

Modelli ricorsivi di frammenti dell'aritmetica

Tesi triennale in logica matematica

Andrea Snaidero

Università di Pisa

25 ottobre 2025



Numeri naturali e logica del primo ordine

Consideriamo la struttura dei numeri naturali: $(\mathbb{N}, +, *, \leq, 1, 0)$. Siamo interessati allo studio delle proprietà esprimibili mediante formule del primo ordine. Ad esempio:

$$\text{"}x \text{ è primo"} \quad (\forall y, z)(x = y * z \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$$

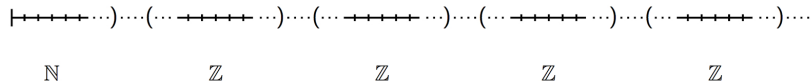
I simboli del linguaggio sono $\{+, *, 0, 1, \leq, =\}$.

Definizione. $T_{\mathbb{N}}$ è la teoria dei numeri naturali, ovvero l'insieme di tutte le formule soddisfatte da \mathbb{N} .

Come è fatto un modello nonstandard?

Fatto. $T_{\mathbb{N}}$ ha modelli di ogni cardinalità. (Löwenheim-Skolem).

Pertanto esistono modelli nonstandard di $T_{\mathbb{N}}$ (non isomorfi a \mathbb{N}).



Tuttavia questo risultato non è costruttivo poiché si basa sull'assioma di scelta.

Domanda. È possibile esibire esplicitamente un modello nonstandard di $T_{\mathbb{N}}$?

Computabilità e frammenti dell'aritmetica

Formalmente, intendiamo che un modello "esplicito" sia un modello computabile.

A decision method must be like a recipe, which tells one what to do at each step so that no intelligence is required to follow it; and the method can be applied by anyone so long as he is able to read and follow directions.

-Alfred Tarski (A decision method for elementary algebra and geometry)

La risposta alla domanda è no: $T_{\mathbb{N}}$ non ammette modelli nonstandard computabili poiché è troppo espressiva.

Domanda, seconda versione. Quali frammenti dell'aritmetica ammettono un modello computabile?

Aritmetica di Peano, PA

Definizione. Teoria PA:

$$x + 1 \neq 0 \quad (\text{P1})$$

$$x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \quad (\text{P2})$$

$$x + 0 = x \quad (\text{P3})$$

$$x + y + 1 = x + y + 1 \quad (\text{P4})$$

$$x * 0 = 0 \quad (\text{P5})$$

$$x * (y + 1) = x * y + x \quad (\text{P6})$$

$$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(x + z = y) \quad (\text{P7})$$

$$\varphi(0) \wedge (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x + 1)) \rightarrow (\forall x)(\varphi(x)) \quad (\text{P8})$$

Questa teoria è la più forte tra quelle che presenteremo.

Aritemtica di Robinson, Q

Definizione. Teoria Q :

$$x + 1 \neq 0 \quad (Q1)$$

$$x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \quad (Q2)$$

$$x + 0 = x \quad (Q3)$$

$$x + y + 1 = S(x + y) \quad (Q4)$$

$$x * 0 = 0 \quad (Q5)$$

$$x * y + 1 = x * y + x \quad (Q6)$$

$$x \leq y \leftrightarrow (\exists z)(x + z = y) \quad (Q7)$$

$$x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(y + 1 = x) \quad (Q8)$$

Questa è la teoria più debole fra quelle che presenteremo.

Frammenti dell'aritmetica

$$\mathbb{Q} \subset \text{OI} \subset I\Delta_0 \subset \text{PAC} \subset T_{\mathbb{N}}$$

Open Induction (OI) = \mathbb{Q} + assiomi di induzione per le formule senza quantificatori.

$I\Delta_0$ = \mathbb{Q} + assiomi di induzione per le *formule limitate*.

Esempio di formula limitata:

$$(\forall y, z \leq x)(x = y * z \rightarrow y = 1 \vee z = 1)$$

Obbiettivi.

- OI ammette un modello nonstandard computabile.
- $I\Delta_0$ non ammette modelli nonstandard computabili.

Esempio di modello ricorsivo di Q

$$\mathbb{Z}[X]^{\geq 0} = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Z} \wedge a_n > 0\}$$

Fatto. $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0} \models Q$

Domanda: $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0}$ è un modello anche per PA (o almeno di OI)?

Esempio di modello ricorsivo di \mathbb{Q}

$$\mathbb{Z}[X]^{\geq 0} = \{a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Z} \wedge a_n > 0\}$$

Fatto. $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0} \models \mathbb{Q}$

Domanda: $\mathbb{Z}[X]^{\geq 0}$ è un modello anche per PA (o almeno di OI)?

No.

Dimostrazione.

$\text{OI} \vdash (\forall x)(\exists y)(y = \lfloor \sqrt{x} \rfloor)$

$(\forall x)(\exists y)(y^2 \leq x < (y+1)^2)$.

Tuttavia, $\lfloor \sqrt{X} \rfloor \notin \mathbb{Z}[X]^{\geq 0}$.

Tennenbaum

Teorema

Non esistono modelli nonstandard computabili di $I\Delta_0$.

Corollario

Non esistono modelli nonstandard computabili di PA né di $T_{\mathbb{N}}$.

Per illustrare il metodo dimostriamo:

Teorema

Non esistono modelli nonstandard computabili di $T_{\mathbb{N}}$.

Dimostrazione

$H = \{\text{"Codici sorgente di programmi che non vanno in loop"}\}$

Fatto. H non è computabile.

Usando la numerazione di Gödel otteniamo $\varphi(x)$ tale che

$$\mathbb{N} \models \varphi(x) \iff x \in H.$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &\models (\forall x)(\exists C_x)(\forall z \leq x)(\varphi(z) \leftrightarrow P_z|C_x) \\ \mathbb{N}^* &\models (\forall x)(\exists C_x)(\forall z \leq x)(\varphi(z) \leftrightarrow P_z|C_x)\end{aligned}$$

Pongo $x = X \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ nonstandard e fisso un C_x .

$$k \in H \iff \mathbb{N}^* \models P_k|C_x$$

Ostacoli

$I\Delta_0$ non dimostra che esiste x^y .

Soluzioni

- Definire $x^y = z$ mediante una formula limitata.
Attenzione: $I\Delta_0 \not\vdash (\forall x)(\forall y)(\exists z)(x^y = z)$.
- Principio di overspill.
Attenzione: è valido solo per formule limitate.

Modelli di OI

Definizione. R è un campo reale chiuso se $i \notin R$ ma $R(i) = \bar{R}$.

Osservazione. Un campo reale chiuso è ordinabile.

Teorema (Sheperdson)

Una struttura aritmetica è un modello di OI se e solo se è costituito dagli elementi non negativi di una parte intera di un campo reale chiuso.

Definizione. Un anello discreto Z è una parte intera di R se per ogni $x \in R$ esiste $a \in Z$ tale che $a \leq x < a + 1$.

Obbiettivo

- Esibire un modello nonstandard computabile di OI

Un campo reale computabile

Ci serve un campo reale chiuso computabile.

Proposizione

\mathbb{R}_{alg} è computabile.

Dimostrazione

- Codificare gli elementi $\alpha \in \mathbb{R}_{alg}$.
 $\alpha = \langle p(x), n \rangle$ se e solo se:
 $p(x) = 0$ e ci sono n radici di $p(x)$ più piccole di α .
- Esprimere le relazioni fra gli elementi di \mathbb{R}_{alg} mediante formule.
- Usare il teorema di Tarski per convertire tali formule in formule senza quantificatori.
- Valutare le formule senza quantificatori

Serie di Puiseux

Definizione. $\mathbb{R}_{alg}\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle = \left\{ \sum_{i=k}^{+\infty} a_i \varepsilon^{iq} \mid a_i \in \mathbb{R}_{alg} \ q \in \mathbb{Q} \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Teorema (Newton-Puiseux)

$\mathbb{R}_{alg}\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$ è un campo reale chiuso.

Definizione. S è costituito da tutti i polinomi nella indeterminata ε^{-q} al variare di $q \in \mathbb{Q}$ positivo, a coefficienti in \mathbb{R}_{alg} e con termine noto intero.

S è una parte intera di $\mathbb{R}_{alg}\langle\langle\varepsilon\rangle\rangle$.

Corollario

$S^{\geq 0}$ è un modello nonstandard computabile di OI .

Grazie per l'attenzione