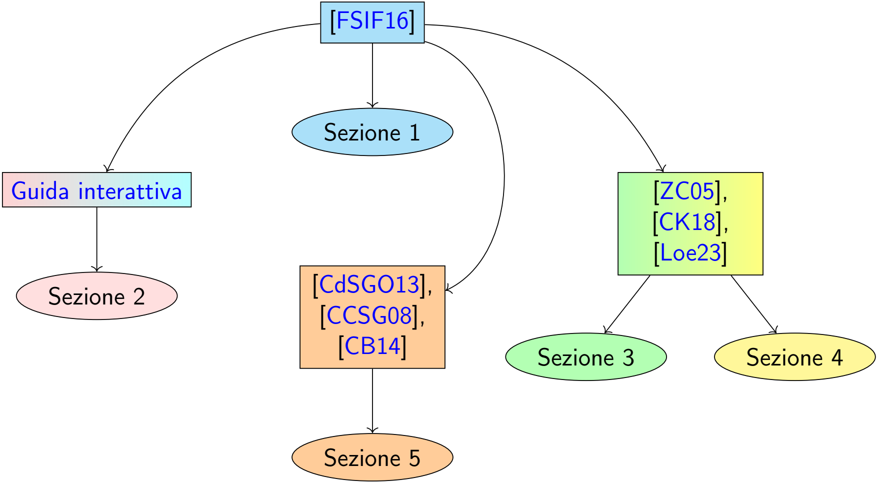
Un'introduzione all'omologia persistente

Candidato: Lorenzo Picinelli

Relatore: Prof. Enrico Sbarra

27 settembre 2024

Struttura della tesi



Indice

Omologia persistente

Sia Σ un complesso simpliciale, una filtrazione di Σ è una sequenza di sottocomplessi simpliciali $\Sigma^f = \{\Sigma^i |\ i = 0, \dots, m\}$, tale che $\emptyset = \Sigma^0 \subseteq \dots \subseteq \Sigma^m = \Sigma$.

La mappa di inclusione $i^{p,q} : \Sigma^p \to \Sigma^q$ induce un omomorfismo $(i_k^{p,q})_*$ tra i k-esimi gruppi di omologia simpliciale.

Omologia persistente

Sia Σ un complesso simpliciale, una filtrazione di Σ è una sequenza di sottocomplessi simpliciali $\Sigma^f = \{\Sigma^i | \; i = 0, \dots, m\}$, tale che $\emptyset = \Sigma^0 \subseteq \dots \subseteq \Sigma^m = \Sigma$.

La mappa di inclusione $i^{p,q} : \Sigma^p \to \Sigma^q$ induce un omomorfismo $(i_k^{p,q})_*$ tra i k-esimi gruppi di omologia simpliciale.

Definizione 1 (Gruppi di omologia persistente)

$$H_k^{p,q}(\Sigma^f) = \mathrm{im}\left(i_k^{p,q}\right)_* = Z_k(\Sigma^p) \big/ (Z_k(\Sigma^p) \cap B_k(\Sigma^q)) \; .$$

Nascita e morte di una classe

Sia $\sigma \in Z_k(\Sigma^p)$ un k-ciclo non banale.

Nascita di una classe. Diciamo che $[\sigma]$ nasce al passo p della filtrazione se $[\sigma] \notin H_k^{p-1,p}(\Sigma^f)$.

Nascita e morte di una classe

Sia $\sigma \in Z_k(\Sigma^p)$ un k-ciclo non banale.

Nascita di una classe. Diciamo che $[\sigma]$ nasce al passo p della filtrazione se $[\sigma] \notin H_k^{p-1,p}(\Sigma^f)$.

Siano $[\sigma]$ e $[\sigma']$ classi nate rispettivamente ai passi p e p'.

Morte di una classe. Diciamo che $[\sigma]$ muore al passo q della filtrazione se

$$[\sigma] \neq [\sigma'] \text{ in } H_k^{p,q-1}(\Sigma^f), \text{ ma } [\sigma] = [\sigma'] \text{ in } H_k^{p,q}(\Sigma^f) \ ;$$

oppure se

$$[\sigma] \neq 0 \text{ in } H_k^{p,q-1}(\Sigma^f), \text{ ma } [\sigma] = 0 \text{ in } H_k^{p,q}(\Sigma^f) \ .$$

Coppie di persistenza

Ad una classe che nasce al passo p e muore al passo q associamo la coppia (p, q). Analogamente ad una classe che nasce al passo p e sopravvive per tutti i passi della filtrazione associamo la coppia $(p, +\infty)$. Le coppie (p, q) e $(p, +\infty)$ si dicono coppie di persistenza.

Coppie di persistenza

Ad una classe che nasce al passo p e muore al passo q associamo la coppia (p, q). Analogamente ad una classe che nasce al passo p e sopravvive per tutti i passi della filtrazione associamo la coppia $(p, +\infty)$. Le coppie (p, q) e $(p, +\infty)$ si dicono coppie di persistenza.

Codice a barre. Con il metodo del codice a barre rappresentiamo ogni coppia di persistenza (p, q) come un intervallo orizzontale.

Coppie di persistenza

Ad una classe che nasce al passo p e muore al passo q associamo la coppia (p, q). Analogamente ad una classe che nasce al passo p e sopravvive per tutti i passi della filtrazione associamo la coppia $(p, +\infty)$. Le coppie (p, q) e $(p, +\infty)$ si dicono coppie di persistenza.

Codice a barre. Con il metodo del codice a barre rappresentiamo ogni coppia di persistenza (p, q) come un intervallo orizzontale.

Diagrammi di persistenza. Con il metodo dei diagrammi di persistenza rappresentiamo ogni coppia di persistenza (p, q) come un punto del piano cartesiano.

Un esempio

Consideriamo ora la seguente filtrazione del complesso simpliciale $\Sigma = \{v_0, v_1, v_2, [v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_0], [v_0, v_1, v_2]\}$:

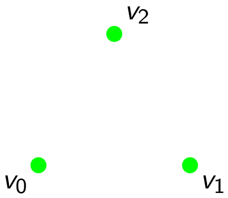


Figura 1: Σ^1

Un esempio

Consideriamo ora la seguente filtrazione del complesso simpliciale $\Sigma = \{v_0, v_1, v_2, [v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_0], [v_0, v_1, v_2]\}$:

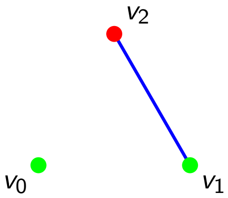


Figura 2: Σ^2

Un esempio

Consideriamo ora la seguente filtrazione del complesso simpliciale $\Sigma = \{v_0, v_1, v_2, [v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_0], [v_0, v_1, v_2]\}$:

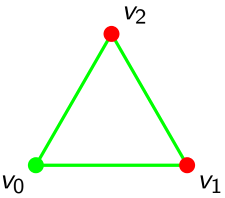


Figura 3: Σ^3

Consideriamo ora la seguente filtrazione del complesso simpliciale $\Sigma = \{v_0, v_1, v_2, [v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_0], [v_0, v_1, v_2]\}$:

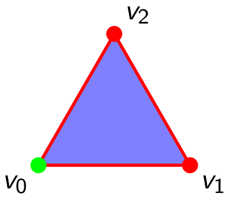


Figura 4: $\Sigma = \Sigma^4$

Codice a barre

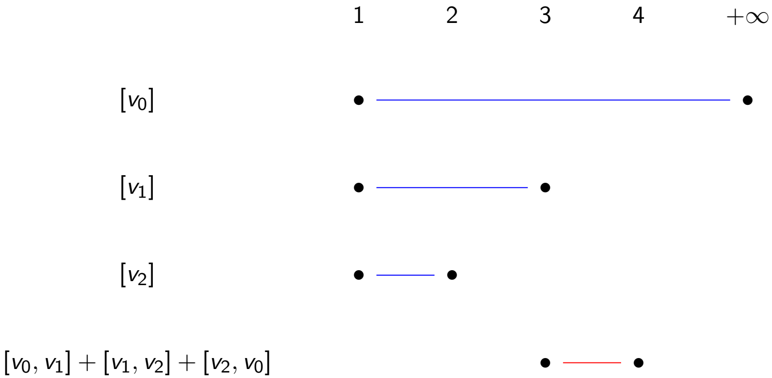


Figura 5: Codice a barre associato alla filtrazione Σ^f di Σ

Diagramma di persistenza

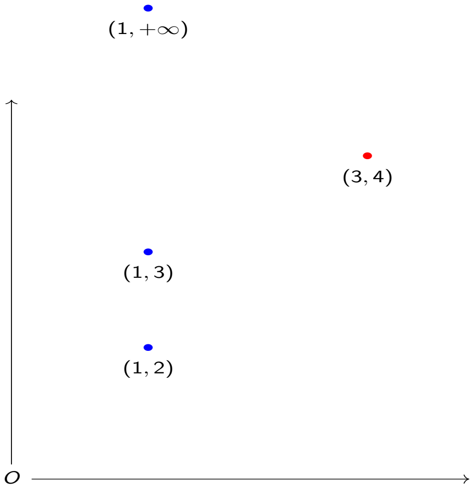


Figura 6: Diagramma di persistenza associato alla filtrazione Σ^f di Σ

Definizione 2 (Modulo di persistenza)

Sia R un anello, un modulo di persistenza $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di R-moduli $\{M^i\}_{i \in \mathbb{N}}$, insieme ad una famiglia di omomorfismi di R-moduli $\{\varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$, dove $\varphi^i : M^i \to M^{i+1}$.

Moduli di persistenza

Definizione 2 (Modulo di persistenza)

Sia R un anello, un modulo di persistenza $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di R-moduli $\{M^i\}_{i\in\mathbb{N}}$, insieme ad una famiglia di omomorfismi di R-moduli $\{\varphi^i\}_{i\in\mathbb{N}}$, dove $\varphi^i : M^i \to M^{i+1}$.

Consideriamo una filtrazione $\Sigma^f = \{\Sigma^0, \dots, \Sigma^m\}$ di un complesso simpliciale finito Σ. Associamo a Σ^f un modulo di persistenza ponendo

$$M^i = \bigoplus_{k=0}^{\infty} H_k(\Sigma^i) \quad \text{e} \quad \varphi^i = (i^{i,i+1})_* \ .$$

Condizione di tipo finito

Definizione 3 (Condizione di tipo finito)

Diciamo che un modulo di persistenza $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è di tipo finito se valgono le seguenti proprietà.

1. M^i è un R-modulo finitamente generato per ogni $i \in \mathbb{N}$.
2. Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che φ^i è un isomorfismo per ogni $i \geq n$.

Condizione di tipo finito

Definizione 3 (Condizione di tipo finito)

Diciamo che un modulo di persistenza $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ è di tipo finito se valgono le seguenti proprietà.

1. M^i è un R-modulo finitamente generato per ogni $i \in \mathbb{N}$.
2. Esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che φ^i è un isomorfismo per ogni $i \geq n$.

Il modulo di persistenza associato alla filtrazione di un complesso simpliciale finito è di tipo finito.

Definizione 4 (Morfismi di moduli di persistenza)

Sia R un anello e $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\mathcal{N} = \{N^i, \psi^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ due R-moduli di persistenza. Consideriamo una famiglia di omomorfismi di R-moduli $\nu = \{\nu^i\}_{i\in\mathbb{N}}$, dove $\nu^i : M^i \to N^i$. Diciamo che ν è un morfismo di R-moduli di persistenza se il seguente diagramma commuta per ogni $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd}
M^i \arrow[r, "\varphi^i"] \arrow[d, "\nu^i"'] & M^{i+1} \arrow[d, "\nu^{i+1}"] \\
N^i \arrow[r, "\psi^i"'] & N^{i+1}
\end{tikzcd}.$$

Gradazione di un modulo di persistenza

Sia R un anello e $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un R-modulo di persistenza. Definiamo un $R[x]$-modulo graduato

$$\alpha(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M^i \ ,$$

Gradazione di un modulo di persistenza

Sia R un anello e $\mathcal{M} = \{M^i, \varphi^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un R-modulo di persistenza. Definiamo un $R[x]$-modulo graduato

$$\alpha(\mathcal{M}) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M^i \ ,$$

con il prodotto per scalari definito da

$$r \cdot (m_0, m_1, m_2, \dots) = (rm_0, rm_1, rm_2, \dots) \quad \text{se } r \in R \ ,$$
$$x \cdot (m_0, m_1, m_2, \dots) = (0, \varphi^0(m_0), \varphi^1(m_1), \varphi^2(m_2), \dots) \ .$$

Morfismi di moduli graduati

Siano $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$ e $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} N_i$ due R-moduli graduati. Ricordiamo che un morfismo di R-moduli graduati è un omomorfismo di R-moduli $\mu : M \to N$, tale che $\mu(M_i) \subseteq N_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Morfismi di moduli graduati

Siano $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$ e $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} N_i$ due R-moduli graduati. Ricordiamo che un morfismo di R-moduli graduati è un omomorfismo di R-moduli $\mu : M \to N$, tale che $\mu(M_i) \subseteq N_i$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Sia $\nu : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un morfismo di R-moduli di persistenza, poniamo

$$\alpha(\nu) : \alpha(\mathcal{M}) \to \alpha(\mathcal{N})$$
$$(m_0, m_1, m_2, \dots) \mapsto (\nu^0(m_0), \nu^1(m_1), \nu^2(m_2), \dots) \ .$$

La mappa $\alpha(\nu)$ così definita è un morfismo di $R[x]$-moduli graduati.

Il teorema di corrispondenza

La mappa α è un funtore covariante tra la categoria degli R-moduli di persistenza e la categoria degli $R[x]$-moduli graduati. Questo ci permette di enunciare il seguente teorema.

Il teorema di corrispondenza

La mappa α è un funtore covariante tra la categoria degli R-moduli di persistenza e la categoria degli $R[x]$-moduli graduati. Questo ci permette di enunciare il seguente teorema.

Teorema 4.6 (Teorema di corrispondenza)

Sia R un anello Noetheriano, il funtore α definisce un'equivalenza tra la categoria dei moduli di persistenza di tipo finito su R e la categoria dei moduli graduati finitamente generati su $R[x]$.

K-moduli di persistenza di tipo finito

Sia K un campo e $\mathcal{M}$ un K-modulo di persistenza di tipo finito. I $K[x]$-moduli graduati finitamente generati hanno struttura

$$\alpha(\mathcal{M}) \simeq \left(\bigoplus_{i=1}^{n} x^{a_i} \cdot K[x] \right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{m} x^{b_j} \cdot (K[x]/(x^{c_j})) \right) ,$$

per $a_i, b_j, c_j \in \mathbb{N}$. Dove α induce un'equivalenza di categorie per il teorema di corrispondenza, dato che K è Noetheriano.

Un esempio conclusivo

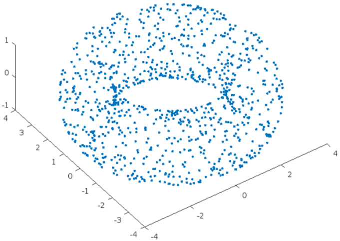


Figura 7: 1000 punti su un toro

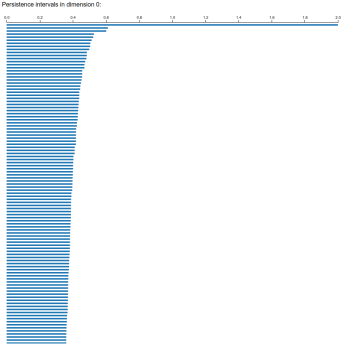


Figura 8: Coppie 0-dimensionali

Un esempio conclusivo

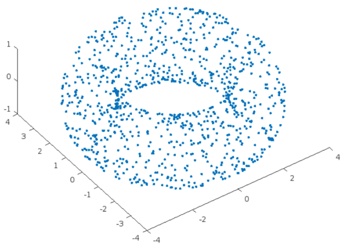


Figura 7: 1000 punti su un toro

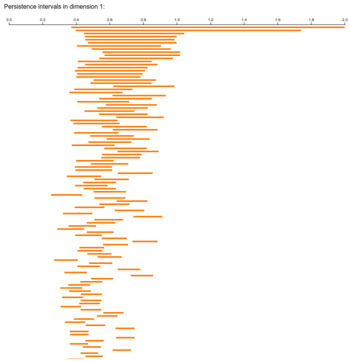


Figura 9: Coppie 1-dimensionali

Un esempio conclusivo

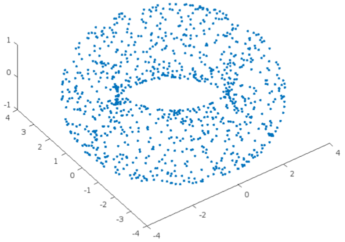


Figura 7: 1000 punti su un toro

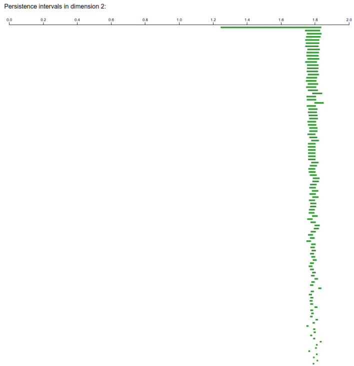


Figura 10: Coppie 2-dimensionali

Bibliografia essenziale

F. Chazal, V. de Silva, M. Glisse, and S. Oudot.
The structure and stability of persistence modules, 2013.
URL: https://arxiv.org/abs/1207.3674, arXiv:1207.3674.

U. Fugacci, S. Scaramuccia, F. Iuricich, and L. De Floriani.
Persistent Homology: a Step-by-step Introduction for Newcomers.
In G. Pintore and F. Stanco, editors, *Smart Tools and Apps for Graphics - Eurographics Italian Chapter Conference*. The Eurographics Association, 2016.
doi:10.2312/stag.20161358.

A. Zomorodian and G. Carlsson.
Computing persistent homology.
Discrete & Computational Geometry, 33:249–274, 2005.
doi:10.1007/s00454-004-1146-y.

Grazie per l'attenzione!