



UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Laurea Triennale in Matematica

Nozioni di Dimensione Frattale

Relatore:

Prof: Matteo Novaga

Candidata:

Alessandra Cattafi

ANNO ACCADEMICO 2023/2024

Ai miei genitori.

Alle mie fantastiche sorelle.

A mio zio Mario, che ci manca.

Come per qualsiasi mio lavoro, soprattutto, ai miei amati nipoti.

Indice

1	La dimensione di Hausdorff	6
1.1	La misura di Hausdorff	6
1.2	La dimensione di Hausdorff	10
1.3	Calcolo della dimensione di Hausdorff	14
2	Altre nozioni di dimensione	17
2.1	Box dimension	17
2.1.1	Relazione con la dimensione di Hausdorff	21
2.1.2	Esempio di calcolo della box dimension	23
2.2	Packing dimension	26
2.2.1	Relazioni con altre dimensioni	27
2.2.2	Degli esempi	29
2.3	Dimensioni "impronta"	30
2.3.1	Alcuni esempi	31
3	Dimensione e autosimilarità	33
3.1	Sistemi di funzioni iterate	33
3.2	Dimensione insiemi autosimili	35
3.2.1	Applicazioni del Teorema 3.2.3	39
3.2.2	Costruzioni di una curva frattale a partire da un gene- ratore	42

Introduzione

Da sempre, l'interesse nella geometria è stato motivato dalla sua utilità nel descrivere fenomeni naturali. Posti però di fronte a un mondo fatto di linee costiere frastagliate e catene montuose svettanti, non possiamo fare a meno di trovare insoddisfacenti i modelli euclidei.

Quale branca della geometria può essere adatta a descrivere una struttura complessa quale quella di un fiocco di neve? La geometria frattale, il cui germe è stato piantato nei primi anni del Novecento da G. Julia [11], risponde a questa necessità. Basti pensare al *fiocco di neve di Koch*, uno dei primi frattali ad essere mai stati descritti, basato sulla *curva di Koch* apparsa in letteratura nel 1904 [12].

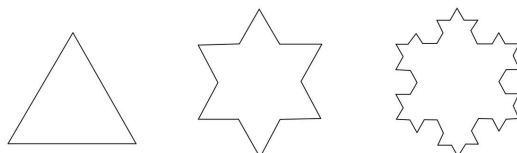


Figura 1: I primi tre passi della costruzione ricorsiva il cui limite è il *fiocco di neve di Koch*. Tale costruzione parte da un triangolo equilatero; ad ogni passo si divide ogni segmento in tre segmenti di uguale lunghezza, si costruiscono i triangoli equilateri di base i segmenti centrali e si cancellano infine le basi.

La geometria frattale tratta degli insiemi caratterizzati dalla loro "*dimensione frazionaria*", concetto introdotto da F. Hausdorff [8]. La nomenclatura *frattale*, coniata da B. Mandelbrot, deriva infatti dal termine latino *fractus* (frammentato, rotto). Fu proprio Mandelbrot [13], nel 1982, a legare intimamente i concetti di natura e di frattale, divenendo il padre della geometria frattale che conosciamo oggi.

Questi modelli rimangono rilevanti nella vita moderna: a partire dalla loro

utilità nelle applicazioni economiche e modellizzazioni fisiche, fino al loro utilizzo come forma d'arte grazie alla grafica al computer.

Lo stesso Mandelbrot, nella *lectio magistralis* "Fractals in Anatomy and Physiology", ne aveva sottolineato l'interdisciplinarietà nel 2007: "i frattali servono a trovare una nuova rappresentazione che parta dall'idea di base che il piccolo in natura non è nient'altro che una copia del grande. La mia convinzione è che i frattali saranno presto impiegati nella comprensione dei processi neurali, la mente umana sarà la loro nuova frontiera."

Proprio quest'anno, è stato scoperto [17] per la prima volta un frattale a livello molecolare: una proteina del batterio *Synechococcus elongatus* si assembla in forma di triangolo di Sierpiński.

Lo scopo principale di questa tesi è cogliere la bellezza dei frattali trattandone la matematica associata, con una particolare attenzione alle dimensioni. Infatti, i metodi della geometria classica e dell'analisi non sono adatti a studiare tali insiemi, e, dunque lo strumento principale della geometria frattale è la dimensione in tutte le sue forme: essa misura la prominenza delle irregolarità di un insieme quando guardate in scale piccole e contiene molte informazioni sulle proprietà geometriche dello stesso.

Mandelbrot ha definito [13] un frattale come un insieme con dimensione di Hausdorff strettamente maggiore rispetto alla sua dimensione topologica.

Una visione più moderna, che non vuole rischiare di escludere tramite una definizione troppo stringente degli insiemi altrimenti considerati frattali, preferisce pensare a un frattale come un insieme dotato dalle seguenti proprietà:

1. una struttura fine, cioè è un insieme dettagliato in scale arbitrariamente piccole;
2. non può essere descritto col linguaggio della geometria tradizionale, poiché è irregolare;
3. ha spesso una qualche forma di auto-similarità, anche approssimata o statistica;
4. usualmente, la sua "dimensione frattale" (vedremo diverse definizioni nei primi due capitoli) è maggiore che la sua dimensione topologica;
5. in molti casi è definito in una maniera semplice, anche ricorsivamente.

Il lavoro si divide naturalmente in due parti: la prima, che include i primi due capitoli, tratta la teoria generale dei frattali e la loro geometria, presentando

varie nozioni di dimensione e metodi per il loro calcolo; la seconda, composta dal terzo capitolo, racchiude la teoria degli insiemi auto-simili, e permette di mettere a frutto quanto costruito precedentemente.

Nel primo capitolo, viene studiata la prima e più importante definizione di dimensione frattale: la dimensione di Hausdorff [8]. Vengono poi esposti degli esempi di calcolo dimensionale propedeutici al seguito del lavoro.

Il secondo capitolo presenta altre nozioni di dimensione frattale di uso comune: la *box dimension* [15], la *packing dimension* [19] e la dimensione "impronta" [16]. Vengono prima esposti pregi e difetti delle differenti definizioni, queste vengono in seguito messe in relazione con la definizione di Hausdorff tramite esempi rilevanti.

Nel terzo capitolo vengono studiati i frattali che sono attrattori di sistemi di funzioni iterate, atenzionando gli insiemi auto-simili (la *curva di von Koch* sopraccitata ne è un esempio). Seguono esempi che concludono il percorso, mettendo in relazione tutte le nozioni esposte.

Capitolo 1

La dimensione di Hausdorff

La nozione di dimensione è centrale nella geometria frattale. Tra le varie definizioni di "dimensioni frattali" in uso, la definizione di Hausdorff [8], basata su una costruzione di Carathéodory [5], è la prima e probabilmente la più importante: per comprendere gli insiemi frattali, la familiarità con la misura e la dimensione di Hausdorff è essenziale. Dunque, introduciamo le misure di Hausdorff k -dimensionali in \mathbb{R}^n , la cui definizione è del tutto indipendente da parametrizzazioni locali ed ha senso anche per insiemi non regolari.

1.1 La misura di Hausdorff

Ricordiamo che, se U è un qualunque sottoinsieme non vuoto dello spazio Euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n , il *diametro* di U è definito come

$$\text{diam}(U) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in U\}.$$

Sia $B \subset \mathbb{R}^n$; se $\{U_i\}_{i \in I}$ è una collezione numerabile (o finita) di insiemi di diametro al più δ tale che $B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$, diciamo che $\{U_i\}_{i \in I}$ è un δ -ricoprimento di B .

Definizione 1.1.1. Sia $k \geq 0$ e sia $B \subset \mathbb{R}^n$. Indichiamo con $\mathcal{H}^k(B)$ la misura di Hausdorff k -dimensionale di B , definita da

$$\mathcal{H}^k(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^k(B)$$

dove, per $0 \leq \delta \leq +\infty$, $\mathcal{H}_\delta^k(B)$ è definita da

$$\mathcal{H}_\delta^k(B) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in I} (\text{diam}(U_i))^k \text{ t.c. } \text{diam}(U_i) < \delta, B \subset \bigcup_{i \in I} U_i \right\}$$

e la costante ω_k vale $\pi^{\frac{k}{2}}/\Gamma(1 + k/2)$, essendo $\Gamma(t) := \int_0^{+\infty} s^{t-1}e^{-s}ds$ la funzione Γ di Eulero.

Nel caso in cui $k \geq 1$ è un intero, la costante di normalizzazione ω_k che appare nella definizione di \mathcal{H}_δ^k è uguale alla misura di Lebesgue della palla unitaria di \mathbb{R}^k .

Le misure di Hausdorff generalizzano l'idea di lunghezza, area e volume.

Teorema 1.1.1 (proprietà delle misure di Hausdorff). *Valgono le seguenti proprietà:*

1. le misure \mathcal{H}^k sono numerabilmente subadditive sulle parti di \mathbb{R}^n e σ -additive sugli insiemi di Borel;
2. \mathcal{H}^k è identicamente nulla per $k > n$ e coincide con la misura che conta i punti (la "counting measure") se $k = 0$;
3. se $k > k' \geq 0$, vale la seguente implicazione

$$\mathcal{H}^k(B) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^{k'} = +\infty;$$

4. se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ è una funzione che soddisfa la condizione di Hölder di ordine $\alpha > 0$, cioè

$$\|f(x) - f(y)\| < c\|x - y\|^\alpha$$

con $c > 0$ si ha

$$\mathcal{H}^{k/\alpha}(f(B)) \leq c^{k/\alpha} \mathcal{H}^k(B).$$

Dimostrazione. 1.: è facile verificare che le funzioni \mathcal{H}_δ^k sono numerabilmente subadditive:

$$A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \Rightarrow \mathcal{H}_\delta^k(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^k(A_i).$$

Per passaggio all'estremo superiore si ha che la stessa proprietà è soddisfatta da \mathcal{H}^k . Se A e B sono insiemi distanti e $0 < \delta < \text{dist}(A, B)/2$, ogni insieme

di diametro minore di δ interseca A o B , ma non entrambi; da questo segue l'uguaglianza

$$\mathcal{H}_\delta^k(A) + \mathcal{H}_\delta^k(B) = \mathcal{H}_\delta^k(A \cup B)$$

e quindi l'additività sui distanti di \mathcal{H}^k . Dal Teorema 1.1.2 si ricava la σ -additività sugli insiemi di Borel.

2. è ovvia.

3. segue dalla disuguaglianza

$$\mathcal{H}_\delta^k(B) \leq \delta^{k-k'} \mathcal{H}_\delta^{k'}(B)$$

facendo tendere δ a 0.

4. sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un δ -ricoprimento di B , allora

$$\text{diam}(f(B \cap U_i)) \leq c \cdot \text{diam}(B \cap U_i)^\alpha \leq c \cdot \text{diam}(U_i)^\alpha.$$

Segue che $\{f(B \cap U_i)\}_{i \in I}$ è un ϵ -ricoprimento di $f(B)$, con $\epsilon = c\delta^\alpha$. Dunque

$$\sum_{i \in I} \text{diam}(f(B \cap U_i))^{k/\alpha} \leq c^{k/\alpha} \cdot \sum_{i \in I} \text{diam}(U_i)^k$$

così

$$\mathcal{H}_\epsilon^{s/\alpha}(f(B)) \leq c^{k/\alpha} \cdot \mathcal{H}_\delta^k(B).$$

Per $\delta \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$, dando così la tesi. \square

Corollario 1.1.1.1. *Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ è una funzione lipschitziana, si ha*

$$\mathcal{H}^k(f(B)) \leq M^k \mathcal{H}^k(B)$$

dove M è la costante di lipschitz di f .

Teorema 1.1.2 (Teorema di Carathéodory). *Sia $\mu : B(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione d'insieme numerabilmente subadditiva e additiva sugli insiemi distanti. Allora μ è σ -additiva.*

Dimostrazione. Diremo che un insieme di Borel $M \subset \Omega$ è μ -misurabile (secondo Carathéodory) se per ogni insieme $A \subset B(\Omega)$ si ha

$$\mu(A) = \mu(A \cap M) + \mu(A \setminus M).$$

Ci è utile dividere la dimostrazione in due passi. [PASSO 1.] Verifichiamo che \mathcal{F} è una σ -algebra e che la restrizione di μ a \mathcal{F} è σ -additiva. La stabilità per

il passaggio a complementare è evidente. Siano M_1, M_2 insiemi μ -misurabili. Per ogni $A \in B(\Omega)$ si ha allora

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \cap M_1) + \mu(A \setminus M_1) \\ &= \mu(A \cap M_1) + \mu(A \cap M_2 \setminus M_1) + \mu(A \setminus (M_1 \cup M_2)) \\ &= \mu(A \cap (M_1 \cup M_2)) + \mu(A \setminus (M_1 \cup M_2)).\end{aligned}$$

Infine, sia M_h una successione di insiemi μ -misurabili disgiunti, sia M la loro unione, e sia $A \in B(\Omega)$. Si ha

$$\begin{aligned}\mu(A) &\leq \mu(A \setminus M) + \mu(A \cap M) \leq \mu(A \setminus M) + \sum_{i=0}^{+\infty} \mu(A \cap M_h) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A \setminus M) + \mu\left(\bigcup_{i=0}^k A \cap M_i\right) \\ &\leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu\left(A \setminus \bigcup_{i=0}^k M_i\right) + \mu\left(A \cap \bigcup_{i=0}^k M_i\right) \leq \mu(A).\end{aligned}$$

Quindi, anche M è μ -misurabile. Prendendo $M = A$ si ha in particolare la σ -additività di μ .

[PASSO 2.] Ci basta ora dimostrare che i chiusi sono μ -misurabili. Sia $C \subset \Omega$ chiuso e sia A un insieme di Borel. Per dimostrare la disuguaglianza

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C),$$

non sarà restrittivo supporre che $\mu(A) < +\infty$. Sia

$$C_j := \left\{x \in A \text{ t.c. } \frac{1}{j+1} \leq \text{dist}(x, C) < \frac{1}{j}\right\}$$

per $j \geq 1$. Usando l'ipotesi di additività, è evidente che

$$\sum_{j=1}^p \mu(C_{2j}) \leq \mu(A), \quad \sum_{j=0}^p \mu(C_{2j+1}) \leq \mu(A)$$

per ogni naturale p , quindi $\sum_{j=1}^{+\infty} \mu(C_j) < +\infty$. Indicando con \tilde{C}_p l'intorno aperto di raggio $1/p$ di C , si ha

$$\mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C) \leq \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus \tilde{C}_p) + \sum_{j=p}^{\infty} \mu(C_j)$$

$$\leq \mu(A) + \sum_{j=p}^{\infty} \mu(C_j).$$

Facendo tendere p a $+\infty$ si ottiene da tesi. \square

Osservazione 1.1.2.1. *Si osservi che per $k < n$ le misure \mathcal{H}^k non sono né finite, né localmente finite, né σ -finite in \mathbb{R}^n , quindi la teoria dell'integrazione rispetto a queste misure non può dedursi direttamente da quella per le misure σ -finite. Tuttavia al caso di misure σ -finite ci si può ridurre quando si integra su insiemi σ -finiti rispetto a \mathcal{H}^k .*

1.2 La dimensione di Hausdorff

Definizione 1.2.1. La dimensione di Hausdorff di $A \subset \mathbb{R}^n$ è definita da

$$\mathcal{H}\text{-dim}(A) := \inf\{k \geq 0 \text{ t.c. } \mathcal{H}^k(A) = 0\}.$$

In base al 3. del Teorema 1.1.1, si ha

$$\begin{cases} \mathcal{H}^k(A) = +\infty & \text{se } k < \mathcal{H}\text{-dim}(A) \\ \mathcal{H}^k(A) = 0 & \text{se } k > \mathcal{H}\text{-dim}(A) \end{cases}$$

Nel caso in cui k sia uguale alla dimensione nulla si può dire in generale. Ad esempio, l'insieme dei razionali ha dimensione di Hausdorff nulla ma misura 0-dimensionale infinita. Con un procedimento simile alla costruzione dell'insieme di Cantor si possono costruire insiemi di dimensione di Hausdorff 0 aventi la cardinalità del continuo.

Proposizione 1.2.1. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ una funzione che soddisfa la condizione di Hölder di ordine $\alpha > 0$, con $c > 0$

$$\|f(x) - f(y)\| < c\|x - y\|^\alpha$$

e $B \subset \mathbb{R}^n$. Allora $\mathcal{H}\text{-dim}(f(B)) \leq (1/\alpha)\mathcal{H}\text{-dim}(B)$.

Dimostrazione. Se $k > \mathcal{H}\text{-dim}(B)$, allora per il Teorema 1.1.1 $\mathcal{H}^{k/\alpha}(f(B)) \leq c^{k/\alpha} \cdot \mathcal{H}^k(B) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}\text{-dim}(f(B)) \leq k/\alpha$ per ogni $s > \mathcal{H}\text{-dim}(B)$. \square

Corollario 1.2.1.1. Sia $B \subset \mathbb{R}^n$.

1. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ è lipschitziana, allora $\mathcal{H}\text{-dim}(f(B)) \leq \mathcal{H}\text{-dim}(B)$;
2. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ è bi-lipschitziana, cioè

$$c_1 \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq c_2 \|x - y\|$$

dove $0 < c_1 \leq c_2 < \infty$, allora $\mathcal{H}\text{-dim}(f(B)) = \mathcal{H}\text{-dim}(B)$.

Dimostrazione. 1. segue dalla proposizione precedente prendendo $\alpha = 1$. La disuguaglianza inversa per 2. segue applicando la proposizione a f^{-1} . \square

Osservazione 1.2.1.1. Questo corollario rivela una proprietà fondamentale della dimensione di Hausdorff: è invariante per trasformazioni bi-lipschitz. Quindi se due insiemi hanno diversa dimensione, non ci può essere una trasformazione bi-lipschitziana tra loro. In topologia, due insiemi sono ritenuti "lo stesso", se è definito un omeomorfismo tra loro. Un approccio alla geometria frattale è considerare due insiemi "lo stesso" se è definita una trasformazione bi-lipschitziana tra loro.

Per dimostrare il prossimo teorema abbiamo bisogno della *disuguaglianza isodiametrica*, in base alla quale l'insieme avente misura di Lebesgue massima tra quelli di diametro fissato è una palla.

Proposizione 1.2.2 (disuguaglianza isodiametrica). Per ogni insieme di Borel B si ha

$$\mathcal{L}^n(B) \leq \omega_n \left(\frac{\text{diam}(B)}{2} \right)^n.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza isodiametrica può essere dimostrata con la tecnica di simmetrizzazione di Steiner. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato. Fissato $a \in S^{n-1}$. Sia π_a l'iperpiano ortogonale ad a passante per l'origine. Per ogni $b \in \pi_a$ sia

$$A_{a,b} := \{t \in \mathbb{R} \text{ t.c. } b + ta \in A\}.$$

Definiamo il simmetrizzato di A rispetto a π_a ponendo

$$S_a(A) := \{b + ta \text{ t.c. } b \in \pi_a, 2|t| < \mathcal{L}^1(A_{a,b})\}.$$

Non è difficile verificare che

1. $\text{diam}(S_a(A)) \leq \text{diam}(A)$;
2. se A è un insieme di Borel allora $\mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(S_a(A))$;
3. se A è simmetrico rispetto ad una direzione a' perpendicolare ad a , anche $S_a(A)$ mantiene la stessa simmetria.

Infatti, la 1. segue rapidamente dalla disuguaglianza

$$\mathcal{L}^1(I) + \mathcal{L}^1(I') \leq 2 \sup_{t \in I, t' \in I'} |t - t'|$$

per $I, I' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, con $I = A_{a,b}$, $I' = A_{a,b'}$; la 2. segue dal teorema di Fubini; la 3. è conseguenza diretta della costruzione di $S_a(A)$. Poniamo ora $A_0 = A, A_1 = S_{e_1}(A_0), \dots, A_n = S_{e_n}(A_{n-1})$, per costruzione $A^* = A_n$ è simmetrico rispetto a e_1, \dots, e_n , e quindi è simmetrico rispetto all'origine. Dunque A^* è contenuto nella palla di centro l'origine e raggio $\text{diam}(A^*)/2$. Quindi, preso un qualsiasi insieme di Borel B , applicando quanto visto sopra ad $A = \bar{B}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(B) &\leq \mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(A^*) \leq \omega_n \left(\frac{\text{diam}(A^*)}{2} \right)^n \\ &\leq \omega_n \left(\frac{\text{diam}(A)}{2} \right)^n \leq \omega_n \left(\frac{\text{diam}(B)}{2} \right)^n, \end{aligned}$$

che è la disuguaglianza voluta. \square

Teorema 1.2.3. Per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}^n$ ed ogni $\delta > 0$ si ha

$$\mathcal{L}^n(B) = \mathcal{H}_\delta^n(B) = \mathcal{H}^n(B).$$

Dimostrazione. Per dimostrare la disuguaglianza $\mathcal{H}^n \leq \mathcal{L}^n(B)$ non è restrittivo supporre che B sia un insieme limitato. Inoltre, non è difficile vedere che \mathcal{H}^n è finita sugli insiemi limitati. Dato $\delta > 0$ ed un aperto limitato $A \supset B$, è possibile trovare una successione di palle chiuse e disgiunte $B_h = \bar{B}_{\rho_h}(x_h) \subset A$ aventi diametro minore di δ , la cui unione ricopre \mathcal{H}^n -quasi tutto B (quindi anche \mathcal{H}_δ^n -quasi tutto B). Per la numerabile subadditività di \mathcal{H}_δ^n si ha allora

$$\mathcal{H}_\delta^n(B) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{H}_\delta^n(B_h) \leq \omega_n \sum_{h=0}^{\infty} \rho_h^n \leq \mathcal{L}^n(A).$$

Essendo δ arbitrario, si ottiene la disuguaglianza $\mathcal{H}^n(B) \leq \mathcal{L}^n(A)$, e dall'arbitrarietà di A segue la disuguaglianza desiderata. Per dimostrare che $\mathcal{L}^n(B) \leq \mathcal{H}_\delta^n(B)$ usiamo la disuguaglianza isodiametrica. Sia (B_h) un ricoprimento di B con insiemi aventi diametro minore di δ ; si ha

$$\mathcal{L}^n(B) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{L}^n(B_h) \leq \frac{\omega_n}{2^n} \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(B_h))^n.$$

Essendo il ricoprimento arbitrario, la disuguaglianza è dimostrata. \square

Osservazione 1.2.3.1. *Si nota facilmente che, nel caso $k < n$ è necessario forzare i ricoprimenti ad essere fatti da insiemi piccoli, se si vuole una buona approssimazione dell'area k -dimensionale, di qui la necessità delle pre-misure \mathcal{H}_δ^k . Dal Teorema 1.2.3 si può anche dedurre che per ogni insieme B contenuto in un k -piano $\pi \subset \mathbb{R}^n$ si ha $\mathcal{H}^k(B) = \mathcal{H}_\pi^k(B) = \mathcal{L}_\pi^k(B)$, dove $\mathcal{H}_\pi^k, \mathcal{L}_\pi^k$ indicano la misura di Hausdorff k -dimensionale e la misura di Lebesgue k -dimensionale sul piano π . Infatti, la disuguaglianza $\mathcal{H}^k \leq \mathcal{H}_\pi^k(B)$ è ovvia, mentre l'altra si ottiene proiettando i ricoprimenti di \mathbb{R}^n di B sul piano π . Più in generale, per i sottoinsiemi B di varietà k -dimensionali Γ di classe \mathcal{C}^1 si dimostra che $\mathcal{H}^k(B)$ coincide con la misura k -dimensionale di B definita mediante partizioni dell'unità e parametrizzazioni.*

Osservazione 1.2.3.2. *Per ogni insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ di Borel e per ogni $k > 0$ si ha $\mathcal{H}^k(A) = 0$ se e solo se $\mathcal{H}_\infty^k(A) = 0$.*

[\Rightarrow] *Chiaramente l'annullarsi di $\mathcal{H}^k(A)$ implica l'annullarsi di $\mathcal{H}_\infty^k(A)$.*

[\Leftarrow] *Supponiamo di poter trovare, per ogni $\sigma > 0$ una famiglia di insiemi A_i di diametro $2a_i$ la cui unione contiene A , tale che $\sum_i \omega_i a_i^k < \sigma$. Dato che il*

massimo degli a_i si stima con $(\sigma/\omega_k)^{\frac{1}{k}}$, abbiamo

$$\mathcal{H}_{\delta(\sigma)}^k(A) < \sigma \text{ con } \delta(\sigma) = 2(\sigma/\omega_k)^{\frac{1}{k}}.$$

Faccio tendere σ a zero, otteniamo $\mathcal{H}^k(A) = 0$.

1.3 Calcolo della dimensione di Hausdorff

Calcoliamo la dimensione di Hausdorff di semplici frattali. Molti calcoli della dimensione coinvolgono una stima dal basso e dall'alto. Ognuna di queste stime usualmente coinvolge osservazioni geometriche seguite da calcoli.

Polvere di Cantor

Sia P la polvere di Cantor costruita dal quadrato unitario come in figura:

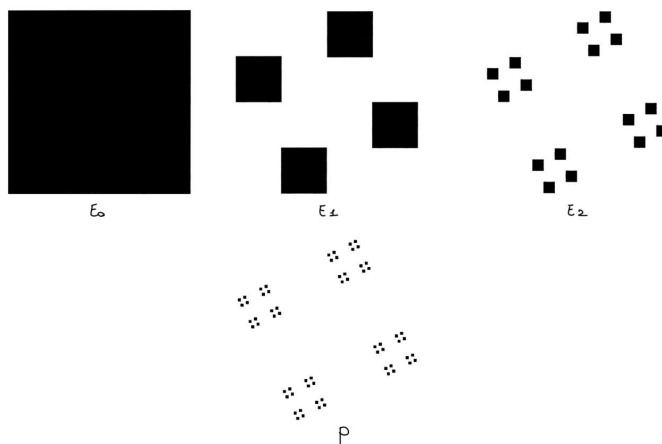


Figura 1.1: A ogni stadio della costruzione i quadrati sono divisi in 16 quadrati di lato $1/4$, a ogni passo si conserva sempre lo stesso pattern di quadrati.

Allora $1 \leq \mathcal{H}^1(P) \leq \sqrt{2}$, dunque $\mathcal{H}\text{-dim}(P) = 1$.

Dimostrazione. Osserviamo che E_k , il k -esimo passo della costruzione, consiste di 4^k quadrati di lato 4^{-k} e dunque di diametro $4^{-k}\sqrt{2}$. Prendendo i quadrati di E_k come δ -ricoprimento di P , dove $\delta = 4^{-k}\sqrt{2}$, ricaviamo la stima

$$\mathcal{H}_\delta^1(P) \leq 4^k 4^{-k} \sqrt{2}.$$

Per $k \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$, dunque otteniamo

$$\mathcal{H}^1(P) \leq \sqrt{2}.$$

Per la stima inferiore, sia π_x la proiezione ortogonale sull'asse delle ascisse. La proiezione ortogonale è tale che $|\pi_x(x) - \pi_x(y)| \leq \|x - y\|$, se $x, y \in \mathbb{R}^2$, dunque

è lipschitziana. Per come abbiamo costruito P , la proiezione o "ombra" di P sull'asse x è l'intervallo $[0, 1]$. Usando il Corollario 1.2.1.1

$$1 = \mathcal{H}^1([0, 1]) = \mathcal{H}^1(\pi_x(P)) \leq \mathcal{H}^1(P).$$

□

Curva di Von Koch

Sia K la curva di Von Koch costruita dal segmento unitario come in figura

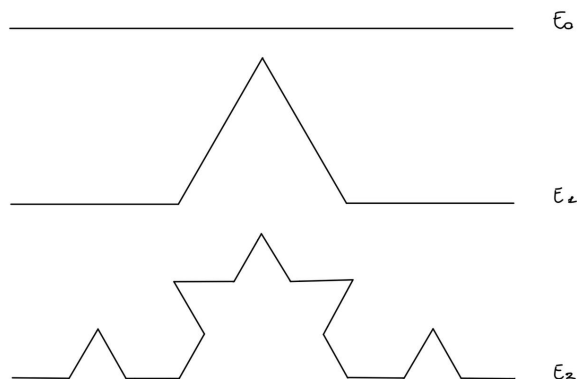


Figura 1.2: Al passo k rimpiazziamo il terzo centrale di ogni segmento dritto di E_{k-1} con gli altri due lati di un triangolo equilatero. Per $k \rightarrow \infty$, la sequenza di curve poligonali E_k raggiunge la curva limite K .

Allora $\mathcal{H}\text{-dim}(K) = \log 4 / \log 3$.

Dimostrazione. (EURISTICA)

La curva di Von Koch si divide in quattro parti $K_1 = K \cap [0, \frac{1}{4}]$, $K_2 = K \cap [\frac{1}{4}, \frac{2}{4}]$, $K_3 = K \cap [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}]$ e $K_4 = K \cap [\frac{3}{4}, 1]$. Chiaramente K_i è geometricamente simile a $K \forall i$, ma scalato di un fattore $1/3$, e $K = \bigcup_{i=1}^4 K_i$. Dunque, $\forall v$

$$\mathcal{H}^v(K) = \sum_{i=1}^4 \mathcal{H}^v(K_i) = \left(\frac{1}{3}\right)^v \sum_{i=1}^4 \mathcal{H}^v(K).$$

Assumendo che il valore critico $\bar{v} = \mathcal{H}\text{-dim}(K)$ sia tale che $0 < \mathcal{H}^{\bar{v}}(K) < \infty$ (non è sempre garantito), possiamo dividere per $\mathcal{H}^{\bar{v}}(K)$ ottenendo

$$1 = 4\left(\frac{1}{3}\right)^{\bar{v}} \Rightarrow \bar{v} = \log 4 / \log 3.$$

□

Osservazione 1.3.0.1. *Il metodo "euristico" visto in quest'ultimo esempio fornisce la giusta dimensione per molti insiemi autosimili. Ad esempio, l'insieme di Cantor è composto da due copie di se stesso scalate per un fattore $1/3$, e dunque ha dimensione $\log 2 / \log 3$. La validità di questo metodo e una formula generale verranno trattati in seguito.*

Capitolo 2

Altre nozioni di dimensione

In questo capitolo, consideriamo altre nozioni di dimensione di uso comune, oltre a quella di Hausdorff precedentemente introdotta. L'idea fondamentale dietro le seguenti definizioni di dimensione è la *misurazione in scala* δ : per ogni δ , misuriamo un insieme in modo da ignorare le irregolarità di taglia minore di δ , e vediamo come queste misurazioni si comportano per $\delta \rightarrow 0$.

Osservazione 2.0.0.1. *Benchè siano desiderabili e per quanto possibile imposte per definizione, le proprietà della dimensione di Hausdorff non sono vere necessariamente per tutte le nozioni di dimensione.*

Tutte le definizioni di dimensione a seguire sono monotone, molte sono stabili per unioni finite ma, come vedremo, alcune definizioni non esibiscono stabilità numerabile, e potrebbero avere insiemi numerabili di dimensione positiva. Tutte le dimensioni usuali sono lipschitz-invarianti e dunque anche geometricamente invarianti. Notiamo che le differenti nozioni di dimensione possono dare diverse informazioni su quali insiemi sono lipschitzianamente equivalenti.

Dunque non dovrebbe essere assunto che differenti definizioni diano lo stesso valore di dimensione, anche per insiemi regolari.

2.1 Box dimension

La *box-counting dimension* o *box dimension*, il cui primo sviluppo è datato almeno agli anni 30 del novecento [15], è una delle dimensioni più usate in geometria frattale per la sua utilità empirica.

Definizione 2.1.1. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ non vuoto e limitato; definiamo, rispettivamente, *box dimension inferiore* e *box dimension superiore* di A come

$$\dim_{\mathcal{B}} A = \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(A)}{-\log \delta}$$

$$\dim^{\mathcal{B}} A = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(A)}{-\log \delta}.$$

E la *box dimension* di A come

$$\mathcal{B}\text{-dim } A = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_{\delta}(A)}{-\log \delta}$$

(se questo limite esiste), dove $N_{\delta}(A)$ è qualsiasi dei seguenti:

1. il più piccolo numero di palle chiuse di raggio δ che ricoprono A ;
2. il più piccolo numero di cubi di lato δ che ricoprono A ;
3. il più piccolo numero di cubi di lato δ di una griglia che intersecano A ;
4. il più piccolo numero di insiemi di diametro al più δ che coprono A ;
5. il più grande numero di palle disgiunte di raggio δ centrate in A .

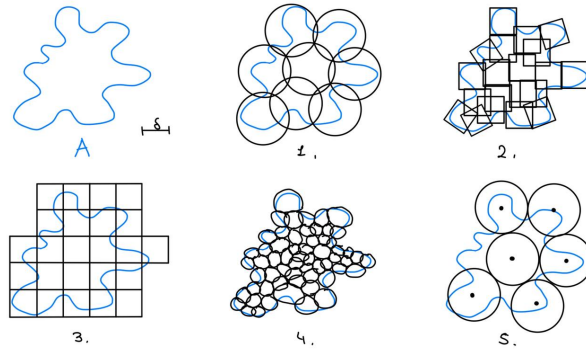


Figura 2.1: 5 modi di trovare la *box dimension* di A .

Osservazione 2.1.0.1. Assumiamo $\delta > 0$ sufficientemente piccolo da garantire che $-\log \delta$ e altre simili quantità siano strettamente positive. Inoltre, consideriamo solo insiemi non vuoti e limitati per evitare problemi come $\log 0$ e $\log \infty$.

Osservazione 2.1.0.2. *La definizione 3., ci può aiutare a interpretare il significato della box dimension: il numero di cubi di lato δ di una griglia che intersecano un'insieme sono un'indicazione di quanto si estende o quanto è irregolare l'insieme quando viene esaminato in scala δ . La dimensione riflette quanto rapidamente le irregolarità si sviluppano per $\delta \rightarrow 0$.*

Estendiamo ora la lista delle definizioni equivalenti, con una definizione di forma differente. Sia A un insieme regolare. Ricordiamo che il δ -intorno A_δ di $A \subset \mathbb{R}^n$ è

$$A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \|x - y\| \leq \delta \text{ per qualche } y \in A\}$$

cioè l'insieme di punti al più distanti δ da A .

Consideriamo la velocità in cui il volume n -dimensionale di A_δ si restringe mentre $\delta \rightarrow 0$. In \mathbb{R}^3 , si può osservare che $\mathcal{L}(A_\delta) \sim c\delta^{3-k}$, dove $k = \dim A$; quindi l'esponente di δ è indicativo della dimensione. Il coefficiente c , noto come *misura semplicemente additiva* o *content di Minkowski* [4] è una misura della lunghezza, area o volume dell'insieme. Questa idea si estende alle dimensioni frazionarie. Se $B \subset \mathbb{R}^n$ e, per qualche k , $\mathcal{L}^n(B_\delta)/\delta^{n-k}$ tende a qualche limite positivo per $\delta \rightarrow 0$, dove \mathcal{L}^n denota il volume n -dimensionale, allora ha senso considerare B k -dimensionale.

Il valore del limite è chiamato *content k -dimensionale di B* - un concetto di uso relativamente ristretto dato che non è necessariamente additivo su insiemi disgiunti (dunque non è una misura!). Anche se questo limite non esiste, quando siamo capaci di ricavare l'esponente critico di δ è in stretta relazione con la *box dimension*. Nel contesto della seguente proposizione, la *box dimension* è a volte chiamata *dimensione di Minkowski*.

Proposizione 2.1.1. Se $A \subset \mathbb{R}^n$, allora

$$\dim_B A = n - \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(A_\delta)}{\log \delta}$$

$$\dim^B A = n - \liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(A_\delta)}{\log \delta}$$

dove A_δ è il δ -intorno di A .

Dimostrazione. Se A può essere ricoperto da $N_\delta(A)$ palle di raggio $\delta < 1$ allora A_δ può essere coperto da palle concentriche di raggio 2δ . Da cui

$$\mathcal{L}^n(A_\delta) \leq N_\delta(A)\omega_n(2\delta)^n$$

dove ω_n è il volume della palla unitaria in \mathbb{R}^n . Prendendo i logaritmi

$$\frac{\log \mathcal{L}^n(A_\delta)}{-\log \delta} \leq \frac{\log 2^n \omega_n + n \log \delta + \log N_\delta(A)}{-\log \delta},$$

quindi

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}^n(A_\delta)}{-\log \delta} \leq -n + \dim_{\mathcal{B}} A$$

con una disuguaglianza simile per i limiti superiori. D'altra parte, se ci sono $N_\delta(A)$ palle disgiunte di raggio δ centrate in A allora, aggiungendo i loro volumi

$$N_\delta(A) \omega_n \delta^n \leq \mathcal{L}^n(A_\delta).$$

Prendendo i logaritmi e facendo tendere δ a 0, otteniamo la seconda disuguaglianza, usando la 5. tra le definizioni equivalenti. \square

Le seguenti proprietà elementari della *box dimension* valgono anche per la dimensione di Hausdorff, e possono essere verificate nella medesima maniera:

Teorema 2.1.2 (proprietà della box dimension). *Valgono le seguenti:*

1. $\dim_{\mathcal{B}}$ e $\dim^{\mathcal{B}}$ sono monotone ;
2. $\dim^{\mathcal{B}}$ è finitamente stabile, cioè

$$\dim^{\mathcal{B}}(A \cup B) = \max(\dim^{\mathcal{B}}(A), \dim^{\mathcal{B}}(B))$$

la corrispondente identità non vale per $\dim_{\mathcal{B}}$;

3. $\mathcal{B}\text{-dim} B = m$ se B è una m -varietà liscia;
4. Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ è una funzione lipschitziana, si ha

$$\mathcal{B}\text{-dim}(f(B)) \leq \mathcal{B}\text{-dim}(B)$$

dove M è la costante di lipschitz di f .

Dimostrazione. [1.], [2.], [3.]: immediate.

[4.]: siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ M -lipschitziana e $B \subset \mathbb{R}^n$. Per $x, y \in B$

$$\|f(x) - f(y)\| < M \|x - y\|.$$

Siano $\{U_i\}$ famiglia di insiemi di diametro al più δ che ricoprono B e $N_\delta(B)$ il minimo numero di U_i sufficiente a coprirlo \Rightarrow

$$f(B) \subset \bigcup_{i=1}^{N_\delta(B)} f(U_i)$$

cioè, le $N_\delta(B)$ immagini di questi insiemi tramite f formano un ricoprimento di $f(B)$ di insiemi di diametro al più $M\delta$, dunque: $\mathcal{B}\text{-dim}(f(B)) \leq \mathcal{B}\text{-dim}(B)$. \square

La seguente proposizione può essere utile ad illuminare alcuni limiti della *box dimension*:

Proposizione 2.1.3. Sia $F \subset \mathbb{R}^n$ e \bar{F} la sua chiusura. Allora

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{B}} \bar{F} &= \dim_{\mathcal{B}} F \\ \dim^{\mathcal{B}} \bar{F} &= \dim^{\mathcal{B}} F \end{aligned}$$

Dimostrazione. Sia B_1, \dots, B_k una collezione finita di palle chiuse di raggio δ . Se l'insieme chiuso $\bigcup_{i=1}^k B_i$ contiene F , contiene anche \bar{F} . Dunque il più piccolo numero di palle chiuse di raggio δ che ricopre F è uguale al numero necessario a coprire il più grande \bar{F} . Il risultato segue. \square

Osservazione 2.1.3.1. Un'immediata conseguenza è che se F è un sottoinsieme denso di una regione aperta di \mathbb{R}^n allora $\dim_{\mathcal{B}} F = \dim^{\mathcal{B}} F = n$.

Ad esempio, sia $F = \mathbb{Q} \cap (0, 1) \subset \mathbb{R}$. F è denso in $[0, 1] \Rightarrow \bar{F} = [0, 1] \Rightarrow \dim_{\mathcal{B}} F = \dim^{\mathcal{B}} F = 1$.

Questo mostra, inoltre, la limitata utilità della *box dimension* data dal fatto che non è stabile per unioni numerabili.

2.1.1 Relazione con la dimensione di Hausdorff

Se $B \subset \mathbb{R}^n$ può essere ricoperto da $N_\delta(B)$ insiemi di diametro δ , allora

$$\mathcal{H}_\delta^k(B) \leq N_\delta(B) \delta^k.$$

Se $1 < \mathcal{H}^k(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^k(B)$ allora $\log N_\delta(B) + k \log \delta > 0$ se δ è sufficientemente piccolo. Dunque $k \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \log N_\delta(B) / -\log \delta$ quindi

$$\mathcal{H}\text{-dim} B \leq \dim_{\mathcal{B}} B \leq \dim^{\mathcal{B}} B$$

per ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^n .

Osservazione 2.1.3.2. Anche se la dimensione di Hausdorff e la box dimension sono uguali per tanti insiemi "ragionevolmente regolari", ci sono molti esempi dove la disuguaglianza è stretta.

Infatti, ci sono insiemi numerabili che hanno box dimension diversa da 0; mentre la dimensione di Hausdorff è nulla.

A grandi linee, la definizione di box dimension esprime che $N_\delta(B) \sim \delta^{-k}$ per δ piccolo, dove $k = \mathcal{B}\text{-dim}B$. Più precisamente

$$\begin{cases} N_\delta(B)\delta^k \longrightarrow +\infty & \text{se } k < \mathcal{B}\text{-dim}(B) \\ N_\delta(B)\delta^k \longrightarrow 0 & \text{se } k > \mathcal{B}\text{-dim}(B) \end{cases}$$

Ma

$$N_\delta(B)\delta^k = \inf \left\{ \sum_i \delta^k \text{ t.c. } \{U_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento (finito) di } B \right\},$$

che dovrebbe essere confrontata con

$$\mathcal{H}_\delta^k(B) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i \in I} (\text{diam}(U_i))^k \text{ t.c. } \{U_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } B \right\}$$

che si incontra nella definizione di misura e dimensione di Hausdorff. Nel calcolare la dimensione di Hausdorff assegnamo diversi pesi, $(\text{diam}(U_i))^k$, agli insiemi ricoprenti U_i ; mentre nella box dimension usiamo lo stesso peso δ^k per ogni insieme ricoprente. Dunque le box dimension possono essere pensate come indicatori dell'efficienza con cui un insieme può essere ricoperto da piccoli insiemi della stessa taglia, mentre le dimensioni di Hausdorff riguardano ricoprimenti di piccola taglia ma altamente variabile.

Osservazione 2.1.3.3. Si potrebbe considerare la quantità

$$\nu(B) = \liminf_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(B)\delta^k$$

ma questa NON dà una misura su un sottoinsieme di \mathbb{R}^n .

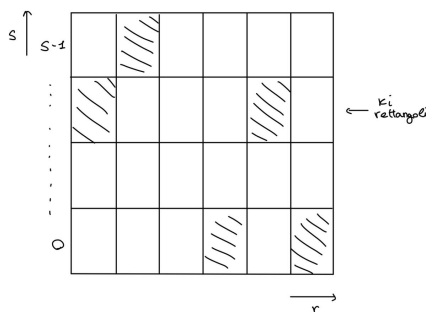
2.1.2 Esempio di calcolo della box dimension

In questo paragrafo, prendiamo in considerazione certi sottoinsiemi auto-affini di \mathbb{R}^2 , costruiti come segue.

Scegliamo due numeri interi $r > s > 1$, e nel quadrato unitario $[0, 1]^2$ disegniamo una griglia con linee $[0, 1] \times \{i/s\}$ per $0 \leq i \leq s$ e $\{j/r\} \times [0, 1]$ per $0 \leq j \leq r$. Riempiamo alcuni dei rettangoli- questi riempimenti ci danno la prima approssimazione M_1 del frattale.

Sia $L = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}$.

Rimpiazzando ogni rettangolo riempito con una traslazione di $L^{-1}(M_1)$ ci da la seconda approssimazione M_2 . Procedendo induttivamente definiamo M_n rimpiazzando i rettangoli riempiti in M_{n-1} con copie di $L^{-(n-1)}(M_1)$. Allora $M_n \rightarrow E$ un insieme compatto non vuoto di \mathbb{R}^2 (in metrica Hausdorff). Etichettiamo le righe della griglia originale $0, 1, \dots, s - 1$. Chiamiamo k_i il numero di rettangoli pieni nella riga i di M_1 .



Proposizione 2.1.4. Sia $t = |\{i \text{ t.c. } k_i \neq 0\}|$. Allora

$$\mathcal{B}\text{-dim}E = \left(\frac{1}{\log s} - \frac{1}{\log r} \right) \log t + \frac{\log \left(\sum_{i=0}^{s-1} k_i \right)}{\log r}.$$

Dimostrazione. Sia $Gr(n)$ la griglia di quadrati in $[0, 1]^2$ di lato r^{-n} i cui angoli hanno coordinate della forma $(i/r^n, j/r^n)$, per $0 \leq i, j \leq r^n$.

Possiamo stimare la *box dimension* usando ricoprimenti di quadrati in $\bigcup_n Gr(n)$.

Infatti, definito $N'(r^{-n})$ il minimo numero di quadrati in $Gr(n)$ necessari a ricoprire E :

Osservazione 2.1.4.1.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N'(r^{-n})}{n \log r} = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N(\epsilon)}{-\log \epsilon}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N'(r^{-n})}{n \log r} = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{N(\epsilon)}{-\log \epsilon}$$

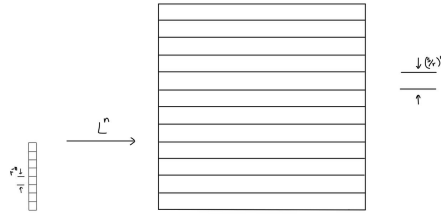
Infatti, per ogni $\epsilon > 0$, e scelto n tale che $r^{-n} \leq \epsilon \leq r^{-n-1}$, si verifica che ogni ϵ -palla è contenuta in 9 quadrati di $Gr(n-1)$ e dunque $9r^2$ di $Gr(n)$.

Ogni quadrato di $Gr(n)$ è contenuto in una palla di raggio ϵ . Dunque $N(\epsilon) \leq N'(r^{-n}) \leq 9r^2 N(\epsilon)$.

Questo, insieme al fatto che $\log \epsilon / -n \log r \rightarrow 1$ per $\epsilon \rightarrow 0$ prova quanto osservato.

Chiamiamo n -cilindro di E l'intersezione di E con un rettangolo di pieno di M_n .

Il nostro insieme è auto-affine e quindi, per ogni n -cilindro C_n di E , $L^n(C_n)$ è solo una copia di $E \Rightarrow$ un ricoprimento di C_n di quadrati di $Gr(n)$ corrisponde esattamente a un ricoprimento di E composto da strisce orizzontali. Di conseguenza, possiamo contare il numero di quadrati di $Gr(n)$ richiesti a coprire C_n contando il numero di strisce orizzontali di altezza $(s/r)^n = \lambda^n$ che intersecano E .



Sappiamo già che esattamente t^j strisce orizzontali di altezza s^{-j} intersecano E . Scegliamo n in modo che $\lambda^n \leq s^{-j} \leq \lambda^{n-1}$ e, prendendo i logaritmi, otteniamo:

$$n \left(\frac{\log r}{\log s} - 1 \right) \geq j > (n-1) \left(\frac{\log r}{\log s} - 1 \right)$$

Le strisce orizzontali intersecano l'asse delle y in intervalli di lunghezze λ^n e s^{-j} . Ogni s^{-j} -intervallo interseca al più $[s^{-j} \lambda^{-n}] + 1$ λ^n -intervalli, e ogni

λ^{n-1} -intervallo interseca al più $[s^j \lambda^{n-1}] + 1$ s^{-j} -intervalli. Da cui

$$|\{\lambda^n\text{-strisce necessarie a coprire } E\}| \leq t^j([s^{-j} \lambda^{-n}] + 1)$$

$$|\{\lambda^{n-1}\text{-strisce necessarie a coprire } E\}| \geq t^j([s^j \lambda^{n-1}] + 1)$$

Ora, $\log(s^{-j} \lambda^{-n})$ è limitato superiormente e inferiormente come sopra da costanti. Dunque, esistono $c_1, c_2 > 0$ costanti tale

$$|\{\text{quadrati in } Gr(n) \text{ necessari a coprire } C_n\}| = |\{\lambda^n\text{-strisce necessarie a coprire } E\}| \in [c_1, c_2] t^j.$$

Ci sono $(\sum_{i=0}^{s-1} k_i)^n$ n -cilindri distinti in E , dunque:

$$\dim_{\mathcal{B}}(E) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(c_2 t^j (\sum k_i)^n)}{\log r^{-n}} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(c_1 t^j (\sum k_i)^n)}{\log r^{-n}} \leq \dim^{\mathcal{B}}(E)$$

Da cui

$$\mathcal{B}\text{-dim } E = \frac{(\frac{\log r}{\log s} - 1) \log t + \log(\sum k_i)}{\log r}$$

□

Il seguente risultato mostra che E ha, in generale, dimensione di Hausdorff diversa dalla *box dimension*.

Proposizione 2.1.5. Sia $p = (p_0, \dots, p_{s-1})$, con $\sum_{i=0}^{s-1} p_i = 1$, $p_i > 0$ e $p_i = 0$ se $k_i = 0$.

$$\mathcal{H}\text{-dim } E = \sup_{\vec{p}} \left(\frac{-\sum_{i=0}^{s-1} p_i \log p_i}{\log s} + \sum_{i=0}^{s-1} p_i \frac{\log p_i}{\log r} \right).$$

La dimostrazione è omessa, in quanto utilizza interessanti risultati (la stima inferiore, ad esempio, utilizza il Teorema di Marstrand) che, però, prescindono dall'obiettivo di questa tesi. Per un approfondimento, si consulti [3].

Osservazione 2.1.5.1. Si noti che, in questo esempio, la dimensione dipende non solo dal numero di rettangoli selezionati a ogni stadio, ma anche dalle loro relative posizioni.

2.2 Packing dimension

Le misure *packing* sono state storicamente introdotte [19] per complementare la teoria delle misure di Hausdorff. Mentre le misure di Hausdorff sono connesse intimamente con stime superiori di densità, l'importanza delle misure *packing* viene dalla loro connessione con le stime inferiori di densità.

Definizione 2.2.1. Sia $S \subset \mathbb{R}^n$. Chiamiamo *packing* di S una collezione finita di palle chiuse $\{B(x_i, r_i) : x_i \in S\}$ tale che, per ogni $i \neq j$, $x_j \notin B(x_i, r_i)$.

Inoltre, chiamiamo δ -*packing* un *packing* tale che $r_i \leq \delta$ per ogni i .

Definizione 2.2.2. Sia $k \geq 0$ e sia $S \subset \mathbb{R}^n$. Indichiamo con $\mathcal{P}^k(S)$ la misura *packing* k -dimensionale di S , definita da

$$\mathcal{P}^k(S) = \inf \left\{ \sum_i \mathcal{P}_0^k(S_i) : S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right\}.$$

dove, per $0 < \delta \leq +\infty$, $\mathcal{P}_\delta^k(S)$ è definita da

$$\mathcal{P}_\delta^k(S) = \sup \left\{ \sum_i (\text{diam}(B_i))^k : \{B_i\} \text{ è } \delta\text{-packing di } S \right\}.$$

E, per $\delta = 0$

$$\mathcal{P}_0^k(S) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{P}_\delta^k(S).$$

Teorema 2.2.1 (proprietà della misura *packing*). *Valgono le seguenti:*

1. $\mathcal{P}_\sigma^k(S) \leq \mathcal{P}_\tau^k(S)$ se $0 < \sigma \leq \tau$;
2. $\mathcal{P}_\delta^k(S) \leq \mathcal{P}_\delta^k(T)$ se $S \subset T$;
3. $\mathcal{P}_\delta^k(S \cup T) \leq \mathcal{P}_\delta^k(S) + \mathcal{P}_\delta^k(T)$;
4. $\mathcal{P}_\delta^k(S \cup T) = \mathcal{P}_\delta^k(S) + \mathcal{P}_\delta^k(T)$ se S, T distano più di δ ;
5. Se $\delta > 0$, $\mu > 0$ e $Q \subset \mathbb{R}^n$, allora $\exists \sigma > 0$ tale che $\mathcal{P}_\delta^k(R) > \mathcal{P}_\delta^k(Q) - \mu$ ogni volta che $R \subset \mathbb{R}^n$ interseca ogni palla $B(x, \sigma)$, $x \in Q$.

Dimostrazione. [1.],[2.] : seguono immediatamente dalla definizione.

[3.], [4.] : seguono decomponendo un packing arbitrario di $S \cup T$ in packing di S e T rispettivamente.

[5.] : sia $\{B(q_i, r_i) : i \in I\}$ un δ -packing di Q tale che

$$\sum_{i \in I} (\text{diam}(B_i))^k > \mathcal{P}_\delta^k(Q) - \mu.$$

Dato che le palle B_i sono chiuse, $\exists \sigma > 0$ tale che, se $x(q_i) \in B(q_i, \sigma)$, $i \in I$, allora $x(q_j) \notin B(q_i, \sigma)$ per ogni $i, j \in I$, $i \neq j$. Questo σ ha la proprietà cercata. \square

Osservazione 2.2.1.1. *Anche se [4.] implica che \mathcal{P}_0^k è (finitamente) subadditiva, non è, in generale, numerabilmente subadditiva; il che spiega l'esistenza dell'ultimo passaggio nella definizione di \mathcal{P}^k .*

Possiamo definire la dimensione *packing* di $S \subset \mathbb{R}^n$ nella maniera naturale:

$$\mathcal{P}\text{-dim } S = \sup\{k : \mathcal{P}^k(S) = \infty\} = \inf\{k : \mathcal{P}^k(S) = 0\}.$$

La sottesa struttura di misura implica immediatamente la monotonia e la stabilità per unioni numerabili.

2.2.1 Relazioni con altre dimensioni

Ora investighiamo la relazione della dimensione *packing* quelle esposte precedentemente.

Lemma 2.2.2. *Sia $S \subset \mathbb{R}^n$. $\mathcal{P}\text{-dim } S \leq \dim^{\mathcal{B}} S$.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{P}\text{-dim } S = 0$, il risultato è ovvio.

Altrimenti, siano t, s tali che $0 < t < s < \mathcal{P}\text{-dim } (S) \Rightarrow \mathcal{P}^s(S) = \infty \Rightarrow \mathcal{P}_0^s(S) = \infty$. Dunque, dato $0 < \delta \leq 1$, ci sono palle disgiunte $\{B_i\}$, di raggio al più δ centrate in S , tali che $1 < \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(B_i))^s$.

Supponiamo che, per ogni k , esattamente n_k di queste palle soddisfi $2^{-k-1} < \text{diam}(B_i) \leq 2^{-k}$; allora

$$1 < \sum_{k=0}^{\infty} n_k 2^{-ks}.$$

Deve esistere k con $n_k > 2^{kt}(1 - 2^{t-s})$; altrimenti la somma appena scritta sarebbe maggiorata da 1 (maggiorando ogni n_k con $2^{kt}(1 - 2^{t-s})$ si ottiene una serie geometrica). Queste n_k palle contengono palle di raggi $2^{-k-2} \leq \delta$ centrate in S . Quindi se $N_\delta(S)$ rappresenta il maggior numero di palle disgiunte di raggio δ centrate in S

$$N_{2^{-k-2}}(S)(2^{-k-2})^t \geq n_k(2^{-k-2})^t > 2^{kt}(1 - 2^{t-s})$$

dove $2^{-k-2} < \delta$. Segue che $\limsup_{\delta \rightarrow 0} N_\delta(S)\delta^t > 0$, dunque $\dim^{\mathcal{B}} S \geq t$. Questo è vero per ogni $0 < t < \mathcal{P}\text{-dim } S$, da cui la tesi. \square

Proposizione 2.2.3. Sia $S \subset \mathbb{R}^n$ e siano $\{\{S_i\}_j\}_{j \in J}$ suoi possibili ricoprimenti numerabili.

$$\mathcal{P}\text{-dim } S = \inf_j \left\{ \sup_i \dim^{\mathcal{B}} S_i : S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right\}.$$

Dimostrazione. $[\leq]$: Se $S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ allora, per il lemma precedente

$$\mathcal{P}\text{-dim } S \leq \sup_i \mathcal{P}\text{-dim } S_i \leq \sup_i \dim^{\mathcal{B}} S_i$$

$[\geq]$: Se $s > \mathcal{P}\text{-dim } S \Rightarrow \mathcal{P}^s(S) = 0$. Dunque, per definizione $S \subset \bigcup_i S_i$ per una collezione di insiemi S_i con $\mathcal{P}_0^s < \infty$.

Dunque, per ogni i , se δ è abbastanza piccolo, allora $\mathcal{P}_\delta^s(S_i) < \infty$, quindi $N_\delta(S_i)\delta^s$ è limitato per $\delta \rightarrow 0$, dove $N_\delta(S_i)$ è il più grande numero di palle disgiunte centrate in F_i . Dunque $\dim^{\mathcal{B}} S_i \leq s$ per ogni i , dando

$$\inf_j \left\{ \sup_i \dim^{\mathcal{B}} S_i : S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \right\} \leq s$$

come voluto. \square

Proposizione 2.2.4 (disuguaglianza riassuntiva). Sia $S \subset \mathbb{R}^n$.

$$\mathcal{H}\text{-dim } S \leq \mathcal{P}\text{-dim } S \leq \dim^{\mathcal{B}} S.$$

2.2.2 Degli esempi

Le misure *packing* e di Hausdorff possono essere distinte in maniera netta per quanto riguarda gli insiemi limite di gruppi Kleiniani [18] che sono geometricamente finiti ma hanno cuspidi.

"Packing" apolloniano: il "*packing*" apolloniano è l'insieme limite della successione seguente.

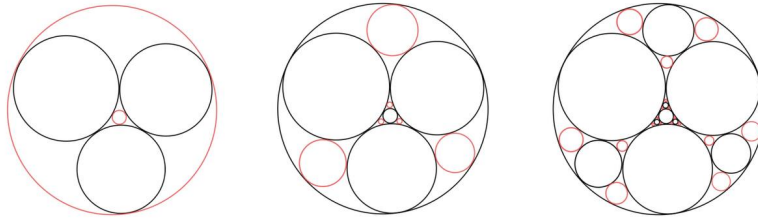


Figura 2.2: da sinistra a destra: E_0 , E_1 , E_2 ; i primi tre insiemi della successione il cui limite è il "*packing*" apolloniano.

Si possono ottenere diversi "*packing*" apolloniani, in base alla costruzione dell'insieme di partenza E_0 .

La costruzione di E_0 ha inizio con tre cerchi (indicati in nero in figura) tangenti a due a due; questi possono avere taglie diverse, e sono permesse tutte le reciproche posizioni, purchè rispettino la condizione di tangenza. Esistono due cerchi (indicati in rosso in figura)- i famosi cerchi di Apollonio- che sono tangenti agli altri tre. L'insieme di questi cinque cerchi costituisce E_0 .

I cerchi costituenti E_0 sono separati tra loro da sei regioni curvate triangolari, ognuna limitata dagli archi di tre circonferenze tangenti. E_1 si realizza costruendo un cerchio tangente agli archi in ognuna di queste regioni; si procede poi induttivamente. Al passo n della costruzione, aggiungiamo $2 \cdot 3^n$ nel modo sopracitato a E_{n-1} ; ottenendo un totale di $3^{n+1} + 2$ cerchi dopo n passi.

Al limite, questa successione produce il frattale cercato.

Il "*packing*" apolloniano è interessante poichè mostra la differenza tra misura di Hausdorff e *packing*: ha infatti dimensione di Hausdorff $\delta \sim 1.3$ dunque misura di Hausdorff (r^δ per un certo r dipendente dai raggi impiegati nella costruzione) positiva (localmente finita). Mentre la (r^δ) misura *packing* è localmente infinita.

2.3 Dimensioni "impronta"

Le dimensioni "impronta", innovazione introdotta da Rogers [16], sono dimensioni di tipo Hausdorff di natura differente: infatti, riflettono le caratteristiche non-isotropiche di un insieme.

Queste dimensioni possono essere pensate come "impronte digitali" che permettono a insiemi con differenti caratteristiche di essere distinti, anche se hanno medesima dimensione di Hausdorff.

Restringiamo la nostra attenzione, a titolo di esempio, ai sottospazi del piano; nel qualcaso le dimensioni impronta saranno planari.

Definizione 2.3.1. Sia $B \subset \mathbb{R}^2$. Indichiamo con $\text{print } B$, la dimensione impronta di B , definita da

$$\text{print } B = \{(s, t) : s, t > 0 \text{ e } \mathcal{H}^{s,t}(B) > 0\}$$

dove, per $s, t > 0$, $\{R_i\}$ indica un δ -ricoprimento di B di rettangoli di lati a_i, b_i , $\mathcal{H}_\delta^{s,t}(B)$ e $\mathcal{H}^{s,t}(B)$ sono, rispettivamente

$$\mathcal{H}_\delta^{s,t}(B) = \inf \left\{ \sum_i a_i^s b_i^t : B \subset \bigcup_i R_i \right\}.$$

$$\mathcal{H}^{s,t}(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^{s,t}(B).$$

Osservazione 2.3.0.1. $\mathcal{H}^{s,0}$ è una variante delle misure di Hausdorff in cui i ricoprimenti sono dati solo da rettangoli.

Proposizione 2.3.1 (proprietà dell'impronta). Dalla definizione e dalle proprietà standard delle misure di tipo Hausdorff, seguono immediatamente le seguenti:

1. Se $B_1 \subset B_2 \Rightarrow \text{print } B_1 \subset \text{print } B_2$;
2. Sia $\{A_i\}$ famiglia di insiemi di $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$$\text{print} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{print } A_i;$$

3. Se $(s, t) \in \text{print } B$ e (s', t') è tale che

$$s' + t' \leq s + t \wedge t' \leq t$$

allora $(s', t') \in \text{print } B$.

2.3.1 Alcuni esempi

Esempio 1: Mostriamo una grande forza della dimensione impronta: è in grado di distinguere le qualità di due insiemi frattali con la medesima dimensione di Hausdorff. I due insiemi che confronteremo sono prodotti di insiemi frattali; in tal caso, dimensionalmente, è vera la seguente:

Osservazione 2.3.1.1. *Se $E, F \subset \mathbb{R}$, con F insieme di Cantor uniforme, allora $\mathcal{H}\text{-dim}(E \times F) = \mathcal{H}\text{-dim}E + \mathcal{H}\text{-dim}F$.*

- **(Sinistra):** Nel contesto dell'osservazione $E = F$, insiemi di Cantor uniformi, con $\mathcal{H}\text{-dim}E = \mathcal{H}\text{-dim}F = \frac{3}{4} \Rightarrow \mathcal{H}\text{-dim}(E \times F) = \frac{3}{2}$; si noti che qualitativamente l'insieme è una "polvere";
- **(Destra):** In questo caso, $E \neq F$, un segmento, ed F insieme di Cantor uniforme, con $\mathcal{H}\text{-dim}E = 1$ e $\mathcal{H}\text{-dim}F = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{H}\text{-dim}(E \times F) = \frac{3}{2}$; si noti che qualitativamente l'insieme è "stratificato";

La figura rappresenta le loro dimensioni impronta a confronto, che sono evidentemente distinte.

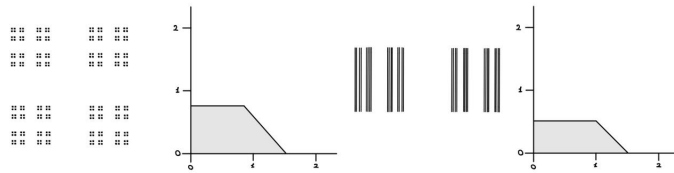


Figura 2.3: Confronto dell'impronta di un insieme "polvere" e di uno "stratificato" con la medesima dimensione di Hausdorff. Si noti che la dimensione di Hausdorff di un insieme è data dal punto più a destra della print che interseca l'asse x .

Esempio 2: Mostriamo ora uno svantaggio delle dimensioni impronta: non sono invarianti per trasformazioni bi-lipschitz. Infatti, il segmento e la curva convessa liscia sono lipschitzianamente equivalenti, ma hanno impronte diverse. L'impronta tiene, infatti, conto della curvatura.

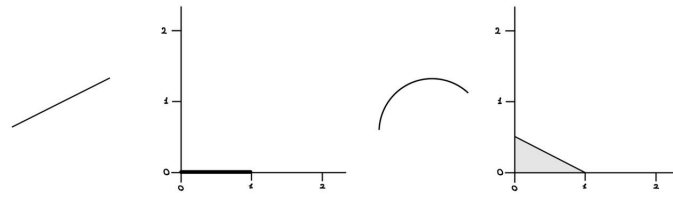


Figura 2.4: Confronto dell'impronta di un segmento e di un arco di circonferenza. Si noti che la dimensione di Hausdorff di un insieme è data dal punto più a destra della print che interseca l'asse x .

Capitolo 3

Dimensione e autosimilarità

I sistemi di funzioni iterate (IFS) sono stati concepiti nella loro forma attuale da John Hutchinson [9] e sono uno dei mezzi più diffusi e generali impiegati a generare insiemi frattali. Utilizzando i sistemi di funzioni iterate è possibile studiare e classificare un'ampia gamma di insiemi frattali, inclusi esempi da noi precedentemente incontrati, quali: gli insiemi di Cantor classici, gli insiemi limite di gruppi Kleiniani e i tappeti di Sierpinski. Alcuni di questi sono tradizionalmente interpretati come il limite di un processo di microscopici raffinamenti successivi. Tuttavia, una visione più moderna li interpreta come attrattori di IFS e, in quanto tali, generabili globalmente.

3.1 Sistemi di funzioni iterate

Iniziamo la trattazione nel contesto degli spazi metrici in generale. In seguito, tratteremo nello specifico il caso di \mathbb{R}^n .

Definizione 3.1.1. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $A, B \subset \mathcal{K}(X)$. L'applicazione

$$d_H : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \longrightarrow [0, +\infty)$$

definita da $d_H(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$ è chiamata *metrica di Hausdorff*. Dove

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X : K \text{ è compatto}\}$$

e

$$d(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) = \sup_{x \in A} \left\{ \inf_{y \in B} d(x, y) \right\}.$$

Osservazione 3.1.0.1. $(\mathcal{K}(X), d_H)$ è uno spazio metrico completo se (X, d) lo è, compatto se (X, d) è compatto e separabile se (X, d) è separabile.

Definizione 3.1.2. Siano (X, d) uno spazio metrico e $F : X \rightarrow X$ una funzione. Denotiamo $\rho_F \in [0, +\infty]$ la costante di Lipschitz associata ad F , dove

$$\rho_F = \sup_{x, y \in X; x \neq y} \frac{d(F(x), F(y))}{d(x, y)}.$$

Diamo che F è una *funzione lipschitziana* se $\rho_F < +\infty$ e una *contrazione* se $\rho_F < 1$. Se, inoltre, F è tale che $d(F(x), F(y)) = \rho_F d(x, y)$, F trasforma insiemi in insiemi geometricamente simili, e viene dunque chiamata *similitudine contrattiva*.

Definizione 3.1.3. Un *sistema di funzioni iterate* (IFS) su uno spazio metrico (X, d) è una famiglia finita di contrazioni $\mathcal{F} = \{F_k\}_{k=1}^n$ su X .

Definizione 3.1.4. Sia $\mathcal{F} = \{F_k\}_{k=1}^n$ un sistema di funzioni iterate sullo spazio metrico X . La funzione $F : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ definita da

$$F(B) := \bigcup_{k=1}^n F_k(B)$$

$\forall B \subset \mathcal{K}(X)$ è chiamata *operatore frattale* associato all'IFS \mathcal{F} .

Osservazione 3.1.0.2. Sia ρ_k la costante di Lipschitz di F_k . L'operatore frattale F è una contrazione che soddisfa

$$\rho_F \leq \max_{k \in \{1, \dots, n\}} \rho_k.$$

Infatti, $\forall A, B \in \mathcal{K}(X)$

$$d_H(F(A), F(B)) \leq \max_i d_h(F_i(A), F_i(B)) \leq (\max_i \rho_i) d_H(A, B).$$

Definizione 3.1.5. Sia $A \subset X$, $A \neq \emptyset$ e sia \mathcal{F} un sistema di funzioni iterate. Diciamo che A è \mathcal{F} -invariante (o che è un *attrattore* per \mathcal{F}) se $F(A) = A$.

Teorema 3.1.1. Sia $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_N\}$ un sistema di funzioni iterate su X e sia $F : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(X)$ il suo operatore frattale associato, con F^k la sua k -esima iterata. Allora:

1. $\exists! K$ attrattore per il sistema;
2. $\forall E \in \mathcal{K}(X)$, $E \neq \emptyset$ tale che $F_i(E) \subset E \forall i$

$$K = \bigcap_{k=0}^{\infty} F^k(E)$$

Dimostrazione. Sia $E \in \mathcal{K}(X)$, $E \neq \emptyset$ tale che $F_i(E) \subset E \forall i$. Allora $F^k(E) \subset F^{k-1}(E)$, dunque $F^k(E)$ è una sequenza decrescente di compatti non vuoti, che necessariamente ha intersezione compatta non vuota $K = \bigcap_k F^k(E)$.

Dato che $F^k(E)$ è una sequenza decrescente di insiemi, segue che $F(K) = K$, dunque K è un'attrattore del sistema. L'unicità segue dal teorema delle contrazioni. \square

3.2 Dimensione insiemi autosimili

Consideriamo adesso il caso in cui $X = \mathbb{R}^n$ e le funzioni considerate sono similitudini contrattive; indichiamo con $\mathcal{S} = \{S_k\}_{k=1}^N$ un sistema di funzioni iterate composto da similitudini contrattive di ragione ρ_k .

Definizione 3.2.1. Diciamo che K è *autosimile* rispetto \mathcal{S} se

- K è invariante rispetto \mathcal{S} ;
- $\mathcal{H}^k(K) > 0$, $\mathcal{H}^k(S_i(K) \cap S_j(K)) = \emptyset$ per $i \neq j$, dove $k = \mathcal{H}\text{-dim}K$.

Teorema 3.2.1. *Esiste un unico insieme compatto \mathcal{S} -invariante $K \neq \emptyset$, e inoltre $\mathcal{H}^\alpha(K) < +\infty$, ove α (detta dimensione di similitudine) è la soluzione dell'equazione $\sum_{i=1}^N \rho_i^\alpha = 1$.*

Dimostrazione. (TRACCIA) Lo spazio $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), d_H)$ è localmente compatto, quindi completo, ed è facile verificare che l'operatore frattale

$$S(C) := \bigcup_{i=1}^N S_i(C)$$

è una contrazione in $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ di costante $\rho_S = \max_i \rho_i$. La costruzione dell'insieme invariante sia fa quindi prendendo un qualunque insieme iniziale $K_0 \neq \emptyset$ e definendo induttivamente $K_{k+1} = S(K_k)$. Per il principio delle contrazioni la successione $\{K_h\}$ converge all'unico insieme \mathcal{S} -invariante K . Infine, pur di scegliere un insieme iniziale K_0 sufficientemente grande, i ricoprimenti

$$C_{i_1, \dots, i_k} := S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(K_0) \quad 1 \leq i_j \leq N$$

consentono (per $k(\delta)$ sufficientemente grande) di stimare $\mathcal{H}_\delta^\alpha(K)$ uniformemente in δ e di ottenere la finitezza di \mathcal{H}^α . \square

Osservazione 3.2.1.1. Ricordiamo che la convergenza nella metrica Hausdorff (nota anche come convergenza secondo Kuratowski) è caratterizzata per successioni di compatti equilimitati dalle condizioni

$$\begin{cases} \forall x_h \in K, x_h \rightarrow x \Rightarrow x \in K \\ \forall x \in K \exists x_h \in K_h \text{ t.c. } x_h \rightarrow x. \end{cases}$$

Per ottenere stime dal basso della misura α -dimensionale servono ipotesi aggiuntive sulla famiglia di similitudini.

Definizione 3.2.2. Diciamo che la famiglia di similitudini \mathcal{S} soddisfa la *condizione di aperto* se esiste un aperto limitato $A \subset \mathbb{R}^n$ tale che

- $S_i(A) \subset A \quad \forall i$;
- $S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset$ se $i \neq j$.

Lemma 3.2.2. Sia $\{V_i\}$ una collezione di aperti disgiunti di \mathbb{R}^n tali che ogni V_i contiene una palla di raggio $a_1 r$ ed è contenuto in una palla di raggio $a_2 r$. Allora ogni palla B di raggio r interseca al più $(1 + 2a_2)^n a_1^{-n}$ delle chiusure \bar{V}_i .

Dimostrazione. Se \bar{V}_i incontra B , allora è contenuto nella palla concentrica con B di raggio $(1 + 2a_2)r$. Sia q il numero di \bar{V}_i che intersecano B . Allora, sommando i volumi delle corrispondenti palle aperte di raggio $a_1 r$, segue che $q(a_1 r)^n \leq (1 + 2a_2)^n r^n$, ottenendo così la stima richiesta. \square

Teorema 3.2.3. Se la famiglia di similitudini \mathcal{S} verifica la condizione di aperto, allora l'insieme \mathcal{S} -invariante K è tale che:

1. $\mathcal{H}\text{-dim } K = \mathcal{B}\text{-dim } K = \alpha$;
2. $0 < \mathcal{H}^\alpha(K) < +\infty$ (dunque è autosimile).

Dimostrazione. PASSO 1: otteniamo una stima dall'alto per la misura di Hausdorff.

Sia α la dimensione di similitudine di $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$.

Sia $\mathcal{I}_k = \{(i_1, \dots, i_k) \text{ con } 1 \leq i_j \leq N\}$. Per ogni insieme A e $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{I}_k$, scriviamo $A_{i_1, \dots, i_k} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}(A)$. Segue che

$$K = \bigcup_{\mathcal{I}_k} K_{i_1, \dots, i_k}.$$

Controlliamo che questi ricoprimenti di K diano un'adatta stima superiore per la misura di Hausdorff. Dato che la mappa $S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$ è una similitudine di ragione $\rho_{i_1} \dots \rho_{i_k}$

$$\sum_{\mathcal{I}_k} \text{diam}(K_{i_1, \dots, i_k})^\alpha = \sum_{\mathcal{I}_k} (\rho_{i_1} \dots \rho_{i_k})^\alpha \text{diam}(K)^\alpha.$$

Riordinando i termini e ricordando che α è tale che $\sum_{i=1}^N \rho_i^\alpha = 1$,

$$\sum_{\mathcal{I}_k} (\rho_{i_1} \dots \rho_{i_k})^\alpha \text{diam}(K)^\alpha = \left(\sum_{i_1} \rho_{i_1}^\alpha \right) \dots \left(\sum_{i_k} \rho_{i_k}^\alpha \right) \text{diam}(K)^\alpha = \text{diam}(K)^\alpha.$$

Per ogni $\delta > 0$, possiamo scegliere k tale che $\text{diam}(K_{i_1, \dots, i_k}) \leq (\max \rho_i)^\alpha \text{diam}(K) \leq \delta$, quindi

$$\mathcal{H}^\alpha(K) \leq \text{diam}(K)^\alpha.$$

PASSO 2: otteniamo una stima dal basso per la misura di Hausdorff introducendo una distribuzione di massa su K . A tale scopo, usiamo il seguente risultato:

Proposizione 3.2.4 (Principio della distribuzione di massa). Sia μ una distribuzione di massa su F . Se per qualche s ed $\exists c(s) > 0$, $\epsilon(s) > 0$ tali che $(\forall U : \text{diam}(U) \leq \epsilon \Rightarrow \mu(U) \leq c \text{diam}(U)^s) \Rightarrow$

1. $\mathcal{H}^s(F) \geq \mu(F)/c$;
2. $s \leq \mathcal{H}\text{-dim } F \leq \dim_{\mathcal{B}} F \leq \dim^{\mathcal{B}} F$.

Sia $\mathcal{I} = \{(i_1, i_2, \dots) : 1 \leq i_j \leq N\}$, insieme delle sequenze infinite, e sia $I_{i_1, \dots, i_k} = \{(i_1, \dots, i_k, q_{k+1}, \dots) : 1 \leq q_j \leq N\}$ il "cilindro" consistente delle sequenze in \mathcal{I} che iniziano per (i_1, \dots, i_k) .

Possiamo definire una distribuzione di massa μ su \mathcal{I} tale che $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = (\rho_{i_1} \dots \rho_{i_k})^\alpha$. Dato che $(\rho_{i_1} \dots \rho_{i_k})^\alpha = \sum_{i=1}^N (\rho_{i_1} \dots \rho_{i_k} \rho_i)^\alpha$, segue che $\mu(I_{i_1, \dots, i_k}) = \sum_{i=1}^N \mu(I_{i_1, \dots, i_k, i})$. Segue che μ è effettivamente una distribuzione di massa sui sottoinsiemi di \mathcal{I} con $\mu(\mathcal{I}) = 1$. Possiamo estendere μ a una distribuzione di massa $\tilde{\mu}$ su K in una maniera naturale definendo

$$\tilde{\mu}(A) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in A\}$$

per sottoinsiemi A di K , dove $x_{i_1, i_2, \dots} = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1, \dots, i_k}$. Dunque la $\tilde{\mu}$ -massa di un insieme è la μ -massa delle corrispondenti sequenze. È facile verificare che $\tilde{\mu}(F) = 1$.

Mostriamo che $\tilde{\mu}$ verifica il principio della distribuzione di massa: sia V l'insieme aperto dato dalla condizione di aperto. Dato che $\bigcup_{i=1}^m S_i(\bar{V}) = S(\bar{V}) \subset \bar{V}$, la sequenza decrescente di iterate $S^k(\bar{V})$ converge a K . In particolare, $K \subset \bar{V}$ e $K_{i_1, \dots, i_k} \subset \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$ per ogni sequenza finita (i_1, \dots, i_k) . Sia B una palla qualsiasi di raggio $r < 1$. Stimiamo $\tilde{\mu}(B)$ considerando gli insiemi V_{i_1, \dots, i_k} con diametri confrontabili con quelli di B e con chiusure che intersecano $K \cap B$. Tagliamo ogni sequenza infinita $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$ dopo il primo termine i_k per cui

$$\left(\min_{1 \leq i \leq N} \rho_i \right) r \leq \rho_{i_1} \dots \rho_{i_k} \leq r$$

e sia \mathcal{Q} l'insieme finito di tutte le sequenze finite ottenute in questa maniera. Allora per ogni sequenza infinita $(i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I}$ c'è esattamente un valore di k con $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$. Dato che V_1, \dots, V_N sono disgiunti, lo sono anche $V_{i_1, \dots, i_k, 1}, \dots, V_{i_1, \dots, i_k, N}$ per ogni (i_1, \dots, i_k) . Usando questa osservazione in maniera innestata, segue che la collezione di insiemi aperti $\{V_{i_1, \dots, i_k} : (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}\}$ è disgiunta. Similmente $K \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} K_{i_1, \dots, i_k} \subset \bigcup_{\mathcal{Q}} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$. Scegliamo a_1 e a_2 tali che V contenga una palla di raggio a_1 e sia contenuto in una palla di raggio a_2 . Allora, per ogni $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$, l'insieme V_{i_1, \dots, i_k} contiene una palla di raggio $\rho_{i_1} \dots \rho_{i_k} a_1$ e dunque una

di raggio $(\min \rho_i) a_1 r$ ed è contenuto in una palla di raggio $\rho_{i_1} \cdots \rho_{i_k} a_2$ e dunque in una palla di raggio $a_2 r$. Sia \mathcal{Q}_1 l'insieme delle sequenze di $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$ tali che B intersechi $\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$. Per il Lemma 3.2.2 ci sono al più $q = (1 + 2a_2)^n a_1^{-n} (\min \rho_i)^{-n}$ sequenze in \mathcal{Q}_1 . Allora

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(B) &= \tilde{\mu}(K \cap B) = \mu\{(i_1, i_2, \dots) : x_{i_1, i_2, \dots} \in F \cap B\} \\ &\leq \mu\left\{\bigcup_{\mathcal{Q}_1} I_{i_1, \dots, i_k}\right\} \end{aligned}$$

dato che, se $x_{i_1, i_2, \dots} \in K \cap B \subset \bigcup_{\mathcal{Q}_1} \bar{V}_{i_1, \dots, i_k}$, allora c'è un intero k tale che $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}_1$. Allora

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(B) &\leq \sum_{\mathcal{Q}_1} \mu(I_{i_1, \dots, i_k}) \\ &= \sum_{\mathcal{Q}_1} (\rho_{i_1} \cdots \rho_{i_k})^\alpha \leq \sum_{\mathcal{Q}_1} r^\alpha \leq r^\alpha q. \end{aligned}$$

Dato che ogni insieme U è contenuto in una palla di raggio $\text{diam}(U)$, abbiamo $\tilde{\mu}(U) \leq \text{diam}(U)^\alpha q$, quindi per il principio di distribuzione di massa $\mathcal{H}^\alpha(K) \geq q^{-1} > 0$, $\dim_H K = \alpha$.

PASSO 3: usiamo il principio di distribuzione di massa e le stime del capitolo precedente sulle dimensioni per concludere l'uguaglianza tra dimensione di Hausdorff e *box dimension*.

Se \mathcal{Q} è qualunque insieme di sequenze finite tale che $\forall (i_1, i_2, \dots) \in \mathcal{I} \exists! k > 0$ con $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$, segue induttivamente dalla definizione di dimensione di similitudine che $\sum_{\mathcal{Q}} (\rho_{i_1} \cdots \rho_{i_k})^\alpha = 1$.

Dunque, se \mathcal{Q} è scelto come al passo 2, \mathcal{Q} contiene al massimo $(\min \rho_i)^{-\alpha} r^{-\alpha}$ sequenze.

Per ogni sequenza $(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{Q}$ abbiamo $\text{diam}(\bar{V}_{i_1, \dots, i_k}) = \rho_{i_1} \cdots \rho_{i_k} \text{diam}(\bar{V}) \leq r \text{diam}(\bar{V})$, quindi K può essere coperto da $(\min \rho_i)^{-\alpha} r^{-\alpha}$ insiemi di diametro $r \text{diam}(\bar{V})$ per ogni $r < 1$. Segue dalle definizioni equivalenti di *box dimension* che $\dim^B K \leq \alpha$; notando che $\alpha = \mathcal{H}\text{-dim} K \leq \dim_B K \leq \dim^B K \leq \alpha$, otteniamo la tesi. \square

3.2.1 Applicazioni del Teorema 3.2.3

Sia S una similitudine in (\mathbb{R}^n, d_E) , dove d_E è la distanza euclidea, con un punto fisso a e costante di Lipschitz $\rho_S = r$, e sia O la trasformazione orto-

normale data da $O(x) = r^{-1}[S(x+a) - a]$ (ortonormale dato che l'origine è chiaramente fissata e O è in maniera evidente una isometria).

Sappiamo che $S : X \rightarrow X$ è una similitudine se e solo se $S = \mu_r \circ \tau_b \circ O$ per qualche omotetia μ_r , traslazione τ_b e trasformazione ortonormale O . Allora

$$S(x+a) = rO(x) + a$$

e

$$S(x) = rO(x-a) + a,$$

quindi

$$S = \tau_a^{-1} \circ \mu_r \circ O \circ \tau_a = (\tau_a^{-1} \circ \mu_r \circ \tau_a) \circ (\tau_a^{-1} \circ O \circ \tau_a).$$

Diciamo che S , espressa come sopra, è nella sua forma canonica e scriviamo $S = (a, r, O)$.

Con l'ausilio di questa notazione e del Teorema 3.2.3, siamo pronti a studiare in maniera più generale gli *insiemi di Cantor* e la *curva di Koch*, introdotti nel primo capitolo. Essi rappresentano non solo un'interessante applicazione del teorema 3.2.3, ma mostrano anche come diversi sistemi di funzioni iterate possano produrre il medesimo attrattore.

Insieme di Cantor

Nella notazione di sopra siano

$$\mathcal{S}_r = \{S_1(r), S_2(r)\}, S_i(r) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$S_1(r) = (0, r, I), S_2(r) = (1, r, I),$$

dove I è l'identità.



Figura 3.1: L'insieme di Cantor classico C ; attrattore di $\mathcal{S}_{1/3}$.

Attrattori K_r dell'IFS \mathcal{S}_r al variare del parametro $r \in (0, 1)$:

- $0 < r < \frac{1}{2}$:

K_r è l'insieme di Cantor generalizzato. Per il Teorema 3.2.3

$$\mathcal{H} - \dim K_r = \mathcal{B} - \dim K_r = \log 2 / \log(1/r).$$

Osservazione 3.2.4.1. Per $r = 1/3$ otteniamo $K_{1/3} = C$, dove C è l'insieme di Cantor classico mostrato in figura;

- $\frac{1}{2} \leq r < 1$:

$\mathcal{S}_r([0, 1]) = [0, 1]$, e dunque $K_r = [0, 1]$.

Osservazione 3.2.4.2. Ciò mostra che diversi sistemi di funzioni iterate possono generare lo stesso insieme.

Curva di Koch

Consideriamo l'intervallo $[0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, punto di partenza per creare la *curva di Koch*.

Siano $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (1/3, 0)$, $a_3 = (1/2, 1/2\sqrt{3})$, $a_4 = (2/3, 0)$ e $a_5 = (1, 0)$ come mostrato in figura. Usiamo il sistema di funzioni iterate $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dove

$$\begin{aligned} S_i : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{a_1 a_5} &\mapsto \overrightarrow{a_i a_{i+1}} \end{aligned}$$

è l'unica similitudine tale che $\overrightarrow{a_1 a_5} \mapsto \overrightarrow{a_i a_{i+1}}$ con determinante positivo (escludiamo sia formata da riflessioni).

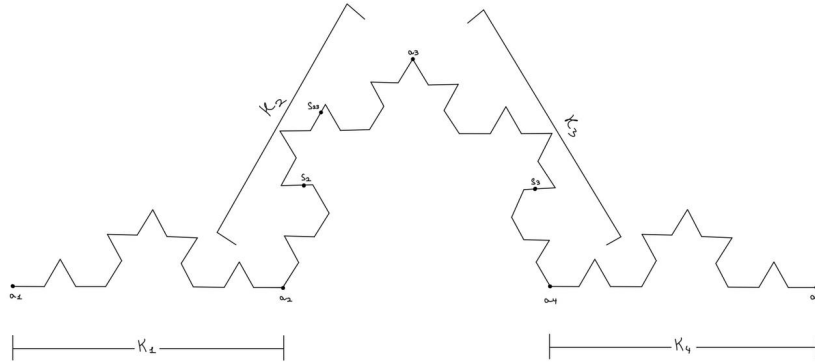


Figura 3.2: Approssimazione della curva di Koch K .

Se K è l'attrattore del sistema di funzioni iterate \mathcal{S} , la figura mostra la sua approssimazione $\mathcal{S}^3([a_1, a_5])$. Notiamo che $\forall i$, S_i ha un punto fisso $s_i = k_i$; dove $s_1 = a_1$, $s_4 = a_5$ ed s_2, s_3 sono mostrati in figura. Anche le loro composizioni $S_{ij} = S_i \circ S_j$ hanno punto fisso $s_{ij} = k_{ij}$, dove s_{23} è mostrato. Consideriamo ora il sistema $\mathcal{S}' = \{S'_1, S'_2\}$, dove

$$\begin{aligned} S'_i &: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ S'_1(\vec{a_1 a_5}) &= \vec{a_1 a_3} \\ S'_2(\vec{a_1 a_5}) &= \vec{a_3 a_5} \end{aligned}$$

con S'_i l'unica tra tali similitudini con determinante negativo.

Osservazione 3.2.4.3. Sia K' attrattore del sistema \mathcal{S}' . Si verifica che $K' = K$, K attrattore del sistema \mathcal{S} .

Infatti, $S'_1 \circ S'_1 = S_1$, $S'_1 \circ S'_2 = S_2$, $S'_2 \circ S'_1 = S_3$ e $S'_2 \circ S'_2 = S_4$, cioè $\mathcal{S}'^2 = \mathcal{S}$. Ma allora $\mathcal{S}'(K') = K' \Rightarrow \mathcal{S}(K') = K' \Rightarrow K' = K$ per l'unicità dell'attrattore di un sistema di funzioni iterate.

3.2.2 Costruzioni di una curva frattale a partire da un generatore

Esponiamo, tramite la costruzione dell'insieme frattale seguente, un metodo conveniente di descrivere insiemi autosimili tramite diagrammi.

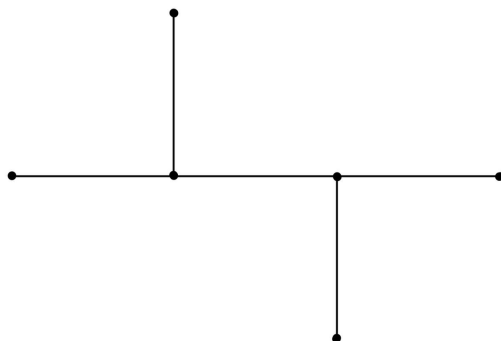


Figura 3.3: Generatore di una curva frattale "tree-like".

Definizione 3.2.3. Chiamiamo *generatore* di un insieme autosimile, un insieme formato dall'unione di $n < \infty$ segmenti e due punti, che costituiscono gli "estremi" del generatore.

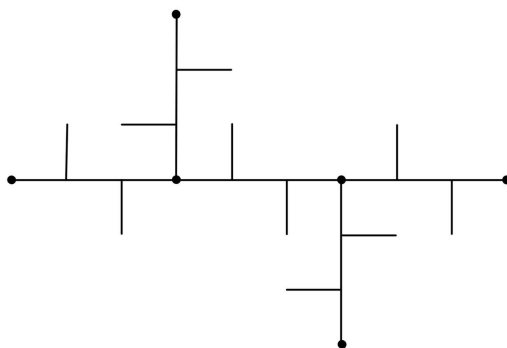


Figura 3.4: Passo 1 della costruzione, ottenuto associando ad ogni segmento una similitudine contrattiva.

Associamo ad ogni segmento la similitudine contrattiva che mappa i due "estremi" del generatore negli estremi del segmento. Iterando il processo, otteniamo approssimazioni sempre migliori dell'attrattore autosimile.

Osservazione 3.2.4.4. *Notiamo che le similitudini sono definite dal generatore a meno di riflessioni e rotazioni di π . L'orientazione può, però, essere specificata mostrando il primo passo della costruzione.*

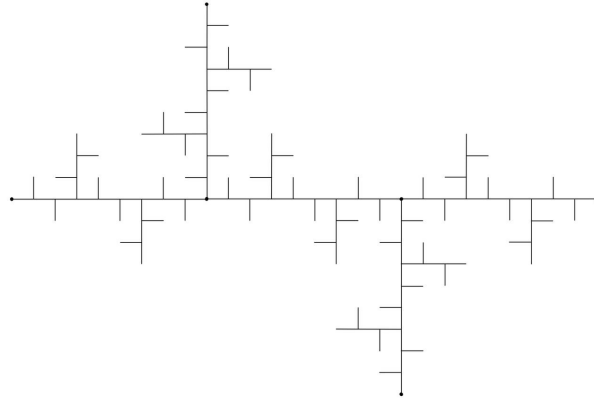


Figura 3.5: Approssimazione della curva "tree-like".

Dimensione della curva "tree-like":

Sia T la curva costruita a partire dal generatore esposto sopra. T è l'attrattore di 5 similitudini (una per ogni segmento che forma il generatore) di ragione $1/3$ (ogni segmento è lungo $1/3$ della distanza tra i due "estremi" del generatore). Dunque, per il Teorema 3.2.3

$$\mathcal{H}\text{-dim}T = \mathcal{B}\text{-dim}T = \log 5 / \log 3.$$

Ringraziamenti

Arrivata in questa stazione, pronta a prendere il treno per la successiva, sento doveroso ringraziare chi mi ha accompagnata qui.

Ringrazio i miei genitori che mi hanno permesso di stare così lontana da casa; le mie sorelle per avermi sostenuta sempre e i miei nipoti per esistere.

Ringrazio il Prof. Matteo Novaga per avermi fatta appassionare all'analisi, per essere stato il mio relatore e, soprattutto, per averlo fatto nel migliore dei modi: non c'è stata una curiosità inesaudita o un dubbio che non ha sciolto.

Ringrazio il Prof. Riccardo Benedetti, che con i suoi discorsi durante le lezioni di Geometria 1 mi ha motivata a rimanere qui.

Ringrazio Pietro Freni per avermi insegnato a studiare; Davide Chionna, Christian Sopio e Alessio Di Prisa per avermi fatto capire cosa vuol dire fare matematica alla lavagna e Anna Borri per le sue spiegazioni incredibili.

Ringrazio Giuseppe Bargagnati (il caro Turista), mio tutor dal primo anno, una persona speciale che ha reso tutto più bello (la geometria, i film, il dipartimento).

Ringrazio i miei amici di Barcellona P.G., ne riparliamo al Perditempo.

Ringrazio i miei primi amici all'università e chiunque abbia mai studiato con me una materia.

Ringrazio chi c'era all'inizio di questo percorso, chi ho conosciuto durante la strada, e anche chi mi è stato vicino e adesso non lo è più.

Ringrazio Jack D'Aurizio per avermi scritto valanghe di esercizi di analisi e offerto due spalle su cui piangere (lamentarmi, più che altro).

Ringrazio l'intero popolo dell'Aula Studenti per avermi sempre fatto pulire il frigo (scherzo! scherzo!): vi ringrazio per aver sopportato questa voce squillante che mi ritrovo, per avermi dato da mangiare, insegnato a giocare a tressette e per quanto mi siete stati vicini mentre ero in ospedale, non lo dimenticherò mai.

Ringrazio chiunque sia stato presente a Tetto 1 e Tetto 2: vi giuro che ci sarà

Tetto 3 e che canteremo di nuovo le canzoni di Anna Oxa.

Ringrazio i miei prosperandi: Raffaele per aver sempre avuto i gadget giusti, Dario per il tiramisù, Biagio per non aver mai dato a nessuno il ritalin, Dox per l'ora della sigaretta, Dave per tutte quelle notti che aveva la chitarra in mano, Elisa per avermi fatta ridere senza dire niente e Gabri per avere quella saggezza da vecchia donna del sud che nessuno si aspettava.

Ringrazio Pietro perchè sa tutto di me e ha reso mille serate migliori, accogliendosi i miei pazzi piani o una birra fredda uscita dalla borsa con un sopracciglio alzato.

Ringrazio Roberta per essere stata sempre fantastica, leale, divertente e piena di vita; per avermi accompagnata quando l'ho chiesto (e anche quando mi vergognavo a farlo).

Per ultimo, ringrazio il mio Alessandro, amante della vita, del sushi e dei punti... ti ringrazio per aver creato assieme un linguaggio solo nostro, per avere adottato con me Salem e per essere stato forte e rimasto sempre gentile. Ti ringrazio di aver fatto matematica con me e di avermi ricordato perché sono qui a Pisa. Ti ringrazio di avermi convinta a ballare anche se non sono brava (prima o poi mi ricorderò che la mano destra va tenuta giù e poi tirata su). Ti ringrazio di essere così speciale da avermi convinta di esserlo anche io.

Bibliografia

- [1] L. Ambrosio. *Corso introduttivo alla Teoria Geometrica della Misura ed alle Superfici Minime*. Edizioni della Normale, 1997.
- [2] M. F. Barnsley e S. Demko. «Iterated Function Systems and the Global Construction of Fractals». In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* (1985).
- [3] T. Bedford e University of Warwick. Mathematics Institute. «Crinkly curves, Markov partitions and dimension». Tesi di dott. 1984.
- [4] G. Bouligand. «Ensembles impropres et nombre dimensionnel». In: *Bull. Sciences Mathématiques* (1928).
- [5] C. Carathéodory. «Über das lineare Mass von Punktmengen-eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs». In: *Nach. Ges. Wiss. Göttingen* (1914).
- [6] D. Dumitru e A. Mihail. «Attractors of iterated function systems and associated graphs». In: *Kodai Mathematical Journal* (2014).
- [7] K. Falconer. *Fractal Geometry*. Wiley, 2003.
- [8] F. Hausdorff. «Dimension and äusseres Mass». In: *Math. Annalen* (1919).
- [9] J.E. Hutchinson. «Fractals and Self Similarity». In: *Indiana University Mathematics Journal* (1981).
- [10] H. Joyce e D. Preiss. «On the existence of subsets of finite positive packing measure». In: *Mathematika* (1995).
- [11] G. Julia. «Sur l'itération des fonctions rationnelles». In: *J. Math. Pure Appl.* (1918).

- [12] H. von Koch. «Sur une curbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire»». In: *Arkiv för matematik, astronomi och fysik* (1904).
- [13] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco : W.H. Freeman, 1982.
- [14] C.T. McMullen. «Hausdorff dimension and conformal dynamics, III: Computation of dimension». In: *American Journal of Mathematics* (1998).
- [15] L. Pontrjagin e L. Schnirelman. «Sur une propriété métrique de la dimension». In: *Ann. Math.* (1932).
- [16] C.A. Rogers. «Dimension Prints». In: *Mathematika* (1988).
- [17] F. L. Sendker et al. «Emergence of fractal geometries in the evolution of a metabolic enzyme». In: *Nature* (2024).
- [18] D. Sullivan. «Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups». In: *Acta Mathematica* (1984).
- [19] C. Tricot. «Two definitions of fractional dimension». In: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (1982).