Lezione 10

Maria Stella Gelli

30 ottobre 2009

Operatori autoaggiunti

Definizione 1. Dato $(V, < \cdot, \cdot >)$ spazio vettoriale dotato di prodotto scalare, sia $T : W \subset V \to V$ operatore autoaggiunto dal sottospazio W in V $< Tv, w >=< v, Tw > \forall u, v \in W$

Esempio 1. $Tu = u''$ definito da $C^2 \cap X \to X$ è lineare autoaggiunto. Inoltre gli autovalori (e le autofunzioni) sono dati da:

$$u'' = \lambda u \quad u \in C^2 \cap X$$

e una base di autovettori è $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
Analogamente $\tilde{T} : \tilde{C}^2 \cap Y$ dove Y è l'insieme $Y = \{f : [0, \pi] \to \mathbb{R} | f \; continua \; f(0) = f(\pi) = 0\}$ e $\tilde{C}^2$ sono le funzioni regolari solo in $(0, \pi)$ che è definito allo stesso modo $\tilde{T}u = u''$ è autoaggiunto.
Infatti :

$$< \tilde{u}, v >= \int_0^\pi u''(x)v(x)dx =< u, Tv >$$

Dove la seconda uguaglianza è ottentuta integrando due volte per parti.
Calcoliamo adesso gli autovalori di $\tilde{T}$:
$\tilde{T}u = \lambda u \quad \Leftrightarrow \quad u'' = \lambda u$ con $u \in \tilde{C}^2 \cap Y$.

- $\lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}$ soluzione
- $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha x + \beta$ soluzione
- $\lambda < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha e^{-i\sqrt{-\lambda x}} + \beta e^{\sqrt{-\lambda x}}$ soluzione

e dobbiamo imporre nei vari casi che tale soluzione stia in $C^2 \cap Y$, quindi:

- $\lambda > 0 \quad u(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x} \in C^2 \cap Y \quad \Rightarrow u = 0$ quindi non è autovalore
- $\lambda = 0 \quad u(x) = \alpha x + \beta \in C^2 \cap Y$
  quindi $\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ u(\pi) = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \lambda = 0$ non è un autovalore

- $\lambda < 0 \quad u(x) = \alpha e^{\sqrt{-\lambda x}} + \beta e^{-i\sqrt{-\lambda x}} \in C^2 \cap Y$ allora
$\begin{cases} u(0) = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \\ u(\pi) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \lambda = -m^2 \end{cases}$ con $m \in \mathbb{N}$. Quindi otteniamo:
$$\lambda \text{ autovalore} \Leftrightarrow \lambda = -m^2 \quad m \in \mathbb{N}$$
con autovettore relativo a $\lambda = -m^2$ dato da $u(x) = \sin(nx)$.

Osservazione 1. Non tutti gli operatori lineari sono autoaggiunti, ad esempio $\tilde{X} = C^0([-\pi, \pi))$ con $T : \tilde{X} \cap C^2 \to \tilde{X}$ definito da $Tu = u''$.

Esempio 2. Per ogni $a(x) \in Y$ definiamo $T_a : f \to f(x)a(x)$ che va da $Y \to Y$. T_a è autoaggiunto?

- $< T_a f, g >= \int_0^\pi a(x)f(x)g(x)dx =< f, T_g >$
- autovalori di T_a :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathbb{R} \quad &: \quad T_a f = \lambda f \text{ (con } f \neq 0 \text{)} \\ &\Leftrightarrow \quad a(x)f(x) = \lambda f(x) \Rightarrow a(x) = \lambda \text{ su } \{f \neq 0\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad a$ costante sulle componenti connesse di $\{f \neq 0\} \Rightarrow a(x) = \lambda$ (perchè f è continua).
Quindi se $a(x) = cost.$ allora $\lambda = 0$ è l'unico autovalore, invece se $a(x) \neq cost.$ allora non esisto autovalori.

Esempio 3. Sia $Z = \{f : Q = [0, \pi]^2 \to \mathbb{R} | f \text{ continua } f\ |_{\partial Q} = 0\}$
col prodotto scalare $< f, g >= \int\int_Q f(x, y)g(x, y)dxdy$.
Consideriamo $T : C^2 \cap Z \to Z\ Tu = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy}$
(dove $C^2 \cap Z$ sono le funzioni che sono C^2)

Esercizio 1. Calcolare gli autovalori di T :
gli autovettori sono $u(x, y) = \sin(nx)\sin(my)$ con $n, m \in \mathbb{Z}*$
perchè $\Delta u = -n^2 \sin(nx)\sin(mx) - m^2 \sin(nx)\sin(my) = (-m^2 - n^2)u$.

Esercizio 2. T autoaggiunto:

$$< Tu, v >= \int\int_Q \Delta u(x, y)v(x, y)dxdy = -\int_Q \nabla u \cdot \nabla v dxdy + \int_{\partial Q} v\nabla u \cdot \hat{u} ds$$

dove per le uguaglianze abbiamo utilizzato il Teorema di Gauss-Green e della divergenza. Scambiando il ruolo di u e v otteniamo che Δu è autoaggiunto su $C^2 \cap Z$.

Osservazione 2.
$$\{(n^2 + m^2)\}_{n,m \in \mathbb{N}^*} \tag{1}$$

sono autovalori con autovettori

$$\{\frac{2}{\pi}\sin(nx)\sin(my)\}_{n,m\in\mathbb{N}^*} \tag{2}$$

che è un sistema ortonormale. In realtà è anche massimale, possiamo dimostrarlo come nel caso di X usando il teorema di Stone-Weierstrass.

Nota1 : sono tutti e soli gli autovalori, infatti se per assurdo esistesse un altro autovalore λ con autofunzione u questo sarebbe ortogonale 2 contro la massimalità.
Nota 2: dalla simmetria di Q, si possono cercare gli autovalori $-(n^2+m^2)$ e autofunzioni $u(x,y) = v(x)w(y)$ con $v, w \in Y$ infatti: $\Delta u = v''(x)w(y) + v(x)w''(y) = \lambda u = \lambda vw$ e quindi $\frac{v''}{v}+\frac{w''}{w} = \lambda \Rightarrow \frac{v''}{v} = cost \quad \frac{w''}{w} = cost \begin{cases} v'' = \tilde{\lambda}v \\ w'' = \bar{\lambda}w \\ v, w \in Y \cap C^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \tilde{\lambda} = -n^2, \bar{\lambda} = -m^2 \quad n, m \in \mathbb{N}$
Esercizio 3. Dato $W = \{f : [-\pi,\pi]^2 \to \mathbb{C} continue, f(\pi,y) = f(-\pi,y), f(x,\pi), f(x,-\pi) \quad \forall x, y \in [-\pi,\pi]\}$.
L'operatore $T : W \cap C^2 \to W$ è autoaggiunto? Quali sono gli autovalori di T?
(Lo spazio Wè dotato di prodotto scalare $< f, g >= \int f\bar{g}dxdy$)

Esercizio 4. Dato $D := \{f : B(\bar{0},1) = \{\|(x,y) \leq 1\|\} \to \mathbb{R}\ continue\ f\ |_{\partial B} = 0\}$ con prodotto scalare $< f, g >= \int_B fgdxdy$.
L'operatore $T : C^2 \cap D \to D$ così definito $Tu = \Delta u$ è autoaggiunto? Calcolare gli autovalori