Lezione 8

Maria Stella Gelli, Giovanni Alberti

21 ottobre 2009

Applicazioni equazioni differenziali alle derivate parziali
Rivediamo gli esercizi dati l'altra volta.

Esercizio 1.

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & t > 0, x \in [-\pi, \pi] \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi) & t \geq 0 \\ u_x(t, -\pi) = u_x(t, \pi) & t \geq 0 \\ u(0, x) = \cos(x) & x \in [-\pi, \pi] \\ u_t(0, x) = \sin(x) & x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \tag{1}$$

Metodo risolutivo:

- Calcolo formale dello sviluppo in serie trigonometriche della soluzione

  $$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}.$$

  Abbiamo una equazione differenziale per i $c_n(t)$, usando le formule si calcolano gli α_n, β_n e ci scriviamo le funzioni $c_n(t)$.

- Verifico poi che la funzione calcolata soddisfa effettivamente le condizioni del sistema.

Esercizio 2.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & t > 0, x \in (-\pi, \pi) \\ u(t, -\pi) = u(t, \pi) & t \geq 0 \\ u_x(t, -\pi) = u_x(t, \pi) & t \geq 0 \\ u(0, x) = \cos(x) + 2\sin(2x) & x \in [-\pi, \pi] \end{cases} \tag{2}$$

Questo caso ha un termine u in più, si può comunque scrivere

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}.$$

Calcoliamo poi i c_n con equazioni differenziali. In questo caso particolare abbiamo

$$\begin{cases} c_n'(t) = -n^2 c_n(t) = (1-n^2)c_n(t) \\ c_n(0) = c_n(\cos(x) + 2\sin(x)) & \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Un pò di esercizi con termini misti

Esercizio 3.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \cos(x) & t > 0, x \in (-\pi, \pi) \\ u(t,-\pi) = u(t,\pi) & t \geq 0 \\ u_x(t,-\pi) = u_x(t,\pi) & t \geq 0 \\ u(0,x) = \sin(3x) & x \in [-\pi,\pi] \end{cases} \tag{3}$$

A lezione abbiamo definito il metodo delle serie di Fourier definite sull'insieme $Y = \{f : [0,\pi] \to \mathbb{R} | f \, continua \, f(0) = f(\pi) = 0\}$ con $< f, g >= \int_0^\pi fg dx$ e $\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) | n = 1, 2, ...\}$ che è sistema ortonormale massimale.
Se io volessi risolvere un sistema del tipo

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u & t > 0, x \in (0, \pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \geq 0 \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0 & t \geq 0 \\ u(0,x) = 2\sin(2x) & x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{4}$$

l'idea sarebbe di utilizzare la serie dei seni.
Cambio
Come procedere per equazioni differenziali con dominio Ω diverso da quelli dati (o anche condizioni al bordo) oppure se l'equazione è della forma $u_t = Tu$ con $T \neq \Delta$ ($u_{tt} = Tu$). Abbiamo la seguente

Osservazione 1. Se V è spazio vettoriale con prodotto scalare e $T : V \to V$ è autoaggiunto ($< Tv, w >=< v, Tw >$).
Allora esiste una base ortonormale di V fatta da autovettori di T.

Un metodo per verificare questo risultato è lavorando sulla forma quadratica associata al prodotto scalare.
Si pone $Q(v) = \frac{1}{2} < Tv, v >$ e si prende come primo vettore della base il punto minimo di $Q(v)$ sull'insieme dei vettori di norma 1. Si pone poi il secondo vettore uguale al minimo di $Q(v)$ su l'insieme dei vettori di norma 1 ortogonali al primo e si prosegue.
Non è naturale che qualcosa di simile valga anche su spazi di dimensione infinita. In generale autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono ortogonali in ogni dimensione, ma è difficile dimostrare in dimensione infinita che sono un sistema massimale.

Esempio 1. Prendiamo X il solito spazio e sia $T : u \to u''$ con $u \in C^2$. Allora T è autoaggiunto (dimostrazione facile). Sia $u'' = \lambda u$ allora:
se $\lambda > 0$ $u = \alpha_1 e^{\sqrt{\lambda x}} + \alpha_2 e^{-\sqrt{\lambda x}} \notin X$

se $\lambda = 0$ analogo a prima $\notin X$
se $\lambda < 0$ $u(x) = \alpha_1 e^{i\sqrt{\lambda x}} + \alpha_2 e^{-i\sqrt{\lambda x}} \in X$ se e solo se $\sqrt{\lambda} = n$.

Esercizio 4. Il Laplaciano è un operatore autoaggiunto.