Esercizi Analisi 1

Ottobre 2019

1 Sup e Inf

Esercizio 1.1. Determinare sup e inf dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, specificando se si tratta anche di massimo/minimo:

- $\mathbb{N}$
- $\mathbb{R}$
- $\{0\}$
- $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x^2 < 4\}$
- $R = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N},\ n \geq 1\}$
- $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$
- $T = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$
- $U = \{x \in \mathbb{R} \mid x|x| < x^2\}$
- $V = \left\{\frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

Esercizio 1.2. Siano A e B sottoinsiemi qualsiasi di $\mathbb{R}$. Dimostrare la seguente affermazione: $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A),\ \sup(B)\}$. Possiamo concludere che l'insieme $A \cup B$ ammette sempre un massimo?

Esercizio 1.3. Dati A e B sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}$, definiamo $A+B := \{c \mid c = a+b\ a \in A,\ b \in B\}$ e $A \cdot B := \{c \mid c = ab\ a \in A,\ b \in B\}$. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni (dando un senso alle operazioni nel caso in cui uno dei valori sia $\pm\infty$):

- $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$;
- $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$;
- $\sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

Se uno tra A e B è illimitato, cosa possiamo salvare delle precedenti affermazioni? E cosa possiamo dire su sup e inf del prodotto in questo caso?

Esercizio 1.4. Sia $A \subset \mathbb{R}$. Definiamo $-A = \{-x \mid x \in A\}$.

- Dimostrare che A è superiormente limitato se e solo se $-A$ è inferiormente limitato.
- Dimostrare che $\sup(A) = -\inf(-A)$ e $\inf(A) = -\sup(-A)$.
- Dimostrare che A ha massimo se e solo $-A$ ha minimo e in tal caso $\max(A) = -\min(-A)$.

Esercizio 1.5. Sia $r \in \mathbb{R}$ un numero reale. Dimostrare che $sup(\{x \in \mathbb{Q} \mid x < r\}) = r$; ripensare dunque alla costruzione dei numeri reali con le sezioni di Dedekind alla luce di questo fatto.

2 Funzioni

Esercizio 2.1. Dire se le seguenti sono funzioni. Se lo sono, specificare se sono iniettive e/o surgettive e determinare la loro immagine.

1. $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad a(x) = \tan x.$
2. $b : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}; \quad b(x) = \tan x.$
3. $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}; \quad c(x) = \tan x.$
4. $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad d(x) = \tan x.$
5. $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad e(x) = \arctan x.$
6. $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \left[0, \frac{\pi}{2}\right); \quad f(x) = \arctan x.$
7. $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \left(0, \frac{\pi}{2}\right]; \quad g(x) = \arctan x.$
8. $h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \quad h(x) = \arctan x.$
9. $i : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}; \quad i(x) = \sin x.$
10. $l : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]; \quad l(x) = \cos x.$
11. $m : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to [-1, 1]; \quad m(x) = \sin x.$
12. $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}; \quad n(x) = e^{x^2}.$
13. $o : \mathbb{R} \to [1, +\infty); \quad o(x) = e^{x^2}.$
14. $p : \mathbb{R}_{>0} \to [1, +\infty); \quad p(x) = e^{x^2}.$
15. $q : \mathbb{R}_{\geq 0} \to [1, +\infty); \quad q(x) = e^{x^2}.$
16. $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad r(x) = \log(x + 1).$
17. $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad s(x) = \log(|x + 1|).$
18. $t : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}; \quad s(x) = \log(x + 1).$
19. $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}; \quad u(x) = e^{x^3 - x}.$
20. $v : [-1, 1] \to [0, \frac{\pi}{2}]; \quad v(x) = \arcsin x^2.$
21. $z : [-1, 1] \to [0, \pi]; \quad z(x) = \arccos(-x^2).$

Esercizio 2.2. Dimostrare che una funzione $f : A \to B$ è invertibile se e solo se è bigettiva.

Esercizio 2.3. Siano $f : A \to B$, $g : B \to C$. Dimostrare i seguenti fatti:

- Se f e g sono iniettive allora $g \circ f$ è iniettiva.
- Se f e g sono surgettive allora $g \circ f$ è surgettiva.
- Se f e g sono invertibili allora $g \circ f$ è invertibile. Dire qual è l'inversa.
- Se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva.
- Se $g \circ f$ è surgettiva allora g è surgettiva.

Esercizio 2.4. Siano A, B due insiemi e sia $f : A \to B$. Supponiamo che esista $g : B \to A$ tale che $f(g(b)) = b$ per ogni $b \in B$ e che esista $h : B \to A$ tale che $h(f(a)) = a$ per ogni $a \in A$. Possiamo dire che f è invertibile?

Esercizio 2.5. Cosa si può dire della composizione di funzioni strettamente monotone? (Ci sono quattro casi).
E di funzioni debolmente monotone?

Esercizio 2.6. Dimostrare che

- $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ per ogni $x \in [-1, 1]$.
- $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$

3 Parte interna, frontiera e chiusura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ con metrica euclidea

Esercizio 3.1. Determinare parte interna, frontiera e chiusura dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{R}$
- $\mathbb{Q}$
- $\{0\} \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right]$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x|^3 < 8\}$

Esercizio 3.2. Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Dimostrare che la frontiera di A e la chiusura di A sono sottoinsiemi chiusi di $\mathbb{R}$, e che la parte interna di A è un aperto di $\mathbb{R}$.

Esercizio 3.3. Siano x, y numeri reali tali che $x \neq y$. Dimostrare che esistono due aperti A e B di $\mathbb{R}$ con le seguenti proprietà:

- $x \in A$;
- $y \in B$;
- $A \cap B = \emptyset$.

Capire come si adatta la dimostrazione se x e y vivono in $\mathbb{R}^n$.
(Nota: uno spazio topologico X tale per cui per ogni $x, y \in X$ distinti esistono A e B con le proprietà enunciate nell'esercizio viene detto *Hausdorff* o *T2*.)

Esercizio 3.4. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dimostrare che X è di Hausdorff.

Esercizio 3.5. ( ) Dimostrare che è possibile trovare una successione A_n di sottoinsiemi chiusi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $A_{n+1} \subset A_n$, ma $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$. Dimostrare che se in più chiedo che gli A_n siano tutti limitati (ossia, compatti) allora non esiste una tale successione.

4 Induzione

Esercizio 4.1. Dimostrare che per $x \neq 1$

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Esercizio 4.2. Dimostrare le seguenti uguaglianze:

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
- $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k - b_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k\right)$.

Esercizio 4.3. Provare che per ogni $x > -1$ si ha che

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad \textit{(Disuguaglianza di Bernoulli)}$$

Cosa si può dire per $x \leq -1$?

5 Successioni e limiti

Esercizio 5.1. Calcolare (se esistono) i limiti (intesi sempre per $n \to \infty$) delle seguenti successioni:

- $\frac{\sin(n)}{n}$
- $n^2 \sin(\frac{\pi n}{2})$
- $\frac{\arctan(n!)}{\sqrt{n}}$
- $\sqrt[n]{2}$
- $\sqrt[n]{n}$
- $\frac{7^n}{n}$
- $\frac{3^n}{n!}$
- $\binom{3n}{n}$
- $\sqrt[n]{n!}$
- $\frac{n^n}{n!}$
- $\frac{5^n+(-2)^n}{4^n+(-3)^n}$

Esercizio 5.2.

- Sia $a_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k^2}$; calcolare $\lim_{n\to\infty} a_n$.
- Sia $b_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$; calcolare $\lim_{n\to\infty} b_n$.

Esercizio 5.3. Sia a_n una successione; dimostrare che:

- se $a_n \to 0$, allora $|a_n| \to 0$;
- se $|a_n| \to 0$, allora $a_n \to 0$;
- se $a_n \to l \in \mathbb{R}$, allora $|a_n| \to |l|$.

Se invece abbiamo che $|a_n| \to l \in \mathbb{R}$, possiamo affermare qualcosa sul limite di a_n?

Esercizio 5.4. Enunciare e dimostrare i teoremi algebrici di somma, prodotto e quoziente per successioni (in analogia con quelli visti a lezione per i limiti di funzioni).

Esercizio 5.5. Fornire un esempio di successioni a_n e b_n tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ e:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = l \neq 0, \quad l \in \mathbb{R}$;
2. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$;
3. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = +\infty$;
4. $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n$ non esiste.

Esercizio 5.6. Fornire un esempio di successioni a_n e b_n tali che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$ e:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = l \in \mathbb{R}$;
2. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$;
3. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = -\infty$;
4. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n$ non esiste.

6 Funzioni continue

Esercizio 6.1. Sia $f : [a, b] \to [a, b]$ una funzione continua. Dimostrare che esiste almeno un $x^* \in [a, b]$ tale per cui $f(x^*) = x^*$. (Un punto con tale proprietà si dice *punto fisso.*)

Esercizio 6.2. Sapendo che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan(x)}{x} = 1$, dire per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la funzione $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \in (-1, 0) \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ |x|^b \arctan(x) & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases}$$

è continua.

Esercizio 6.3. (Occhio, può servire Taylor!) Calcolare i seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\sin^2(x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1-x^2)+x^2}{\cos(x^2)-1}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)-x^2}{5x^4}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} ((1 + \frac{1}{x})^x - e)x$

Esercizio 6.4. Sia $f : [a, b] \to [a, b]$ una funzione continua. Sia $x_1 \in [a, b]$ e definiamo la seguente successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per ricorrenza:

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \geq 1$$

- Dimostrare che se f è crescente allora la successione è monotona. Dire che ammette limite l e dimostrare che l è un punto fisso, ovvero dire che

$$f(l) = l.$$

- Dimostrare che se f è decrescente allora le due sottosuccessioni $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sono monotone e convergenti.

Esercizio 6.5. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione crescente. Dimostrare che se f prende tutti i valori fra $f(a)$ e $f(b)$ allora f è continua. Trovare un controesempio nel caso in cui f non è crescente.

Esercizio 6.6. Dimostrare o confutare (esibendo un controesempio) le seguenti affermazioni:

- se f e g sono continue (in A), allora $f + g$ è continua (in A);
- se f e g sono continue, allora $f \cdot g$ è continua;
- se f e g sono continue e limitate, allora $f \cdot g$ è continua;
- se f è continua in A ed in B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, allora f è continua in $A \cup B$.

7 Serie

Esercizio 7.1. Determinare per quali valori del parametro reale positivo α la seguente serie converge

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log^{\alpha}(n)}.$$

Esercizio 7.2. Occhio a quelle a segno alterno, può servire Leibniz!
Stabilire se le seguenti serie convergono, divergono o sono indeterminate:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{\mathrm{e}^n}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(\pi n)$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sinh(n)}{\sinh(n^2)}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{4n+1}{7n+5})^n$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{7^n+n^7}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\sin(n)}{n+\sqrt{n}}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2}$
- $\sum_{n=2}^{+\infty} \log(\frac{n}{n+1)})$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n!)}{n^2}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \log(1+\mathrm{e}^{-n^2})$
- ( ) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{4n+3}-\sqrt{4n+1}}{\sqrt{4n^3+3}+\sqrt{4n^3+1}}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{n}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \arctan(\frac{1}{(\sqrt{n}})$

Esercizio 7.3. Stabilire per quali valori del parametro reale $\alpha > 0$ le seguenti serie convergono:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{56}+9^n+5}{n+2016\alpha+\alpha^n}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(\alpha^n)}{n^\alpha}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n^\alpha}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(1+n^7+19^n)}{\alpha^n}$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^\alpha}{\sinh n^2}$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^\alpha$

Esercizio 7.4 (Teorema dei carabinieri per serie)**.** Siano a_n, b_n e c_n successioni di numeri reali tali che definitivamente $a_n \leq b_n \leq c_n$; supponiamo inoltre che $\sum a_n$ e $\sum c_n$ convergano. Dimostrare che $\sum b_n$ converge.

Esercizio 7.5 ( )**.** Sia a_n una successione di numeri reali positivi tale che $\sum a_n$ converge; è vero allora che esiste una costante $c > 0$ tale che definitivamente $a_n \leq \frac{c}{n}$?

8 Uniforme Continuità

Esercizio 8.1. Dimostrare che le funzioni Lipschitziane sono uniformemente continue.

Esercizio 8.2 (Lemma di riincollamento)**.** Sia $a \geq 0$, $b > a$ e $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che:

(i) f sia uniformemente continua in $[a, b]$;

(ii) f sia uniformemente continua in $[b, +\infty)$;

dimostrare che f è uniformemente continua in $[a, +\infty)$.

Esercizio 8.3. Sia $a \geq 0$ e sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Dimostrare che f è uniformemente continua in $[a, +\infty)$.

Esercizio 8.4. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Dimostrare che f è *sublineare*, ossia che esistono $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$|f(x)| \leq Ax + B \qquad \forall x \in [0, +\infty).$$

Esercizio 8.5. Dimostrare o confutare (esibendo un controesempio) le seguenti affermazioni:

- se f e g sono uniformemente continue (in A), allora $f + g$ è uniformemente continua (in A);
- se f e g sono uniformemente continue, allora $f \cdot g$ è uniformemente continua;
- se f e g sono uniformemente continue e limitate, allora $f \cdot g$ è uniformemente continua;
- se f è uniformemente continua in A ed in B sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, allora f è uniformemente continua in $A \cup B$.

Esercizio 8.6. Trovare una $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uniformemente continua su tutti i compatti di $[0, +\infty)$ ma non uniformemente continua in $[0, +\infty)$. Esiste una f che soddisfi queste richieste e che inoltre sia limitata?

9 Derivata, problemi di massimo e minimo

Esercizio 9.1. Calcolare usando la definizione e i limiti notevoli le seguenti derivate:

- $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
- $g(x) = \sin(x)$
- $h(x) = \tan(x)$
- $k(x) = \frac{1}{xe^x}$

Esercizio 9.2. Ricordiamo:

Teorema (Rolle)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b), tale che $f(a) = f(b)$, allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.*

Teorema (Lagrange)**.** *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b), allora esiste $c \in (a,b)$ tale che $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$.*

1. Usando il Teorema di Rolle dimostrare il Teorema di Lagrange.
2. Trovare una funzione che soddisfi le ipotesi del Teorema di Lagrange per cui un tale c non è unico.
3. Trovare una funzione che abbia infiniti punti con la proprietà di c (ma non tutti i punti in (a,b)).
4. Se la funzione è strettamente convessa e ammette derivata seconda posso dire qualcosa in più?

Esercizio 9.3. Determinare fra tutti i rettangoli con area A fissata quello con diagonale minima.

Esercizio 9.4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

Dire se f è ben definita e in tal caso dire se è continua e derivabile.

Esercizio 9.5. Dimostrare che

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$$