$:

   $$(d\circ d)(\omega_I dx_I) = d(d\omega_I \wedge dx_I) = d(\sum_{i=1}^N \frac{\partial \omega_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I) = \sum_{i=1}^N d(\frac{\partial \omega_I}{\partial x_i}) dx_i dx_I = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_I$$

   allora otteniamo la tesi dal lemma di Schwartz.
4. Di nuovo, ci basta verificare la tesi nel caso in cui $\omega = \omega_I dx_I \in \Omega^p(A)$ ed $\eta = \eta_J dx_J \in \Omega^q(A)$:

   $$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(\omega_I \eta_J dx_I \wedge dx_J) = d(\omega_I \eta_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = (d\omega_I \eta_J + \omega_I d\eta_J) \wedge dx_I \wedge dx_J = \\ &= \eta_J d\omega_I \wedge dx_I \wedge dx_J + \omega_I d\eta_J \wedge dx_I \wedge dx_J = d\omega \wedge \eta + (-1)^{pq} d\eta \wedge \omega = d\omega \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

5. la località dell'operatore segue subito dalla definizione

$\square$

Definizione 4.4 (Forme chiuse ed esatte)**.** Una forma $\omega \in \Omega^p(A)$ si dice chiusa se $d\omega = 0$, si dice esatta se esiste $\eta \in \Omega^{p-1}(A)$ tale che $\omega = d\eta$, in questo caso η si dice una primitiva di ω.

La proposizione precedente ci dice che se ω è una forma di classe C^1 esatta, allora è anche chiusa. Il viceversa non è vero in generale ma qualche volta sì:

Proposizione 4.2.2 (Lemma di Poincarè)**.** *Su $\mathbb{R}^N$, ogni forma chiusa di classe C^1 è esatta.*

Ora descriviamo l'effetto delle mappe differenziabili sulle forme:

Definizione 4.5 (Pullback di una forma)**.** Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $B \subseteq \mathbb{R}^M$ aperti e sia $f \colon A \to B$ di classe C^1. Allora, se $\omega \in \Omega^p(B)$ ed $\omega = \sum_{I \text{ cresc}} \omega_I dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p}$, definiamo il pullback di ω secondo f come la forma $f^\#(\omega) \in \Omega^p(A)$ data da:

$$f^\#(\omega) = \sum_{I \text{ cresc}} (\omega_I \circ f) d(f_{i_1}) \wedge \cdots \wedge d(f_{i_p})$$

dove $f_j = \pi_j \circ f$ è la j-esima componente di f. In particolare, se ω è una 0-forma, si ha che $f^\#(\omega) = \omega \circ f$

Proposizione 4.2.3 (Proprietà del pullback)**.** *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^N$,$B \subseteq \mathbb{R}^M$ aperti e sia $f \colon A \to B$ un'applicazine di classe C^1. Allora*

(1) $f^\#$ è lineare su $\Omega^p(B)$.

(2) $f^\#(\omega \wedge \eta) = f^\#(\omega) \wedge f^\#(\eta)$ per ogni $\omega \in \Omega^p(B), \eta \in \Omega^q(B)$.

(3) $f^\#(d\omega) = d(\omega \circ f)$ se $\omega \in \Omega^0(B)$.

(4) se f è di classe C^2, allora $f^\#(d\omega) = d(f^\#(omega))$ per ogni $\omega \in \Omega^p(B)$.

Dimostrazione. **MAGARI SCRIVERE MA NON E' NIENTE DI CHE**

□

4.3 Superfici regolari in $\mathbb{R}^N$

Definizione 4.6 (Superficie regolare)**.** Una superficie regolare di classe C^k di dimensione d in $\mathbb{R}^N$ è un sottospazio $M \subseteq \mathbb{R}^N$ per cui vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

(1) per ogni punto $p \in M$ esistono un intorno aperto $U \subseteq M$ di p, un aperto $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ ed un omeomorfismo $\mathbf{x} \colon \tilde{U} \to U$ di classe C^k tale che $d\mathbf{x}_q$ ha rango massimo r per ogni $q \in \tilde{U}$. La coppia $(U, \mathbf{x})$ si dice parametrizzazione locale di M.

(2) per ogni punto $p \in M$ esistono un intorno aperto $U \subseteq \mathbb{R}^N$ di p ed un applicazione $f \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-d}$ di classe C^k tale che $f^{-1}(0) = U \cap M$ e df_q ha rango massimo $N - d$ per ogni $q \in U$.

(3) per ogni punto $p \in M$ esistono un intorno aperto $U \subseteq M$ di p, un aperto $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d$, un aperto $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^{N-d}$ ed un applicazione $f \colon \tilde{U} \to \tilde{V}$ di classe C^k tale che U sia il grafico di f.

Si vede che le superfici regolari sono un caso particolare della nozione di varietà differenziabile:

Definizione 4.7 (Varietà differenziabile di dimensione d)**.** Una varietà differenziabile d-dimensionale di classe C^K è uno spazio topologico M di Hausdorff e a base numerabile dotato do un atlante massimale di carte C^k. Cioè, ogni punto $p \in M$ è contenuto in una carta (U, φ) che è il dato di un intorno aperto $U \subseteq M$ di p, di un aperto $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ di omomorfismo $\varphi \colon U \to \tilde{U}$, e queste carte sono compatibili a livello C^k, cioè, se (U, φ) e (V, ψ) sono due carte per cui $U \cap V \neq \emptyset$, allora le mappe $\varphi \circ \psi^{-1}$,$\psi \circ \varphi^{-1}$ sono di classe C^k.

In particolare, si vede che le superfici regolari in $\mathbb{R}^N$ sono varietà differenziabili in cui le carte sono date dalle inverse delle parametrizzazioni locali.

Definizione 4.8 (Superficie regolare con bordo)**.** Una superficie regolare con bordo di dimensione d e di classe C^k è un sottospazio $M \subseteq \mathbb{R}^N$ tale che per ogni punto $p \in M$ esistono un intorno aperto $U \subseteq M$ di p, un aperto $\tilde{U}$ in $H^d = \{ (x_1, x_2, \ldots, x_r) \mid x_r \geq 1 \}$ ed un omeomorfismo $\mathbf{x}\colon \tilde{U} \to U$ di classe C^k e tale che dx_p ha rango massimo d per ogni $p \in \tilde{U}$. Le coppie $(U, \mathbf{x})$ si chiamano ancora parametrizzazioni locali. Il bordo ∂M di M è l'insieme dei punti che sono nell'immagine di $\{ x_r = 0 \}$ per una qualche parametrizzazione locale e l'interno $\mathrm{Int}M$ di M è l'insieme dei punti che sono nell'immagine si $\{ x_r > 0 \}$ per una qualche parametrizzazione locale.

E'facile vedere che $M = \partial M \cup \mathrm{Int}M$, è vero anche che $\partial M \cap \mathrm{Int}M = \emptyset$ ma questo è più difficile da dimostrare e non lo faremo. Comunque, si vede che, restringendo le parametrizzazioni locali al bordo ed alla parte interna di H^d, il bordo ∂M è una superficie regolare senza bordo di dimensione $d - 1$, mentre $\mathrm{Int}M$ è una superficie regolare senza bordo di dimensione d.

Definizione 4.9 (Spazio tangente)**.** Sia M una superficie regolare con o senza bordo. Se $p \in M$, definiamo il piano tangente a M in p come l'immagine del differenziale $dx_{x^{-1}(p)}$ di una qualche parametrizzazione locale che contiene p. Il piano tangente ad M in p si indica con T_pM ed è un sottospazio di $\mathbb{R}^N$ di dimensione d.

4.3.1 Superfici regolari orientate

DA SCRIVERE LA COSA

4.4 Integrazione su superfici regolari

Prima definiamo l'integrazione di forme differenziali su aperti di $\mathbb{R}^d$: sia $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un aperto e sia $\omega = f(x_1, \ldots, x_d)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_d$ una d-forma su A a supporto compatto (cioè f ha supporto compatto). Allora definiamo l'integrale di ω su A come

$$\int_A \omega = \int_A f(x_1, \ldots, x_d)dx_1 dx_2 \ldots dx_d$$

4.4.1 Integrazione di forme differenziali su superfici regolari

Sia $M \subseteq \mathbb{R}^N$ una superficie regolare con bordo. Se $U \subseteq M$ è un aperto, una r-forma su U è la restrizione ad U di una r-forma definita in un aperto di $\mathbb{R}^N$ che contiene U Allora, prendiamo una superficie regolare orientata M di dimensione d ed una d-forma ω su M a supporto compatto (cosa che è automaticamente verificata se M è compatta):supponiamo che il supporto di ω sia completamente contenuto dentro una parametrizzazione locale $(U, \mathbf{x})$,: allora definiamo

$$\int_M \omega = \int_U \omega = \pm \int_{\mathbf{x}^{-1}(U)} \mathbf{x}^{\#}(\omega)$$

dove prendiamo $+$ se $\mathbf{x}$ mantiene l'orientazione e $-$ altrimenti.

Invece, nel caso generale, supponiamo che $\{ (U_i, \mathbf{x}_i) \mid i \in I \}$ sia un atlante orientato per M e sia $\{ \varphi_i \mid i \in I \}$ una partizione dell'unità associata. Allora, definiamo

$$\int_M \omega = \sum_{i \in I} \int_{U_i} \varphi_i \omega$$

Si vede che entrambe le definizioni sono ben poste, cioè che non dipendono dalla particolare parametrizzazione locale, nè dall'atlante orientato, nè dalla partizione dell'unità.

Il risultato più importante e più basilare dell'integrazione di forme su superfici regolari è il teorema di Stokes

Teorema 4.4.1 (Teorema di Stokes)**.** *Sia M una superficie regolare orientata di dimensione d e sia ∂M il suo bordo (eventualmente vuoto) con l'orientazione indotta. Allora, se ω è una $d-1$ forma su M a supporto compatto, si ha che*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

Dimostrazione. Si dimostra prima nel caso di cubi e poi nel caso generale con le partizioni dell'unità e parametrizzazioni locali cubiche. □

4.4.2 Integrazione e misura su superfici regolari riemanniane

NON HO VOGLIA DI SCRIVERLO, VEDI ACQUISTAPAOLO

Capitolo 5

Funzioni Armoniche

5.1 Definizioni e proprietà fondamentali

Definizione 5.1 (Funzioni Armoniche)**.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto. Allora una funzione $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ si dice armonica se $u \in C^2(\Omega)$ e se

$$\Delta u = 0$$

dove Δ è il Laplaciano, definito da

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + \cdots + u_{x_n x_n}$$

Diciamo poi che u è superarmonica se $u \in C^2(\Omega)$ e se $\Delta u \geq 0$, mentre diciamo che u è subarmonica se $\Delta u \leq 0$.

La proprietà che caratterizza le funzioni armoniche è la proprietà della media; dobbiamo però introdurre alcune notazioni: denotiamo con ω_N la misura $N-1$-dimensionale della sfera unitaria $S^{N-1} \subseteq \mathbb{R}^N$. Allora, notiamo che la misura $N-1$-dimensionale di una sfera di raggio r è data da $r^{N-1}\omega_N$ e che la misura di una palla N-dimensionale in $\mathbb{R}^N$ di raggio r è data da $\frac{r^N \omega_N}{N}$

Teorema 5.1.1 (Proprietà della media per le funzioni armoniche)**.** *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ armonica. Allora se $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$ si ha che*

$$u(x) = \frac{1}{r^{N-1}\omega_N} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma_y = \frac{N}{r^N \omega_N} \int_{B(x,r)} u(y) dy$$

Cioè , diciamo che u gode della proprietà della media su Ω. Viceversa, se $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ è di clesse C^2 e gode della proprietà della media in Ω, allora u è armonica su Ω.

Dimostrazione. Fissiamo $x \in \Omega$: allora, per ogni $r > 0$ tale che $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$, definiamo

$$\varphi(r) \colon = \frac{1}{r^{N-1}\omega_N} \int_{\partial B(x,r)} u(y) d\sigma_y = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(\mathbf{0},1)} u(x+ry) d\sigma_y$$

ora, derivando, troviamo che

$$\varphi'(r) = \frac{1}{\omega_N} \int_{\partial B(\mathbf{0},1)} \langle \nabla u(x+ry), y \rangle \, d\sigma_y = \text{ (Teorema della Divergenza) } =$$

$$= \frac{1}{\omega_N} \int_{B(\mathbf{0},1)} \Delta u(x+ry) dy = \frac{1}{r^{N-1}\omega_N} \int_{B(x,r)} \Delta u(y) dy$$

Perciò, se u è armonica, $\varphi'(r) = 0$, cioè $\varphi(r)$ è costante e quindi

$$\varphi(r) = \lim_{r \to 0^+} \varphi(r) = u(x)$$

ed inoltre

$$\frac{N}{r^N\omega_N}\int_{B(x,r)} u(y)dy = \frac{N}{r^N\omega_N}\int_0^r \left[\int_{\partial B(x,s)} u(y)d\sigma_y\right] ds = \frac{N}{r^N\omega_N}\int_0^r u(x)s^{N-1}\omega_N ds = u(x)$$

Viceversa, se $u \in C^2(\Omega)$ gode della proprietà della media, $\varphi(r)$ è costante e quindi $\varphi'(r) = 0$, ma allora, per continuità delle derivate seconde, deve essere che $\Delta u = 0$ e quindi la tesi è completamente dimostrata. □

Osservazione 5.1.1. Vediamo che adattando lievemente la dimostrazione precedente, si dimostra che se $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ è subarmonica allora per ogni $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$ si ha che

$$u(x) \leq \frac{1}{r^{N-1}\omega_N}\int_{\partial B(x,r)} u(y)d\sigma_y$$

mentre, se u è superarmonica, vale che

$$u(x) \geq \frac{1}{r^{N-1}\omega_N}\int_{\partial B(x,r)} u(y)d\sigma_y$$

Dalla proprietà della media discende subito il Principio del Massimo:

Teorema 5.1.2 (Principi del Massimo e Minimo)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e armonica su Ω . Allora:*

1. *(Principi del Massimo e Minimo Forte): se Ω è connesso e se esiste un punto $x_0 \in \Omega$ tale che*

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u \quad \textit{oppure} \quad u(x_0) = \min_{\overline{\Omega}}$$

allora u è costante su $\overline{\Omega}$.

2. *(Principi del Massimo e Minimo Debole): si ha che*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u \qquad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega}$$

Dimostrazione. 1. Dimostriamo il Principio del Massimo Forte: sia $m = u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, allora $A = u^{-1}(m) \cap \Omega$ è chiuso e non vuoto in Ω. Mostriamo che è anche aperto: si a $x \in A$, allora, per una palla $B(x,r)$ abbastanza piccola, si ha che

$$m = u(x) = \frac{N}{r^N\omega_{N-1}}\int_{B(x,r)} u(y)dy \leq \frac{N}{r^N\omega_{N-1}}\int_{B(x,r)} mdy = m$$

e quindi deve essere che u è costante su $B(x,r)$. Allora, poichè Ω è connesso, si ha che $u \equiv m$ su Ω e per continuità $u \equiv m$ su $\overline{\Omega}$. La dimostrazione del principio del Minimo Forte procede allo stesso modo.

2. Il Principio del Massimo Debole discende dal Principio del Massimo Forte applicato ad ogni componente connessa di Ω e lo stesso vale per il principio del Minimo Debole.

□

Osservazione 5.1.2. Con la stessa dimostrazione del Teorema precedente se dimostra che le funzioni subarmoniche godono dei Principi del Massimo e che quelle superarmoniche godono dei Principi del Minimo

Proposizione 5.1.1 (Stima a priori)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato e sia $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e di classe C^2 su Ω. Allora*

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \leq \max_{\partial\Omega} |u| + \frac{\operatorname{diam}^2(\Omega)}{2N} \sup_{\Omega} |\Delta u|$$

Dimostrazione. Se $\sup_\Omega |\Delta u| = +\infty$ abbiamo finito; altrimenti basta applicare il Principio del Massimo Debole alle funzioni $v_\pm \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definite da

$$v_\pm(x) = \max_{\partial\Omega} |u| + \frac{\operatorname{diam}^2(\Omega) - |x - x_0|^2}{2N} \pm u(x)$$

dove $x_0 \in \partial\Omega$ è un punto fissato. □

5.1.1 Funzioni armoniche e funzioni olomorfe

Ricordiamo che , se $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ è un aperto, una funzione $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ si dice olomorfa se è $\mathbb{C}$-differenziabile su Ω. Sappiamo che una funzione olomorfa è anche analitica (cioè si sviluppa localmente in serie di potenze) e quindi è inifinitamente differenziabile. Scrivendo f nella forma $f = u + iv$, con $u = \Re f$ e $v = \Im f$, vediamo che f è olomorfa se e solo se u, v sono $\mathbb{R}$-differenziabili (con l'identificazione canonica $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) e soddisfano le *Equazioni di Cauchy-Riemann*: $u_x = v_y$ $u_y = -v_x$.

Lemma 5.1.1. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto e sia $f = u + iv$ una funzione olomorfa su Ω. Allora u e v sono armoniche in Ω.*

Dimostrazione. Mostriamo che u è armonica: intanto sappiamo che u è di classe C^2 perchè f è analitica, e poi, per le equazioni di Cauchy-Riemann, troviamo che

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = D_x(u_x) + D_y(u_y) = D_x(v_y) + D_y(u_y) = D_x(v_y) - D_y(v_x) = v_{xy} - v_{yx} = 0$$

Allo steso modo si dimostra che v è armonica. □

E' naturale chiederci se vale l'inverso: cioè , è vero che se $u \cdot \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica, allora u è parte reale di una funzione olomofa su Ω ? Se Ω è abbastanza decente, questo è vero:

Proposizione 5.1.2. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un aperto semplicemente connesso. Allora ogni funzione armonica su Ω è parte reale o parte immaginaria di una funzione olomorfa su Ω.*

Dimostrazione. Sia u una funzione armonica su Ω. Allora la forma $-u_y dx + u_x dy$ è chiusa in Ω e se Ω è semplicemente connesso, è anche esatta, quindi esiste $v \colon \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy$. Ma allora $f = u + iv$ soddisfa le equazioni di Cauchy-Riemann ed è olomorfa. □

Capitolo 6

Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali

Vogliamo usare le tecniche dei paragrafi precedenti per risolvere alcune EDP famose:

6.1 L'equazione di Laplace

L'equazione differenziale $\Delta u = 0$ e' detta *equazione di Laplace* mentre l'equazione $\Delta u = f$ e' detta *equazione di Poisson*.

6.1.1 Il problema di Dirichlet

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato. Allora un problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson su Ω e' un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua e $\varphi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continua; una soluzione di questo sistema e' una funzione continua su $\overline{\Omega}$ e di classe C^2 su Ω che soddisfa le equazioni. Intanto, e' facile dimostrare che se una soluzione esiste e' unica:

Proposizione 6.1.1 (Unicita' della soluzione del problema di Dirichlet)**.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato in $\mathbb{R}^N$. Allora se esiste una soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \textit{su } \Omega \\ u = \varphi & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

questa soluzione e' unica.

Dimostrazione. Supponiamo che u, v siano due soluzioni del problema di Dirichlet: allora $w = u - v$ e' una soluzione del sistema

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{su } \Omega \\ w = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ma allora, per il Principio del Massimo/Minimo abbiamo che $\max_{\overline{\Omega}} w = \min_{\overline{\Omega}} w = 0$. □

Un' altra proprieta' che si dimostra facilmente e' la dipendenza dai dati iniziali:

Proposizione 6.1.2 (Dipendenza continua dai dati iniziali per il problema di Dirichlet)**.** *Supponiamo che u sia soluzione del problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \textit{su } \Omega \\ u = \varphi & \textit{su } \partial\Omega \end{cases}$$

e supponiamo che $\|f\|_\infty, \|\varphi\|_\infty < \varepsilon$. Allora $\|u\|_\infty < K\varepsilon$ per una certa costante K.

Dimostrazione. E' una conseguenza immediata della stima a priori 5.1.1 □

Ora arriviamo alla parte rognosa, che e' l'esistenza di una soluzione: salta fuori che una soluzione esiste per un sacco di aperti Ω ma noi la vediamo solo per la palla

Teorema 6.1.1 (Il problema di Dirichlet per la palla)**.** *Siano $B(\mathbf{0},r) \subseteq \mathbb{R}^N$ la palla centrata nell'origine di raggio r, $f\colon \overline{B(\mathbf{0},r)} \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 e $\varphi\colon \partial B(\mathbf{0},r) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora il problema di Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = f & su\ B(\mathbf{0},r) \\ u = \varphi & su\ \partial B(\mathbf{0},r) \end{cases}$$

ha come unica soluzione

$$u(x) = \frac{r^2 - |x|^2}{r\omega_{N-1}} \int_{\partial B(\mathbf{0},r)} \frac{\varphi(y)}{|x-y|^N} d\sigma_y - \int_{B(\mathbf{0},r)} G(x,y) f(y) dy \qquad \forall\, x \in B(\mathbf{0},r)$$

dove $G(x,y)$ e' la funzione di Green per la sfera.

Dimostrazione. **DA FARE LA DIMOSTRAZIONE NEL CASO N=2** □

SCRIVI IL PROBLEMA DI LAPLACE PER IL QUADRATO APERTO

6.1.2 Il problema di Neumann

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato con bordo decente. Allora un problema di Neumann per l'equazione di poisson su Ω e' un sistema di equazioni differenziali del tipo

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{su } \Omega \\ u_\nu = \psi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

dove u_ν indica la derivata di u rispetto alla direzione normale di $\partial\Omega$ e $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e $\psi\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ sono continue. Come prima, una soluzione di questo sistema e' una funzione continua $u\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ e di classe C^2 su Ω che risolve le equazioni.

Di nuovo, e' facile dimostrare la (quasi) unicita' della soluzione, ammesso che la soluzione esista:

Proposizione 6.1.3 (Quasi unicita' della soluzione del problema di Neumann)**.** *Sia $\omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto limitato con bordo decente. Allora se esiste una soluzione al problema di Neumann*

$$\begin{cases} \Delta u = f & su\ \Omega \\ u_\nu = \psi & su\ \partial\Omega \end{cases}$$

questa e' unica a meno di addizione per una costante.

Dimostrazione. Suppniamo che u, v siano due soluzioni del problema di Neumann: allora $w\colon = u - v$ e' soluzione del sistema

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{su } \Omega \\ w_\nu = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

CONCLUDERE LA DIMOSTRAZIONE CON LA FORMULA DI GREEN □

SCRIVI LA CONDIZIONE DI COMPATIBILITA'

6.2 L'equazione del calore

L'equazione del calore è l'equazione differenziale $u_t = \alpha^2 \Delta u$.

6.2.1 Il problema di Cauchy-Dirichlet

Per semplicità, consideriamo sistemi con una dimensione spaziale (ad esempio la distribuzione di temperatura su una sbarretta di metallo). Come nel caso dell'equazione di Laplace, nel problema di Dirichlet aggiungiamo condizioni ai bordi sulla funzione u. Vediamo un esempio:

Esempio 6.2.1. Analizziamo il seguente problema di Cauchy-Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & \text{per } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{per } t \in [0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{per } x \in [0,\pi] \end{cases}$$

dove $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ è una funzione C^1 e tale che $f(0) = f(\pi) = 0$. Una soluzione di questo sistema è una funzione $u\colon [0,\pi] \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ continua e tale che u_t, u_{xx} siano continue in $(0,\pi) \times (0,+\infty)$, quidni facciamo i bulli e chiediamo direttamente che u sia di classe C^2 (osserviamo che l'ipotesi $f(0) = f(\pi) = 0$ è richiesta per la compatibilità del sistema, non è una scelta a caso).

Ora,supponiamo che u sia una soluzione del sistema: allora, per ogni fissato $t \leq 0$, per la seconda equazione, possiamo estendere u in modo dispari ad una funzione continua su $[-\pi,\pi]$ e C^2 su $(-\pi,\pi)$ e quindi, prolungandola, possiamo estenderla ulteriormente ad una funzione 2π-periodica e di classe C^2 su tutto $\mathbb{R}$. Allora, la serie di Fourier di u converge uniformemente ad u: cioè

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t)\cos(nt) + b_n(t)\sin(nt)$$

dove $a_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x,t)\cos(nx) = 0$ per disparità, e quindi

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(t)\sin(nx)$$

Ora, poichè u è di classe C^2, vediamo che le serie di Fourier di u_t e $\alpha^2 u_{xx}$ sono date rispettivamente da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n'(t)\sin(nx) \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-\alpha^2 n^2) b_n(t)\sin(nx)$$

e quindi deve essere che $b_n'(t) = -\alpha^2 n^2 b_n(t)$, cioè, $b_n(t) = C_n e^{-\alpha^2 n^2 t}$. Per, concludere, vediamo che possiamo estendere f ad una funzione 2π-periodica di classe C^1 e dispari su $[-\pi,\pi]$ proprio come abbiamo fatto con u: e così troviamo che la serie di fourier di f converge uniformemente ad f e l'ultima equazione ci da che:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \sin(nx) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(f)\sin(nx)$$

e quindi $b_n(t) = b_n(f)e^{-\alpha^2 n^2 t}$. Per concludere, abbiamo trovato che, se una soluzione esiste, allora essa è

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) e^{-\alpha^2 n^2 t}\sin(nx)$$

dove i $b_n(f)$ sono i coefficienti dell'estensione dispari di f a $[-\pi,\pi]$ nel suo sviluppo in serie di Fourier, cioè $b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$. Ma allora basta verificare che questa funzione è effettivamente una soluzione e questo segue dalla presenza dell'esponenziale negativo, che ci dice che u è di classe C^∞ su $(0,\pi) \times (0,+\infty)$ e che le derivate di u si ottengono derivando la serie termine a termine.

Quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet che stiamo considerando è

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) e^{-\alpha^2 n^2 t}\sin(nx)$$

6.2.2 Il problema di Cauchy-Neumann

Rimaniamo sempre in una dimensione spaziale: il problema di Cauchy-Neumann si verifica quando si impongono le condizioni al bordo non su u ma sulla derivata u_x. Facciamo un esempio:

Esempio 6.2.2. Vogliamo studiare il problema di Cauchy-Neumann:

$$\begin{cases} u_t = \alpha^2 u_{xx} & \text{per } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty) \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & \text{per } t \in [0,+\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{per } x \in [0,\pi] \end{cases}$$

dove $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 assegnata. Di nuovo,vogliamo una soluzione che sia continua su $[0,\pi] \times [0,+\infty)$ e C^2 su $(0,\pi) \times (0,+\infty)$.

Possiamo ragionare come prima, estendendo le funzioni in modo pari invece che in modo dispari, ma questa volta poroviamo con il metodo di separazione delle variabili: cioè cerchiamo una soluzione della forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, possibilmente non nulla a tappeto, sennò risolve solo il caso in cui $f \equiv 0$. Imponiamo le condizioni: dalla prima troviamo che $X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t)$ e dalla seconda $X'(0)T(t) = X'(\pi)T(t) = 0$, quindi cerchiamo X, T tali che

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} \quad \text{e} \quad X'(0) = X'(\pi) = 0$$

la prima equazione, ci dice che $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)}$ non dipende nè da x, nè da t, quindi è una costante $\lambda \in \mathbb{R}$: quindi $X''(x) = \lambda X(x)$ e $T'(t) = \lambda T(t)$. Vediamo i vari casi:

- $\lambda = 0$: allora $X(x) = Ax + B$ e $X'(x) = a = 0$ perchè $X'(0) = 0$. Ma questa soluzione non è interessante perchè allora $f(x)$ dovrebbe essere costante.

- $\lambda > 0$: allora $X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$ ed imponendo che $X'(0) = X'(\pi) = 0$ troviamo che $A = B = 0$, quindi anche questo caso non ci piace.

- $\lambda < 0$: allora $X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$ e $X'(x) = -A\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda}x)$; quindi imponendo che $X'(0) = X'(\pi) = 0$ troviamo $B = 0$ e $\lambda = -n^2$ per un certo $n \in \mathbb{N}$; e tornando a t abbiamo $T'(t) = -\alpha^2 n^2 T(t)$, cioè $T(t) = C_n e^{-\alpha^2 n^2 t}$ per un certo $C_n \in R$. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, abbiamo una soluzione delle prime due equazioni $u_n(x,t) = A_n C_n e^{-\alpha^2 n^2 t}\cos(nx) = a_n e^{-\alpha^2 n^2 t}\cos(nx)$. E' chiaro che in generale non si avrà che $u_n(x,0) = a_n\cos(nx) = f(x)$, tuttavia, visto che le prime due equazioni sono lineari, possiamo provare, almeno formalmente, a cercare una soluzione del tipo

  $$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-\alpha^2 n^2 t}\cos(nx) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\alpha^2 n^2 t}\cos(nx)$$

  ora, imponendo la terza condizione, vediamo che è soddisfatta se

  $$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n\cos(nx) = f(x)$$

  cioè se e solo se $a_n = a_n(f)$ dove gli $a_n(f)$ sono i coefficienti di Fourier dell'estensione pari di f a tutto l'intervallo $[-\pi,\pi]$.

Quindi abbiamo un'aspirante soluzione

$$u(x,t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) e^{-\alpha^2 n^2 t}\cos(nx)$$

ma è facile vedere che questa è proprio una soluzione grazie all'esponenziale negativa. Sarà anche l'unica soluzione? Ragioniamo in questo modo: se v è un'altra soluzione del sistema, allora $w\colon u-v$ risolve il problema

$$\begin{cases} w_t = \alpha^2 w_{xx} & \text{per } (x,t) \in (0,\pi)\times(0,+\infty) \\ w_x(0,t) = w_x(\pi,t) = 0 & \text{per } t \in [0,+\infty) \\ w(x,0) = 0 & \text{per } x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Allora, moltiplicando la prima equazione per w e integrando rispetto ad x troviamo che

$$\int_0^\pi w(x,t)w_t(x,t)dx = \alpha^2 \int_0^\pi w(x,t)w_{xx}(x,t)dx$$

e

$$\int_0^\pi w(x,t)w_t(x,t)dx = \int_0^\pi \frac{1}{2}D_t(w^2(x,t))dx = \frac{1}{2}D_t \int_0^\pi w^2(x,t)dx$$

mentre

$$\alpha^2 \int_0^\pi w(x,t)w_{xx}(x,t)dx = \alpha^2 \left[w(x,t)w_x(x,t)\right]_0^\pi - \alpha^2 \int_0^\pi w_x^2(x,t)dx = -\alpha^2 \int_0^\pi w_x^2(x,t)dx \le 0$$

perciò

$$D_t \int_0^\pi w^2(x,t)dx \le 0$$

cioè la funzione $t \mapsto \int_0^\pi w^2(x,t)dx \le 0$ è decrescente su $(0,+\infty)$, ma poichè è anche non negativa e $\int_0^\pi w^2(x,0)dx = 0$ dev'essere identicamente nulla per continuità, e quindi $w(x,t) = 0$ su $(0,\pi)\times(0,+\infty)$ e sempre per continuità $w \equiv 0$.

6.2.3 L'equazione del calore in $\mathbb{R}^N$

Consideriamo l'equazione del calore in $\mathbb{R}^N$:

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t)$$

dove Δ è il Laplaciano in $\mathbb{R}^N$, con $\Delta u(x,t) = u_{x_1x_1}(x,t) + u_{x_2x_2}(x,t) + \cdots + u_{x_nx_n}(x,t)$. Allora cerchiamo una soluzione formale dell'equazione con la trasformata di Fourier in $\mathbb{R}^N$: intanto vediamo che la trasformata di Fourier commuta con la derivazione rispetto a t (per la derivazione sotto segno di integrale) e poi $\mathcal{F}(u_{x_ix_i})(\xi,t) = -\xi_i^2\mathcal{F}(u)(\xi,t)$: perciò l'equazione diventa

$$\widehat{u}_t(\xi,t) = -\left|\xi\right|^2 \hat{u}(\xi,t)$$

che è un'equazione differenziale tra funzioni di variabile t: risolvendola, otteniamo che

$$\widehat{u}(\xi,t) = c(\xi)e^{-|\xi|^2 t}$$

utilizzando la formula di inversione, è facile vedere che

$$e^{-|\xi|^2 t} = \mathcal{F}\left(\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\right)(\xi)$$

e, se scriviamo $c(\xi) = \mathcal{F}(\gamma)(\xi)$, abbiamo che

$$\widehat{u}(\xi,t) = \mathcal{F}(\gamma)(\xi)\mathcal{F}\left(\frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\right)(\xi) = \mathcal{F}\left(\gamma \star \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\right)(\xi)$$

e finalmente, usando la formula di inversione, troviamo che

$$u(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^N}\widehat{\widehat{u}}(-x,t) = \left(\gamma \star \frac{e^{-\frac{|y|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\right)(x)$$

Con queste premesse definiamo il nucleo del calore in $\mathbb{R}^N$:

Definizione 6.1 (Nucleo del calore)**.** Il nucleo del calore in $\mathbb{R}^N$ è definito da

$$K(x,t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty)$$

Teorema 6.2.1 (Soluzione Fondamentale dell'equazione del calore in $\mathbb{R}^N$)**.** *Sia $\gamma\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ continua e tale che $x \mapsto e^{-a|x|}\gamma(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$ per qualche $a > 0$. Allora la funzione $(\gamma \star K)(x,t)$ risolve il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = \gamma(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

dove la seconda uguaglianza va intesa come $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \gamma(x)$.

Dimostrazione. **SCRIVERE LA DIMOSTRAZIONE** □

6.3 L'equazione delle onde

L'equazione delle onde o equazione di d'Alembert e' l'equazione differenziale $u_t t = c^2 \Delta u$.

Come prima, ci restingiami al caso unidimensionale (una corda vibrante):

Proposizione 6.3.1. *Tutte e sole le soluzioni dell'equazione delle onde unidimensionale*

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad \text{per } (x,t) \in (a,b) \times (0,+\infty)$$

sono le funzioni del tipo

$$u(x,t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct)$$

con α funzione C^2 su $(-\infty, b)$ e β funzione C^2 su $(a,+\infty)$.

Dimostrazione. consideriamo le variabili $\xi = x + ct$ e $\eta = x - ct$: allora

$$\begin{aligned} D_x &= (D_x\xi)D_\xi + (D_x\eta)D_\eta = D_\xi + D_\eta \\ D_t &= (D_t\xi)D_\xi + (D_t\eta)D_\eta = c(D_\xi - D_\eta) \end{aligned}$$

e percio'

$$\begin{aligned} D_{xx} &= D_{\xi\xi} + D_{\eta\eta} + 2D_{\xi\eta} \\ D_{tt} &= c^2(D_{\xi\xi} + D_{\eta\eta} - 2D_{\xi\eta}) \end{aligned}$$

e l'equazione delle onde in queste variabili diventa

$$4u_{\xi\eta} = 0$$

e da qui si ottiene la tesi, integrando e cambiando di nuovo le variabili. □

SCRIVERE PROBLEMI DI CAUCHY-DIRICHLET E CAUCHY-NEUMANN