Gara di Gruppi 2023, Proposte di Soluzione

A Per il punto **1.**, sia $x \in F$ di ordine p: per ogni $y \in F \setminus 1$, esiste $\varphi \in G$ tale che $\varphi(x) = y$, pertanto y ha ordine p. Inoltre, $Z(F)$ è caratteristico, e pertanto è banale oppure è tutto F; ma F è un p-gruppo, il che implica $Z(F) \neq 1$, e perciò F è abeliano.

Venendo a **2.**, se F è 2-abeliano elementare o isomorfo a C_3, è facile vedere che l'azione di G è 2-transitiva: questo è ovvio per $F = C_3$; altrimenti la tesi segue dal fatto che F è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_2$ tale che, se $x, y \in F$ sono distinti, $\{x, y\}$ è linearmente indipendente.

Viceversa, se l'azione di G è 2-transitiva, sia $x \in F \setminus 1$, e supponiamo che esista $y \notin \langle x \rangle$. Se $x^2 \neq 1$, esiste $\varphi \in G$ tale che $\varphi(x) = x, \varphi(x^2) = y$, da cui $y = x^2$, il che è assurdo. Ne segue che, se F non è ciclico, $x^2 = 1$ per ogni $x \in F$.

Se invece F è ciclico, vale necessariamente $F \simeq C_p$ per qualche primo p: questo caso produce $F = C_2, C_3$; d'altra parte, se $x^3 \neq 1, x$, si ottiene facilmente un assurdo con un ragionamento analogo al precedente.

Se poi $k =$**3.**, siano $x, y, z \in F$ distinti e diversi da 1. Esiste $\varphi \in G$ tale che

$$\varphi(x) = x, \varphi(y) = y, \varphi(xy) = z,$$

da cui $z = xy$. Pertanto, F ha 3 elementi non banali di ordine 2, cioè è isomorfo a $C_2 \times C_2$ (in questo caso, l'azione è effettivamente 3-transitiva). Ne segue anche che non esistono F tali che l'azione di G sia k-transitiva per $k \geqslant 4$.

Quanto a **4.**, diamo solo uno sketch: calcoli divertenti da fare, molto meno da riportare completamente, e comunque analoghi a quelli già esplicitati, mostrano che un'azione debolmente k-transitiva è comunque 1-transitiva, e pertanto restringono l'analisi a p-gruppi abeliani elementari. Si conclude poi facilmente che gli F per cui l'azione di G è debolmente 2-transitiva sono gli stessi del punto **2.**, mentre gli unici F con un'azione debolmente 3-transitiva sono $C_2 \times C_2$ e C_5 (quest'azione è anche debolmente 4-transitiva in modo ovvio).

B Per **1.**, supponiamo che G non sia un p-gruppo, e sia $M < G$ un sottogruppo massimale. Se p divide $|G|$, un p-Sylow P di G è contenuto in un massimale $M^g < G$, da cui $M > {}^gP$. Perciò, M contiene un p-Sylow P_p di G per ogni primo p che divide $|G|$: questo è assurdo, dato che $\langle P_p \mid p \text{ divide } |G| \rangle = G$. Di conseguenza, G è un p-gruppo.

Ricordiamo ora che, in un p-gruppo G, un sottogruppo massimale M è normale: se non lo fosse, si avrebbe $M = N_G(M)$ per massimalità, e M avrebbe p coniugati; siccome l'azione di coniugio di M su tali coniugati ha almeno un punto fisso, cioè M, l'equazione delle orbite mostra che ciò è impossibile.

Ne segue che, nelle nostre ipotesi, G è un p-gruppo con un unico massimale M. Ma allora, se $x \in G \setminus M$, $\langle x \rangle = G$, cioè G è ciclico. Nel punto 2., siano $M, K < G$ due massimali non coniugati, e mostriamo che uno dei due è necessariamente normale. Supponiamo che nessuno dei due lo sia, per cui $M = N_G(M), K = N_G(K)$, e siano S, T trasversali per l'azione di coniugio di G su M, K rispettivamente: vale allora

$$\begin{aligned} |G| &\geqslant \left| \bigcup_{g \in S} M^g \cup \bigcup_{g \in T} K^g \right| \\ &\geqslant 1 + (|M| - 1) \cdot [G : M] + (|K| - 1) \cdot [G : K] \\ &= 1 + 2 \cdot |G| - ([G : M] + [G : K]), \end{aligned}$$

da cui

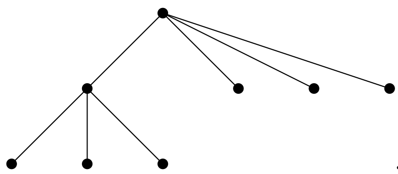
$$|G| < [G : M] + [G : K],$$

che implica facilmente che uno tra M e K è uguale a 1, cioè G è ciclico di ordine primo, il che è assurdo.

Se ne conclude che G ha un'unica classe di coniugio di massimali non normali. Dal punto precedente, si ottiene che G ha per forza un massimale normale.

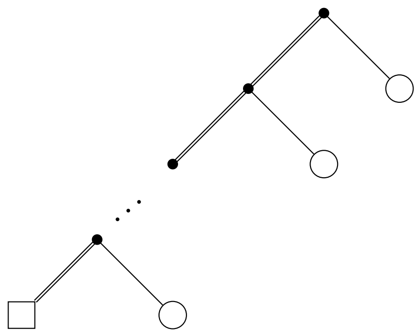
Il punto 3. segue da un'applicazione diretta del teorema di struttura dei gruppi abeliani finiti, che mostra che gli n-alberi di Natale abeliani sono solo C_{p^n}, per ogni n, e $C_p \times C_q$, con p e q primi non necessariamente distinti.

Un esempio per il punto 4. è A_4, che è in effetti un 2-albero di Natale non abeliano. Non è difficile vedere che $\mathcal{S}(A_4)$ ha la forma



.

Risolviamo infine 5.: sia G un albero di Natale non abeliano. Allora G verifica la condizione al punto 2., e ha in particolare un sottogruppo massimale normale $M = G_1$. Notiamo che tale massimale normale è unico: se ci fosse un ulteriore massimale normale K, G sarebbe il prodotto diretto $M \times K$. Quest'ultima condizione obbliga G a essere della forma $C_p \times C_q$, e quindi porta a un assurdo: se M ha un sottogruppo H non banale, $HK < G$ è un sottogruppo proprio tra G e K, il che è assurdo per massimalità di K, e lo stesso vale scambiando M e K. Si ottiene quindi che G_1 è caratteristico in G. Iterando il ragionamento, si ha che o G_1 è abeliano, oppure ha un unico sottogruppo G_2 massimale normale, e quindi caratteristico in G. In definitiva, la struttura di $\mathcal{S}(G)$ è del tipo



dove la doppia linea indica un sottogruppo caratteristico, il cerchio vuoto una classe di coniugio di sottogruppi non normali, e il quadrato rimpiazza il grafo $\mathcal{S}(A)$ di un sottogruppo abeliano $A = G_k$ (che dipende da A), di modo che i sottogruppi caratteristici $G_1 > \cdots > G_{k-1}$ sono non abeliani.

Se A possiede un sottogruppo caratteristico B non banale, tale B è normale in G, e produce (per prodotto, ad esempio, con un massimale non normale in G), un ciclo in $\mathcal{S}(G)$: pertanto, A è abeliano elementare, e $\mathcal{S}(A)$ ha altezza 1.

Per lo stesso motivo, dev'essere $k = 2$: altrimenti, G_3 è non banale e normale in G, e produce un ciclo in $\mathcal{S}(G)$. Se ne conclude che un albero di Natale non abeliano è al più un 2-albero, e che un abete è per forza abeliano e, di più, isomorfo a C_{p^n} per $n \geqslant 4$.

Quindi, gli unici abeti sono degli orribili pali, a cui è impossibile attaccare palline: ne segue che la Teoria dei Gruppi odia il Natale.

C Per il punto 1., sia $x \in X$: è sufficiente mostrare che, per ogni $g \notin G_x$, vale $\langle G_x, g\rangle = G$. Dal fatto che G agisce 2-transitivamente segue che G_x agisce transitivamente su $X \setminus \{x\}$, poiché per ogni scelta di (x, y) e (x, z) con $x \neq y, z$ esiste $g \in G$ tale che $gx = x$ (cioè $g \in G_x$) e $gy = z$.

Pertanto, se $g \notin G_x$, il sottogruppo $\langle g, G_x\rangle$ agisce transitivamente su X; allora, per $h \in G$, esiste $k \in \langle g, G_x\rangle$ tale che $kx = hx$, cioè $kh^{-1} \in G_x$, il che mostra che $G = \langle g, G_x\rangle$ e conclude.

Nel punto 2. basta dimostrare che, se $N < G$ è normale e diverso da 1, G/N è abeliano. D'altra parte, NG_x è un sottogruppo di G per normalità di N, e coincide con G per massimalità di G_x poiché $N \not< G_x$: altrimenti, varrebbe $N < (G_x)_G$, che è il nucleo dell'azione perché questa è transitiva, e quindi sarebbe $N = 1$. Di conseguenza, G/N è isomorfo a un quoziente di G_x, e quindi è abeliano.

Ora, l'isomorfismo cercato al punto 3. segue dall'azione di $\mathrm{PSL}(2,3)$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$, cioè sulle rette di $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$, che sono 4: $\mathbb{F}_3^2$ ha 8 punti diversi da 0, accoppiati a due a due in rette.

Tale azione è fedele e 2-transitiva, come si verifica senza difficoltà, e immerge

$\mathrm{PSL}(2,3)$ in S_4. D'altra parte, vale $|\mathrm{PSL}(2,3)| = 12$, poiché

$$|\mathrm{SL}(2,3)| = \frac{|\mathrm{GL}(2,3)|}{2},$$

e $|\mathrm{GL}(2,3)| = 48$. Siccome l'unico sottogruppo di ordine 12 in S_4 è A_4, si conclude $\mathrm{PSL}(2,3) \simeq A_4$.

Il punto 4. è un po' tedioso! Intanto, il coniugio con la matrice "antidiagonale" $(1-\delta_{ij})$ mostra che le matrici unitriangolari inferiori $\mathrm{DT}(2,q)$ sono coniugate a $\mathrm{UT}(2,q)$. Notiamo ora che moltiplicare a sinistra (risp. destra) una matrice A per un elemento di $\mathrm{UT}(2,q)$ equivale a sommare un po' di volte la prima riga (risp. colonna) alla seconda, e usare invece una matrice triangolare inferiore equivale a sommare un po' di volte la seconda riga/colonna alla prima.

Pertanto, partendo da una matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,q),$$

possiamo supporre $b \neq 0$ a meno di moltiplcare a destra per un'opportuna matrice unitriangolare inferiore D_1, e poi moltiplicare ancora per un elemento $D_2 \in \mathrm{DT}(2,q)$ per ottenere 1 al posto di a. Moltiplicando a sinistra per $U_1 \in \mathrm{UT}(2,q)$ opportuno si riesce ad annullare c, e questo produce un elemento $U_2 \in \mathrm{UT}(2,q)$ poiché $\det(AD_1D_2U_1) = 1$. Ne segue che

$$A = U_2U_1^{-1}D_2^{-1}D_1^{-1},$$

che mostra quanto richiesto.

In conclusione, il punto 4. permette facilmente di mostrare che $\mathrm{SL}(2,q)$ è perfetto (e quindi lo è anche $\mathrm{PSL}(2,q)$): infatti, per $x \in \mathbb{F}_q^\times \setminus \{\pm 1\}$ e $a \in \mathbb{F}_q^\times$ vale

$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & a(x^2-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

che mostra che $\mathrm{UT}(2,q)$ è contenuto nel derivato di $\mathrm{SL}(2,q)$, e quindi $\mathrm{SL}(2,q)$ coincide col suo derivato per quanto scoperto prima su $\mathrm{UT}(2,q)$.

Ora, l'azione di $\mathrm{PSL}(2,q)$ sulle rette di $\mathbb{F}_q^2$ è 2-transitiva e fedele come nel punto 3., e lo stabilizzatore della retta $\mathbb{F}_q(1,0)$ è isomorfo a $\mathrm{UT}(2,q)$, il che si vede notando che è la proiezione di $\mathrm{UT}(2,q) < \mathrm{SL}(2,q)$ al quoziente. Ma $\mathrm{UT}(2,q)$ è abeliano, in quanto isomorfo a $\mathbb{F}_q$. Allora, la semplicità di $\mathrm{PSL}(2,q)$ è una conseguenza del punto 2.: un sottogruppo normale di $G = \mathrm{PSL}(2,q)$ è 1 oppure, dovendo contenere il derivato di G, è l'intero G. Questo risolve il punto 5..

D Sia P un p-Sylow di G come nel punto textcolortitlepagecolor**1.**, cioè tale che l'insieme X dei suoi coniugati sia finito. Allora, l'azione di coniugio di P su X ha un unico punto fisso, vale a dire P: pertanto, l'equazione delle orbite mostra che $|X| \equiv 1 \pmod p$. Se, per assurdo, esistesse un p-Sylow Q non coniugato a P, la stessa equazione applicata all'azione di Q su X, priva di punti fissi, permetterebbe invece di dedurre che $|X| \equiv 0 \pmod p$.

Per **2.**, notiamo il seguente fatto: se G è localmente finito e ogni suo sottogruppo finito H verifica $|H| \leqslant n$ per qualche n fissato, allora G è finito (se infatti H ha cardinalità massima tra i sottogruppi finiti di G, dev'essere $G = \langle H, x \rangle$ per locale finitezza di G, e pertanto G è finito).

Sia ora P un p-Sylow finito di G, e sia Q un qualsiasi altro p-Sylow. Se per assurdo Q non fosse finito, esisterebbe $X < Q$ finito tale che $|X| > |P|$ per l'osservazione precedente: ma questo è assurdo, perché $H = \langle P, X \rangle$ è ancora finito e, in H, X è contenuto in un coniugato di P in quanto P è un p-Sylow di H. Quindi Q è finito, e allora un ragionamento analogo mostra che Q è coniugato a P (lo è in $\langle P, Q \rangle$).

Un esempio per il punto **3.** è dato da $G = S_3^{\oplus \mathbb{N}}$ (l'insieme delle successioni a supporto finito di elementi di S_3). Infatti, si verifica immediatamente che, se $\tau = (\tau_n)$ è una successione in G tale che i τ_n diversi da 1 abbiano ordine 2, allora $P_\tau = \langle \tau \rangle$ è un 2-Sylow (un qualsiasi sottogruppo di G che contiene propriamente P_τ ha un elemento di ordine 3). Pertanto, ci sono (almeno) $3^{\aleph_0} > \aleph_0$ p-Sylow in G. Poiché G è numerabile, non possono essere tutti coniugati.

Veniamo a **4.**. Siano P e Q due p-Sylow non coniugati, e supponiamo che Q abbia un sottogruppo finito Y tale che Q è l'unico p-Sylow di G che lo contiene. Se $X < P$ è finito, sia $H = \langle X, Y \rangle$: poiché Q è l'unico p-Sylow di G che contiene Y, l'intersezione $Q \cap H$ dev'essere un p-Sylow di H, in quanto un p-sottogruppo di H che contiene Y dev'essere contenuto in Q. Di conseguenza, X è contenuto in un coniugato $(Q \cap H)^g$ di $Q \cap H$, e in particolare $X < Q^g$, che è diverso da P perché P e Q non sono coniugati. Quindi, P ha la proprietà voluta.

Una costruzione possibile per il punto **5.** è questa. Sia P come al punto precedente, sia X un p-sottogruppo finito di P e sia $Q \neq P$ un p-Sylow di G tale che $X < Q$. Fissiamo $x \in Q \setminus P$ e poniamo $H = \langle X, x \rangle$, notando che è un p-gruppo finito contenuto in Q. Se $K = P \cap H$, vale

- $K \lneqq N_H(K)$, perché K è un sottogruppo proprio di H, e in un p-gruppo i normalizzatori crescono;
- $N_H(K) \not< N_G(P)$, perché altrimenti sarebbe contenuto in P, dato che P è l'unico p-Sylow di $N_G(P)$, e questo è certamente falso.

Prendendo allora $y \in N_H(K) \setminus N_G(P)$, si ottiene che $P^y \neq P$, da cui $\langle P, P^y \rangle$ non è un p-gruppo, e pertanto esiste un sottogruppo finito $X_0 < P$ e contenente K tale che $\langle X_0, X_0^y \rangle$ non è un p-gruppo. Scegliendo $X_1 = X_0^y$ si verifica facilmente che le condizioni richieste risultano verificate.

Risolviamo infine 6. Iterando la costruzione fatta al punto precedente si ottiene un albero di sottogruppi (dove gli archi denotano inclusioni) della forma

$$
\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
 & & & \vdots & & & \\
X_{00} \arrow[dr, dash] & & X_{01} \arrow[dl, dash] & & X_{10} \arrow[dr, dash] & & X_{11} \arrow[dl, dash] \\
 & X_0 \arrow[drr, dash] & & & & X_1 \arrow[dll, dash] & \\
 & & & X & & &
\end{tikzcd}
$$

tale che, a ogni biforcazione, il sottogruppo $\langle X_{\ldots 0}, X_{\ldots 1} \rangle$ non sia un p-gruppo, dove $\ldots$ denota una sequenza finita di 0 o 1 uguale per i due pedici. Notiamo che è effettivamente possibile produrre questa iterazione in quanto ad esempio X_1, pur non essendo contenuto in P, sta in un suo coniugato, che ha ancora la proprietà del punto 3.

Se ogni biforcazione produce un "non p-gruppo", notiamo invece che ogni ramo massimale dell'albero produce un p-gruppo: vale a dire, se $\mathbf{i} = i_0 i_1 i_2 \ldots$ è una successione di 0 e 1, il sottogruppo

$$X_{\mathbf{i}} = \bigcup_k X_{i_0 i_1 \ldots i_k}$$

è un p-gruppo, che è quindi contenuto in un p-Sylow (il che segue da Zorn). Allora, se $P_{\mathbf{i}}$ è un qualsiasi p-Sylow che contiene $X_{\mathbf{i}}$, dev'essere necessariamente $P_{\mathbf{i}} \neq P_{\mathbf{j}}$ per $\mathbf{i} \neq \mathbf{j}$, visto che, se $i_k \neq j_k$ per la prima volta, $\langle X_{\ldots i_k}, X_{\ldots j_k} \rangle$ non è un p-gruppo.

Abbiamo quindi trovato un p-Sylow di G per ogni successione di 0 e 1, e dunque mostrato che un gruppo G localmente finito numerabile con due p-Sylow non coniugati ha una quantità più che numerabile di p-Sylow.

Il viceversa è decisamente più semplice: se i p-Sylow di G sono tutti coniugati, necessariamente sono in quantità numerabile, perché G lo è.