Simulazione primo compitino

17 gennaio 2020

- Questa è solo un'esercitazione: ragiona con calma e, se ti va, consegnaci quello che hai scritto, così sarà più facile imparare da eventuali errori!
- Scrivi sui fogli che consegnerai il tuo nome.
- Cerca di scrivere le soluzioni nella maniera più formale possibile, come se fossi al vero compitino!
- Ci sono domande anche sul retro del foglio!

1. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false e giustificare la risposta, fornendo una dimostrazione nel caso siano vere o esibendo un controesempio nel caso siano false.
   (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e limitata allora è uniformemente continua.
   (b) Sia $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continua e sia x_n una successione positiva tale che $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$; supponiamo che
   $$\sum_{n=1}^{+\infty} f(x_n) < +\infty.$$
   Allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   (c) Siano $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continue e derivabili; supponiamo che $f(0) \geq g(0)$ e $f'(x) > g'(x)$ per ogni $x \in [0, +\infty)$. Allora $f(x) > g(x)$ per ogni $x \in (0, +\infty)$.

2. Calcolare per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge:
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(2020 - \beta \cdot e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right) \left(\sin^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) \arctan^{\beta}(n!).$$

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$
   (a) Determinare se esistono dei $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione $f(x) = \lambda$ non ha soluzioni.

(b) Determinare se esistono *necessariamente* dei $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui l'equazione $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione, e in caso negativo esibire un controesempio.

(c) Dimostrare che, definito A come l'insieme

$$A = \{\lambda \in \mathbb{R} | f(x) = \lambda \text{ ha soluzione unica}\},$$

vale la disuguaglianza $|A| \leq 1$.