Gara di Gruppi 2020, 28 novembre

A Dati un primo p e un gruppo finito G, indichiamo con $n_p(G)$ il numero dei p-Sylow di G.

1. Mostrate che, se G è un gruppo finito e $N < G$ è un sottogruppo normale, vale $n_p(G/N) \leqslant n_p(G)$.

Diciamo che un gruppo G è p-*decrescente* se, per ogni sottogruppo $N \neq 1$ normale in G, vale $n_p(G/N) < n_p(G)$.

2. Provate che, se G è p-decrescente, e $n = n_p(G)$, allora $|G|$ divide $n!$.

3. Al variare di p ed n come sopra, descrivete i gruppi p-decrescenti tali che $|G| = n!$.

B **4.** Dite per quali coppie (p, q) di primi esistono gruppi di ordine p^3q privi di sottogruppi di Sylow normali non banali.

5. Classificate, a meno di isomorfismo, i gruppi di ordine p^3q con la proprietà sopra.

C Dato un gruppo G, definiamo il *commutatore* $[S, T]$ di due sottoinsiemi S, T di G come il sottogruppo $\langle [s, t] \mid s \in S, t \in T \rangle$.

6. Provate che, se $H, K < G$, $[H, K]$ è normale in $\langle H, K \rangle$. Mostrate inoltre l'uguaglianza $[HK, G] = [H, G][K, G]$ per ogni coppia H, K di sottogruppi di G.

Diciamo che un gruppo H è *integrabile* se esiste un gruppo G tale che il suo derivato $G' = [G, G]$ è isomorfo a H.

7. È vero che ogni gruppo abeliano è integrabile?

8. Esibite un insieme infinito di gruppi non integrabili.

D Sia p un primo, e sia $GL(n, p)$ il gruppo delle matrici invertibili di taglia n a coefficienti in $\mathbb{F}_p$. Indichiamo con $UT(n, p) < GL(n, p)$ il sottogruppo delle matrici unitriangolari superiori, cioè della forma (a_{ij}), con $a_{ii} = 1$ per ogni i e $a_{ij} = 0$ per $i > j$.

9. Mostrate che, se P è un p-gruppo finito, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che P si immerge in $UT(n, p)$.

10. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, trovate il minimo n tale che ogni gruppo *abeliano* di ordine p^k si immerge in $UT(n, p)$.

E Sia G un gruppo finito, e sia H normale in G. Diciamo che un sottogruppo $M < G$ è un H-*prodotto massimale* se è massimale tra i prodotti diretti interni $H_1 \cdot H_2 \cdots H_n < G$, dove $n \in \mathbb{N}$, e ogni H_i è normale in G e isomorfo ad H.
Detto in altri termini, M è massimale tra i prodotti $H_1 \cdots H_n$ per cui gli H_i hanno

le proprietà sopra e sono tali che la mappa naturale $H_1 \times \cdots \times H_n \to H_1 \cdots H_n$ è un isomorfismo.
Ricordiamo che $N < G$ è *normale minimale* se l'unico sottogruppo normale di G che N contiene propriamente è 1 (cioè, N è minimale tra i sottogruppi normali di G).

11. Sia H è un sottogruppo di ordine minimo tra i sottogruppi normali minimali di G. Mostrate che un H-prodotto massimale è caratteristico in G.

Sia ora $N^* = N^*(G)$ il sottogruppo generato dai sottogruppi normali minimali di G.

12. Provate che, se G è risolubile, N^* è abeliano; se, al contrario, G non possiede sottogruppi normali risolubili non banali, $C_G(N^*) = 1$.

13. Caratterizzate le possibili classi di isomorfismo di $N^*(G)$, al variare di G tra i gruppi finiti.

F Sia G un gruppo infinito. Diciamo che una proprietà P vale per *quasi tutti* i sottogruppi di G se esiste al più un numero finito di sottogruppi $H < G$ per cui P non vale.

14. Sia σ un automorfismo di G tale che $\sigma H = H$ per quasi tutti i sottogruppi $H < G$. Mostrate che $\sigma H = H$ per ogni $H < G$ infinito.

15. Supponiamo che G abbia un numero finito, strettamente positivo, di sottogruppi non normali. Mostrate che esistono $K, L < G$ con le seguenti proprietà:

i. L ha indice finito in G e ogni $H < L$ è normale in L.
ii. $K < L$ non è normale in G.