Lezione 12

Maria Stella Gelli

30 ottobre 2009

Calcolo della trasformata di Fourier: $X = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} continue \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f| dx < +\infty\}$ abbiamo definito la trasformata di Fourier in questo modo: $\hat{f}(y) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx$ *Proprietà:*

- $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_\infty$
- se $f \in X$ e $xf \in X$ allora $\hat{f} \in C^1$ e vale $-\hat{ixf}(y) = (\hat{f}')(y)$
- $f, f' \in X \Rightarrow \hat{f}'(y) = iy\hat{f}(y)$
- Data $f \in X$ allora $\begin{cases} \tau f(x) := f(x-a) & \forall a \in \mathbb{R} \\ \sigma_a f(x) := f(\frac{x}{a}) & \forall a \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$

  allora abbiamo che $\tau_a f, \sigma_a f \in X$ e vale $\begin{cases} \hat{\tau_a} f(y) = e^{-iya}\hat{f}(y) \\ \hat{\sigma_a} f(y) = |a|\hat{f}(\frac{y}{a}) \end{cases}$

Esempio 1. $f(x) = e^{-|x|} \in X$ allora $\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-iyx}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x(1-iy)}dx + \int_{-\infty}^0 e^{x(1-iy)}dx = \frac{2}{1+y^2}$.
Osserviamo che essendo $f \in X$ abbiamo che la $\hat{f}(y) \in C^1$

Esempio 2. $f(x) = (2 - |x|) \vee 0 = \begin{cases} 2 - |x| & se\, |x| \leq 2 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$
Innanzitutto $f \in X$ quindi ha senso calcolarne la trasformata.
Consideriamo la seguente

$$g(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & -2 \leq x < 0 \\ 0 & |x| > 2 \end{cases}$$

$g = f'$ laddove f' esiste, inoltre $f(x) = \int_0^x g(t) + 2dt$ (cioè g verifica il teorema fondamentale del calcolo integrale). Per questa g ha senso calcolare la trasformata $\|g\|_1 < \infty$
Esercizio: verificare se vale ancora la regola scritta precedentemente per la trasformata della derivata.

In questo caso infatti è più comodo calcolare la trasformata di g e da quella risalire alla trasformata di f, supponendo che la precedente affermazione sia vera.

Osservazione 1. La trasformata di una funzione caratteristica $\chi_{[a,b]}(x) = \tau_{(\frac{a+b}{2})}\chi_{[-\frac{b-a}{2}],\frac{b-a}{2}}$

Abbiamo quindi che $\hat{f}(y) = \frac{4\sin^2(y)}{y^2}$

Esercizio 1. Calcolare la trasformata di Fourier di:

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$
2. $g(x) = 1 + x^4$

Svolgimento: (primo punto)
$f \in X$ quindi esiste la trasformata. Osserviamo che essendo la f pari, allora $\hat{f}(-y) = \hat{f}(y)$. Calcoliamo l'integrale $\forall y < 0$ l'altro caso è simmetrico
Usiamo il Teorema dei residui, sia $F(z) = \frac{e^{-iyz}}{1+z^2}$ allora è rapporto di funzioni olomorfe in $\mathbb{C}$ e ha due singolarità isolate in $z_1 = -i, z_2 = i$.
Prendiamo $D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, Im(z) \geq 0, R > 0\}$ con bordo parametrizzato da $\gamma_{1,R}, \gamma_{2,R}$ allora $\int_{\gamma_{1,R}*\gamma_{2,R}} F(z)dz = 2\pi i Res(F, \pm i)$.
Si utilizza poi l'altro risultato sui residui delle funzioni razionali.

Esercizio 2. Calcolare $\hat{f}(y)$ $y > 0$ usando solo la teoria dei residui.

Il calcolo di $\hat{f}$ per $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ si fa analogamente usando la teoria dei residui.
Calcolo degli autovalori

Osservazione 2. T può essere autoaggiunto ma non avere autovalori, come controesempio si può considerare $T : Y \to Y$ tale che $u \to a(x)u(x)$ dove $a \in C^0$.

Esercizio 3. Trovare $a(x)$ che ammette un autovalore (con autovettori).

Esercizio 4. Dato $\Delta u : C_0^0 \cap C^2 \to C^0$ che è autoaggiunto (per Gauss-Green) con $C_0^0 = \{f : B \to \mathbb{R}\ continue, f\ |_{\partial B} = 0\}$.
Calcolare gli autovalori.

Suggerimento: passaggio in coordinate polari e separazione delle variabili.