Gara di Teoria dei gruppi - Soluzioni

28 novembre 2019

1. Osserviamo che un gruppo di tipo $T(p)$ è necessariamente 2-finitamente generato e semplice: preso $x \in T(p)$ e $y \notin \langle x \rangle$, $\langle x, y \rangle = T(p)$ perché non può avere ordine p; analogamente, se N è normale in $T(p)$ e $x \notin N$, $N\langle x \rangle$ è un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}^2$. A questo punto, il punto (a) segue dal fatto che un gruppo di 2-torsione deve essere abeliano (contraddicendo la semplicità di $T(2)$).
   Per il punto (b), notiamo che se ogni $x \in T(p)$ commuta coi suoi coniugati, il gruppo $\langle x^g \mid g \in G \rangle$ è abeliano e normale in $T(p)$, quindi $T(p)$ è abeliano. Per mostrare che, presi x e y in G, x commuta con yxy^{-1}, notiamo che, da $(xy)^3 = (xy^{-1})^3 = 1$ si ottiene $xyx = y^{-1}x^{-1}y^{-1}$ e $xy^{-1}x = yx^{-1}y$. D'altra parte, anche $(xyxy^{-1})^3 = 1$, da cui, esplicitando il cubo e sostituendo con le relazioni sopra, $xy^2x^{-1}y^2xy^{-2}x^{-1}y^{-2} = 1$, che fornisce ancora $xy^{-1}x^{-1}y^{-1}xyx^{-1}y = 1$, che è la tesi.

2. Il punto (a) segue dal teorema di struttura dei gruppi abeliani finiti. Se ammettiamo anche gruppi infiniti, un controesempio possibile è la coppia $(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus G)$, dove $G \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
   Per mostrare che i due gruppi sono effettivamente isomorfi per sottogruppi, si può ad esempio osservare che i p-gruppi abeliani infinti a esponente finito (cioè tali che esista $n \in \mathbb{N}$ per cui $p^n x = 0$ per ogni x) sono somme dirette di gruppi ciclici: infatti, se $n = 1$ la tesi segue dal fatto che un tale gruppo P è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_p$. Altrimenti, ragionando per induzione, si ha che pP è somma diretta di gruppi ciclici, da cui si trova facilmente che è somma diretta di ciclici anche $Q = \langle b_i \rangle$ con $pb_i = a_i$ e $pP = \langle a_i \rangle$. A questo punto, è facile vedere che, se $R < P$ è massimale tra i sottogruppi di P che intersecano banalmente Q, allora $P \simeq Q \oplus R$.
   Tornando al problema iniziale, da quanto appena mostrato si ottiene che i sottogruppi infiniti di G e $H := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus G$ sono della forma $\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, dove I, J sono insiemi finiti o numerabili. Ne segue facilmente che ogni classe di isomorfismo dei sottogruppi di G, H contiene, in entrambi i casi, una quantità numerabile di elementi: quindi G, H sono isomorfi per sottogruppi.
   Infine, un controesempio alla domanda (c) si trova, ad esempio, considerando i 2-gruppi: è chiaro che l'isomorfismo per sottogruppi è un invariante completo per i gruppi di ordine 2,4,8; d'altra parte, la coppia di gruppi di ordine 16 data da $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ (con l'unico morfismo possibile) sono isomorfi per sottogruppi: è facile (anche se un po' noioso) verificare che entrambi possiedono
   (a) il sottogruppo identico,
   (b) 3 sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
   (c) 6 sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$,
   (d) 1 sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$,
   (e) 3 sottogruppi isomorfi a $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3. Presi due punti $x, y \in X$, poiché l'azione di G è transitiva, esiste $g \in G$ tale che $gx = y$: allora, $g \operatorname{Stab}(x) g^{-1} = \operatorname{Stab}(y)$. Infatti, se $hx = x$, $ghg^{-1}y = ghx = gx = y$,

e viceversa se $ky = y$ vale $g^{-1}kgx = g^{-1}y = y$. Pertanto, il coniugio manda stabilizzatori in stabilizzatori e agisce transitivamente su di essi: questo mostra il punto (a).
Ora, per quanto appena osservato, dev'essere

$$\ker \varphi = \bigcap_{w \in X} \mathrm{Stab}(w) = \bigcap_{g \in G} g \, \mathrm{Stab}(x) g^{-1}.$$

Se, dato un sottogruppo H di un gruppo G, diciamo *nucleo* di H l'insieme

$$\mathrm{core}_G(H) = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1},$$

otteniamo che il nucleo di un'azione transitiva è il nucleo dello stabilizzatore di uno dei punti. Pertanto, è sufficiente mostrare che per ogni gruppo H esiste un'immersione $\iota : H \longrightarrow G$ tale che $\iota(H)$ abbia nucleo banale, e considerare l'azione di G sui laterali di H. Si può ad esempio considerare il gruppo $G = (H_1 \times H_2) \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, dove $H_1 \simeq H_2 \simeq H$ e φ è l'azione naturale di $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sugli indici (si scrive anche $G = H \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$): il coniugio per l'elemento $((1,1),1)$ mappa $H_1 \times 1$ in $1 \times H_2$, e perciò H_1 è privo di nucleo.

4. Per il punto (a), è sufficiente osservare che G agisce transitivamente per prodotto sulle orbite di N (la verifica di ciò è immediata). Pertanto, fissata un'orbita $\mathrm{orb}(x) \subset X$, le altre sono della forma $g \, \mathrm{orb}(x)$, e quindi in bigezione con essa.
Ora, l'azione di $GL(3, \mathbb{F}_2)$ sui sette vettori non nulli di $\mathbb{F}_2^3$ si vede immediatamente essere fedele, e fornisce un'immersione $GL(3, \mathbb{F}_2) \longrightarrow S_7$. D'altra parte, 7 è il minimo n possibile in quanto l'ordine di $GL(3, \mathbb{F}_2)$ è multiplo di 7.
Supponiamo infine che N sia un sottogruppo normale di $GL(3, \mathbb{F}_2)$: per quanto visto al punto (a), o 7 divide $|N|$ o l'azione di N fissa ogni punto, da cui si deduce $N = 1$. Poiché un sottogruppo di ordine 7 in $GL(3, \mathbb{F}_2)$ è rappresentato, in S_7, da un 7-ciclo, e il normalizzatore in S_7 di un 7-ciclo ha ordine 42, un tale sottogruppo non può essere normale in $GL(3, \mathbb{F}_2)$. In particolare, ne segue che $GL(3, \mathbb{F}_2)$ ha 8 7-Sylow, tutti contenuti in N per normalità: l'azione transitiva di N sugli 8 7-Sylow mostra in particolare che anche 8 divide $|N|$; pertanto, 56 divide $|N|$. D'altra parte, un 2-Sylow di N non può essere unico: altrimenti, sarebbe normale in $GL(3, \mathbb{F}_2)$ senza che 7 divid

5. Per assurdo, sia $C_P(A) \gneq A$: per il lemma N/C e la normalità di A, il centralizzatore di A è normale in P; inoltre A è normale in $C_P(A)$ in modo ovvio. Per corrispondenza, il quoziente $C_P(A)/A$ è un sottogruppo normale di P/A, che è ancora un p-gruppo. Allora $C_P(A)/A$ interseca il centro di P/A in modo non banale: se $H/A < C_P(A)/A \cap Z(P/A)$ ha ordine p, H/A è normale in P/A perché è un sottogruppo del centro. Per corrispondenza, si ottiene che H è normale in P; peraltro, H è abeliano, perché il suo centro contiene A e non può avere indice p in H: ciò fornisce l'assurdo. A questo punto, osserviamo l'azione di coniugio di P su $A \setminus \{1\}$ è ben definita per normalità di A, e il suo nucleo è $C_P(A) = A$: ciò definisce una mappa iniettiva $P/A \longrightarrow S(|A| - 1)$, e perciò $|P|$ divide $|A|!$.
A questo punto, per mostrare il punto (b), notiamo che basta mostrare che la cardinalità di ognuno dei p-Sylow di G divide $n!$: se però P è un p-Sylow di G, e m è la cardinalità di un sottogruppo abeliano A_P normale massimale in G, $|P|$ divide $m!$ per quanto sopra, e quindi $n!$ perché A_P è un sottogruppo abeliano di G, da cui $m \leq n$.