# Lezione 5

Giovanni Alberti

21 ottobre 2009

Ripartiamo dall'equazione delle onde enunciata nella scorsa lezione.

**Osservazione 1.** 1. Se la soluzione dell'equazione delle onde esiste, allora necessariamente esiste $u^0 \in C^2$ e $u^1 \in C^1$.

2. $u_{xx}(t-\pi) = \frac{1}{c^2}u_{tt}(t,-\pi) = \frac{1}{c^2}u_{tt}(t,\pi)uu_{xx}(t,\pi)$

3. Dal punto precedente ho che $\forall t$ se estendo $u(t,\cdot)$ su tutto $\mathbb{R}$ per periodicità ottengo una funzione $C^2$

4. $u(x,t) = \beta_0 t + \alpha_0 + \phi_+(x+ct) + \phi_-(x-ct)$ con $\phi_+(x+ct) = \sum_{n\neq 0} \alpha_n e^{in(x+ct)}$, $\phi_-(x-ct) = \sum_{n\neq 0} \beta_n^{in(x-ct)}$ e $\beta_0 = c_0^1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u_1 dt$.
   Vediamo quanto sono regolari $\phi_+$ e $\phi_-$, abbiamo che $|\alpha_n| \leq |c_n^0 + |c_n^1|$ adesso $\sum_n n|\alpha_n| \leq \sum_n |nc_n^0| + \sum |c_n^1|$ e nella parte sinistra dell disuguaglianza le due componenti sono entrambe finite $\Rightarrow \phi_+ \in C^1$ e anche $\phi_-$, non abbiamo ancora che sono $C^2$.

**Teorema 1** (Esistenza)**.** Se $u_0 \in X \cap C^3$ e $u_1 \in X \cap C^2$, intendendo che sono $C^2$ e $C^3$ se estese per periodicità, quindi aggiungendo condizioni al bordo. Allora l'equazione delle onde ammette una soluzione di classe $C^2$ tale che

$$u : (-\infty,\infty) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}.$$

*Dimostrazione.* Prendendo $u(t,x) = \sum c_n(t)e^{inx}$ con $c_n$ dato dalle formule precedentemente espresse.
*Punto chiave:* verificare che $u$ è $C^2$ e verifica l'equazione delle onde.

- $\sum |n^2 c_n(t)| < +\infty \Rightarrow u(\cdot,t) \in C^2$, ma $c_n \leq |\alpha_n| + |\beta_n| \leq |c_n^0| + |\frac{c_n^1}{in}|$ $\Rightarrow \sum |n^2 c_n^0| \leq \sum |n^2 c_n^0| + \sum |nc_n^1|$
- siccome $c_n$ risolve $y'' = n^2c^2y$, allora $\sum |n^2 c_n(t)| < +\infty \Rightarrow u(x,\cdot) \in C^2$.
- Resta da verificare che $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$ sono continue, *Esercizio.*

Chiaramente $c_n(t)$ è $C^\infty$ in $t$ quindi $u(x,t)$ è $C^\infty$ in $t$ (se la serie converge totalmente).
$u(x,t)$ è $C^2$ in $X \Leftarrow \sum |n^2 c_n(t)| < \infty \forall t$
$(u(x,t)$ è $C^\infty$ in $t \Leftarrow \sum |D^2 c_n(t)| < \infty \forall t)$ $\square$

**Teorema 2.** Se $u_0 \in X \cap C^2$, $u_1 \in X \cap C^1$ allora il problema delle onde ammette soluzione $u \in C^2$ dove $u : \mathbb{R} \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$.

*Dimostrazione.* Cerco $u(t,x) = \beta_0 t + \phi_+(x+ct) + \phi_-(x-ct)$ con $\phi_+\phi_-$ in $X \cap C^2$.
(sicuramente ogni $u$ di questo tipo soddisfa equazione e cond. al bordo). Basta trovare $\beta_0, \phi_+, \phi_-$ tali che valgono le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \phi_- + \phi_+ = u_0 \\ \beta_0 + c\phi'_+ - c\phi'_- = u_1 \Leftrightarrow \phi'_+ - \phi'_- = \frac{u_1 - \beta_0}{c}. \end{cases}$$

Tutto ciò vale se :

$$\begin{cases} \phi_- + \phi_+ = u_0 \\ \phi_- - \phi_+ = v_1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \phi_+ = \frac{u_0 + v_1}{2} \\ \phi_- = \frac{u_0 - v_1}{2} \end{cases}$$

dove $v_1$ è una primitiva di $\frac{u_1 - \beta_0}{c}$. Si usa il seguente

**Lemma 1.** $f \in X \cap C^1$ con $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. Allora la $F$ primitiva di $f$ è in $X \cap C^2$.

Prendendo $\beta_0$ tale che $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u_1 - \beta_0}{c} = 0$ tutto funziona. □

**Derivazione dell'equazione del calore**
disegno 1 Partiamo dicendo che se ho due contenitori $T_0$ e $T_1$ c'è un trasferimento di energia da sinistra a destra, in questa misura

$$E = k_c \frac{A(T_1 - T_0)}{\delta} \xrightarrow{\delta \to 0} q = k_c \frac{\partial T}{\partial x} \tag{1}$$

Abbiamo quindi che per $a < b, T = T(x,t)$

$$c_T \int_a^b -\frac{\partial T}{\partial t} dx = q(b) - q(a) \quad = \quad -k_c\left(\frac{\partial T}{\partial x}(b) - \frac{\partial T}{\partial x}(a)\right) = -k_c \int_a^b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx$$

$$\Rightarrow c_T \int_a^b \frac{\partial T}{\partial t} dx = -k_c \int_a^b \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \quad \Rightarrow \quad c_T \frac{\partial T}{\partial t} = -k_c \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Abbiamo quindi la seguente equazione del calore $u_t = cu_{xx}$ nel caso monodimensionale.
Nel caso di dimensione $> 1$

$$-c \int_\Omega \frac{\partial T}{\partial t} dx = -c \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega T dx = \quad -k_c \int_{\partial\Omega} \nabla T \cdot u \quad = -k_c \int_\Omega div(\nabla T) dx = -k_c \int_\Omega \Delta T dx$$

$$\Rightarrow c \int \frac{\partial T}{\partial t} = k_c \int_\Omega \Delta T \qquad \forall \Omega$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = c\Delta \bar{u}.$$

Abbiamo quindi che il problema di Cauchy associato è il seguente:

$$\begin{cases} u_t = cu_{xx} & \forall t, x \\ u(t,\pi) = u(t,-\pi) & \forall t \\ u_x(t,\pi) = u_t(t,-\pi) & \forall t \\ u(o,x) = u_0(x) & \forall x \end{cases} \tag{2}$$

Per risolvere questo problema usiamo le serie di Fourier, abbiamo che se $u(t,x) = \sum c_n(t)e^{inx}$ allora $u_t = \sum c_n'(t)e^{inx}$ e $u_{xx} \sum -n^2 c_n(t)e^{inx}$, per risolvere $u_t = cu_{xx}$ serve che:

$$c_n' = cn^2 c_n \tag{3}$$

cioè che $c_n(t)$ risolva l'equazione $y' + cn^2 y = 0$ con dato iniziale $y(0) = c_n^0$ dove $c_n^0$ è coefficente di Fourier di $u_0$.
Inoltre vale:

$$c_n(t) = c_n^0 e^{-cn^2 t}. \tag{4}$$

Quindi la soluzione è

$$u(t,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 e^{(inx - cn^2 t)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n^0 e^{-cn^2 t} e^{inx} \tag{5}$$

**Teorema 3** (Unicità)**.** Se $u : [0,T] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \quad \in C^2$ risolve il problema 2, allora i coefficenti $c_n(t)$ sono univocamente determinati dall'equazione 3 o 4. In particolare la soluzione è unica.

**Teorema 4** (Esistenza)**.** Se $u_0 \in X \cap C^1$ allora $\exists u : [0,+\infty] \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R} \quad \in C^0$ e $C^\infty(0,+\infty)$ che risolve il problema 2.

*Dimostrazione.* Dobbiamo verificare che la 5 soddisfa le ipotesi. Ci basta uindi controllare le convergenze:

- $\|c_n^0 e^{inx - cn^2 t}\|_{t\geq 0} = |c_n^0|$ ma allora usando che $u_0 \in C^1$ abbiamo che $\sum |c_n^0| < +\infty$ e perciò $u \in C^0$
- per dimostrare che $u \in C^\infty((0,+\infty) \times \mathbb{R})$, ci basta mostrare che $\forall \delta > 0 \sum \|(\frac{\partial}{\partial t})^k (\frac{\partial}{\partial x})^h (c_n^0 e^{inx - cn^2 t})\|_{x\in\mathbb{R}, t\geq\delta>0} < \infty$.
  Ma infatti

  $$(\frac{\partial}{\partial t})^k (\frac{\partial}{\partial x})^h (...) = (-cn^2)^k (cn)^h (...) \Rightarrow \|(\frac{\partial}{\partial t})^k (\frac{\partial}{\partial x})^h (...)\|_{x\in\mathbb{R}, t\geq\delta} = (cn^2)^k n^h |c_n^0| \|e^{-cn^2\delta}\|.$$

  Quindi la serie converge totalmente su $[\delta,\infty) \times \mathbb{R}, \forall \delta > 0$ e quindi la tesi.

$\square$