Lezione 7

Giovanni Alberti

21 ottobre 2009

Errore nella soluzione dell'equazione delle onde, non l'ho presa, correggi sia questi che gli scorsi appunti. Abbiamo la serie:

$$u(t,x) := \alpha_0 + \beta_0 t + \sum_{n\neq 0} \alpha_n e^{in(x+ct)} + \sum_{n\neq 0} \beta_n e^{in(x+ct)} \tag{1}$$

e vogliamo provare la convergenza totale.
Inoltre l'equazione del calore ha la seguente soluzione:

$$u(t,x) := \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n^0 e^{inx-cn^2 t} \tag{2}$$

Ci mancava da verificare che $u \in C^0([0,+\infty)\times\mathbb{R}) \cap C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$ un pò di conti prendili semmai e mettici qualcosa.

Proposizione 1 (Disuguaglianza isoperimetrica)**.** Preso D insieme sufficentemente regolare e compatto di $\mathbb{R}^2$ allora vale la seguente:

$$4\pi \cdot Area(D) \leq (Lungh(\partial D))^2 \tag{3}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se D è un disco.

Per dimostrarlo abbiamo bisogno di

Lemma 1.

- $\forall f \in X$ con coefficenti di Fourier $\{c_n\}$ vale $\sum |c_n|^2 = \|f\|_2^2$
- $\forall f, g \in X$ con coefficenti di Fourier $\{c_n\}, \{d_n\}$ vale $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \bar{d_n} =< f, g >$ (Identità di Parsefal)

Dimostrazione. Il primo punto l'avevamo già dimostrato a esercitazioni. Per il secondo punto osserviamo innanzitutto che la serie a primo membro converge assolutamente ($|c_n\bar{d_n}| \leq \frac{1}{2}(|c_n|^2+|d_n|^2)$), inoltre ci possiamo ricondurre al primo punto usando:

$$\begin{cases} \mathcal{R}\rceil < f,g >= \frac{1}{2}(\|f+g\|_2^2 - \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2) \\ \mathcal{I}\Updownarrow < f,g >= \frac{1}{2}(\|f+ig\|_2^2 - \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2) \end{cases} \tag{4}$$

(dimostrazione: *Esercizio*) abbiamo

$$< f, g >= \mathcal{R}] < f, g > +i\mathcal{I}\Updownarrow < f, g >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \bar{d_n}$$

dove l'ultima uguaglianza è ottenuta ricostruendo il prodotto scalare dalla norma. $\square$

Lemma 2. Data $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2 (= \mathbb{C})$ curva chiusa e C^1.
Se $|\dot{\gamma}| = cost$ allora $Lungh(\gamma) = 2\pi \|\dot{\gamma}\|_2 = 2\pi (\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |c_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Dimostrazione. $L := Lungh(\gamma)$ e $|\dot{\gamma}| = cost$ implica che $|\dot{\gamma}| = \frac{L}{2\pi}$.
Ma allora

$$\|\dot{\gamma}\|_2 = (\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\gamma}|^2 dt)^{\frac{1}{2}} = \frac{L}{2\pi}.$$

$\square$

Lemma 3. Se D è compatto di $\mathbb{R}^2$ con frontiera parametrizzata in senso antiorario da $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ chiusa e C^1, con coefficenti di Fourier $\{c_n\}$.
Allora $Area(D) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n |c_n|^2$. *Nota:* per la definizione di frontiera parametrizzata in senso antiorario da una curva vedi Cartan.

Dimostrazione. Nella nostra dimostrazione partiremo dalla formula e arriveremmo all'area, questo per semplificare i conti, per la dimostrazione costruttiva si scrive l'area come integrale della forma che parametrizza la frontiera.
Osserviamo innanzitutto che gli $i(nc_n)$ sono i coefficenti di Fourier di $\dot{\gamma}$ e che gli $i\bar{c_n}$ sono i coefficenti di Fourier di $i\gamma$. Allora usando l'Identità di Parsefal e il Teorema di Gauss-Green

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} i(nc_n)(i\bar{c_n}) \\
&= < \dot{\gamma}, i\gamma > \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\gamma}(t)(-i\bar{\gamma(t)})dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} -i\bar{z}(dx + idy) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} -i\bar{z}dx + \bar{z}dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{D} 2dxdy \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot Area(D).
\end{aligned}$$

$\square$

Disuguaglianza isoperimetrica. Le ipotesi di sufficente regolarità si traducono in essere parametrizzato in senso antiorario da una curva C^1.
Supponiamo anche qua che i c_n siano i coefficenti di Fourier di γ, allora

$$\begin{aligned} 4\pi Area(D) &= 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|c_n|^2 \\ &= 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2|c_n|^2 \\ &= (2\pi\|\dot{\gamma}\|_2)^2 \\ &= (Lungh(\gamma))^2. \end{aligned}$$

Vale l'uguaglianza se e solo se $c_n = 0 \forall n \neq 0, 1$ quindi $\gamma(t) = c_0 + c_1 e^{it}$ che parametrizza una circonferenza. □

Esercizio 1. Dalla precedente si ha che il disco è la figura (della forma sopracitata) con area massima rispetto al perimetro o perimetro minimo rispetto all'area.

Esercizio 2. Può essere generalizzato usando domini D con buchi, ma sempre compatti.

Esercizio 3. Dato D come sopra se

$$4\pi \cdot Area(D) \geq (1-\delta)(Lungh(\partial D))^2 \qquad 0 < \delta < \frac{1}{3} \tag{5}$$

allora $\exists x_0 \in \mathbb{R}, r_e, r_i > 0$ tali che:

$$D(x_0, r_i) \subset D \subset D(x_{,r_e}) \qquad \frac{r_e}{r_i} \leq 1 + c\sqrt{\delta}. \tag{6}$$

Inoltre l'esponente $\frac{1}{2}$ è ottimale.

Cose che non possono essere fatte usando la serie di Fourier:

- Come risolvere l'eq del calore e delle onde con condizioni al bordo diverse da quelle periodiche? (esempio $u = 0$ sul bordo)
- Passando a dimensione superiore?
- Cosa succede per eq. lineari diverse?

Premessa: Successivamente considereremo il prodotto scalare come non rinormalizzato rispetto a 2π.

Esempio 1. Sia $Y = \{f : [0,\pi] \to \mathbb{R} | f\, continua\, f(0) = f(\pi) = 0\}$ e sia $< f, g >= \int_0^\pi fg dx$.
Allora $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) | n = 1, 2, ...\}$ è sistema ortonormale massimale.
Inoltre $\forall f \in C^1$ la serie $\sum_{n=1}^\infty \gamma_n \sin(nx)$ con $\gamma_n := \frac{2}{\pi} < f, \sin(nx) >$ converge totalmente e converge ad f.

Possiamo utilizzare questa serie per risolvere l'eq. delle onde e del calore con condizioni $u(t,0) = u(t,\pi) = 0 \forall t$.

Dimostrazione. Formula di rappresentazione partendo da quella già vista.
Data $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ $f(0) = f(\pi) = 0$ la estendo in maniera dispari e periodica (l'estensione è unica) ad una $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ usiamo adesso la formula di rappresentazione per $\tilde{f}$. Otteniamo che $\tilde{f} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ e, essendo $\tilde{f}$ dispari e reale, $c_0 = 0$ e $c_{-n} = -c_n$. Quindi

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-inx} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [c_n (e^{inx} - e^{-inx})] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2ic_n \sin(nx)\end{aligned}$$

dove la convergenza totale della serie segue dalla convergenza totale della serie di Fourier.
Quindi su $x \in [0,\pi]$ $\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin(nx)$. *Nota 1:* per l'unicità dei γ_n serve che l'insieme dato sia effettivamente un sistema ortonormale, non è stato dimostrato (verrà dimostrato a esercitazione).
Nota 2: per la massimalità dell'insieme, quella non servirebbe (si usa per la formula di rappresentazione e ce l'abbiamo già) ma in realtà segue dalla formula di rappresentazione (verrà dimostrata a esercitazione). Si fa per assurdo. □

Esempio 2. Sia $Z = \{f : Q = [0,\pi]^2 \to \mathbb{R} | f \, continua \, e \, f = 0 \, su \, \partial Q\}$ (Q è il quadrato) con $< f, g >= \int_Q fg dx$.
Allora $\{\frac{2}{\pi} \sin(n_1 x_1) \sin(n_2 x_2) | n_1, n_2 = 1, 2, ...\}$ è sistema ortonormale massimale e data $f \in Z \cap C^1$ allora la serie $\sum_{n_1 n_2 = 1}^{\infty} \gamma_{n_1,n_2}$ con $\gamma_{n_1,n_2} = \frac{4}{\pi^2} < f, \sin(n_1 x_1) \sin(n_2 x_2) >$ converge totalmente e converge alla f.

Dimostrazione. Usiamo la dimostrazione dell'esempio precedente:

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2) &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \gamma_{n_1}(x_2) \sin(n_1 x_1) \\ &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \Big(\sum_{n_2=1}^{\infty} \gamma_{n_1,n_2}(x_2) \sin(n_2 x_2)\Big) \sin(n_1 x_1).\end{aligned}$$

Nota 1: Rimane da verificare la convergenza della serie doppia cioè che $\sum_{n_1,n_2} |\gamma_{n_1,n_2}| < +\infty$.
Nota 2: Vale un discorso analogo al caso precedente per la ortonormalità, è stata utilizzata ma va dimostrata, per verificarla conviene scrivere il seno come somme e differenze di seni e coseni.

Nota 3: Anche in questo caso segue dalla formula di rappresentazione.
Nota 4: Possiamo utilizzare queste serie per risolvere le equazioni del calore: si scrive la funzione come serie, si calcola il Laplaciano e si prosegue con il procedimento. La cosa interessante di questo metodo è che nel procedimento mi trovo delle equazioni differenziali per calcolare i coefficenti che sono funzione dei coefficenti stessi.
Tutto va bene perchè le funzioni $\sin(n_1 x_1)\sin(n_2 x_2)$ sono *autovettori del Laplaciano.* $\square$