Gara di Gruppi 2022, 9 dicembre

A Per un gruppo finito G, la *misura di Chermak-Delgado* di un suo sottogruppo H è data da $m_G(H) = |H| \cdot |C_G(H)|$.

1. Per $H, K < G$, mostrate che valgono

$$m_G(H) \leqslant m_G(C_G(H)), \quad m_G(H)\, m_G(K) \leqslant m_G(H \cap K)\, m_G(\langle H, K \rangle),$$

e dite quando vale l'uguaglianza.

2. Provate che esiste $N < G$ abeliano e caratteristico tale che $[G : N] \geqslant [G : A]^2$ per ogni $A < G$ abeliano.

3. Supponiamo che, al variare di $H < G$, m_G assuma esattamente due valori. Dimostrate che G è un p-gruppo, e caratterizzate $Z(G)$.

B **4.** Mostrate che un gruppo di ordine $3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 315$ ha un unico 7-Sylow.

Sia G un gruppo tale che $n_7(G) = 15$.

5. Se G ha ordine minimo tra i gruppi con $n_7(G) = 15$, provate che G si immerge in A_{15}.

6. Dimostrate inoltre che un 7-Sylow di G ha ordine 7.

7. Concludete che nessun gruppo finito G ha esattamente 15 7-Sylow.

C **8.** Per x, y in un gruppo G, definiamo $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Dati $x, y, z \in G$ tali che y commuta con $[x, z]$, mostrate che

$$[xy, z] = [x, z][y, z].$$

Se inoltre $x, y \in G$ commutano con $[x, y]$, provate che per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$[x, y]^n = [x^n, y] = [x, y^n], \quad (xy)^n = x^n y^n [y, x]^{\binom{n}{2}}.$$

Data una proprietà **P** di un gruppo, diciamo che G è *non* **P** *minimale* se G è l'unico dei suoi sottogruppi che non verifica **P**.

9. Sia G un p-gruppo finito non abeliano minimale. Calcolate $[G : Z(G)]$ e $|G'|$.

10. Classificate i p-gruppi finiti non ciclici minimali.

D **11.** Sia $\mathbf{Q}$ il gruppo additivo dei razionali. Se $A, B < \mathbf{Q}$, dimostrate che ogni isomorfismo tra A e B è della forma $x \mapsto qx$ per qualche $q \in \mathbf{Q}$.

12. Mostrate che esistono infiniti gruppi G non isomorfi tali che $\mathrm{Aut}(G) \simeq C_2$.

E Sia $G = G_0$ un gruppo finito tale che $Z(G) = 1$ e, per ogni $i > 0$, poniamo $G_i = \mathrm{Aut}(G_{i-1})$.

13. Mostrate che $C_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Inn}(G)) = 1$ e provate che, per ogni i, G_i si identifica con un sottogruppo normale di G_{i+1}.

Per G e G_i come sopra, sia $\tau(G)$ il minimo n, se esiste, tale che $G_n = G_{n+1}$.

14. Trovate il minimo valore N_s tale che $\tau(S) \leqslant N_s$ per ogni gruppo semplice S non abeliano.