Gara di Gruppi 2023, 18 dicembre

Sia G un gruppo che agisce su un insieme X, e sia $k > 0$ un numero naturale tale che $|X| \geqslant k$. Diciamo che l'azione è

- k-*transitiva* se per ogni scelta di k-uple $(x_1, \dots x_k)$, $(y_1, \dots, y_k)$ in X^k, con gli x_i e gli y_i rispettivamente distinti, esiste $g \in G$ tale che $(gx_1, \dots, gx_k) = (y_1, \dots y_k)$;

- *debolmente* k-*transitiva* se per ogni scelta di k-sottoinsiemi $\{x_1, \dots x_k\}$, $\{y_1, \dots, y_k\}$ in X esiste $g \in G$ tale che $\{gx_1, \dots, gx_k\} = \{y_1, \dots y_k\}$.

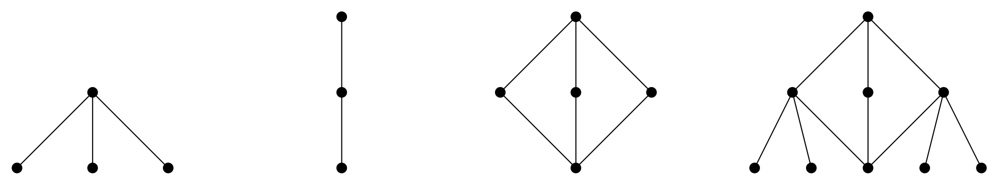
A Sia F un gruppo finito, e sia $G = \mathrm{Aut}(F)$. Consideriamo l'azione naturale di G su $F \setminus \{1\}$.

1. (2 pt.) Se l'azione di G è transitiva, mostrate che F è un p-gruppo abeliano elementare per qualche primo p.
2. (3 pt.) Mostrate che l'azione di G è 2-transitiva se e solo se F è 2-abeliano elementare o $|F| = 3$.
3. (3 pt.) Al variare di $k > 2$, trovate gli F per cui l'azione di G è k-transitiva.
4. (5 pt.) Al variare di $k = 2, 3$, trovate gli F per cui l'azione di G è debolmente k-transitiva.

B

1. (4 pt.) Mostrate che un gruppo G finito che ha un'unica classe di coniugio di sottogruppi massimali è ciclico.
2. (4 pt.) Mostrate che un gruppo G finito tale che ogni coppia di sottogruppi massimali di G abbia intersezione banale ha un massimale normale.

Fissato un gruppo finito G, gli associamo un grafo $\mathcal{S}(G)$ in questo modo: i vertici sono i sottogruppi di G diversi da 1 e, per $1 \lneq H, K < G$, c'è un arco tra H e K se e solo se H è massimale in K (o viceversa).



$\mathcal{S}(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2)$ $\mathcal{S}(\mathbb{Z}/27)$ $\mathcal{S}(Q_8)$ $\mathcal{S}(D_4)$

Per $n \in \mathbb{N}$, diciamo che un gruppo G è un n-*albero di Natale* se $\mathcal{S}(G)$ è un albero di altezza n (ad esempio, $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ e $\mathbb{Z}/27$ sono un $1-$ e un $2-$albero di Natale, rispettivamente, mentre Q_8 e D_4 non sono alberi di Natale). Un n-albero di Natale G per $n \geqslant 3$ è un *abete*.

3. (3 pt.) Al variare di n, classificate gli n-alberi di Natale abeliani.

4. (3 pt.) Esibite un 2-albero di Natale non abeliano.

5. (6 pt.) Classificate gli abeti, e deducetene che la teoria dei gruppi odia il Natale.

C Sia $G \curvearrowright X$ un'azione 2-transitiva e fedele.

1. (4 pt.) Mostrate che gli stabilizzatori G_x $(x \in X)$ dell'azione sono massimali in G.

2. (3 pt.) Supponiamo che esista $x \in X$ tale che G_x è abeliano. Dimostrate che i sottogruppi normali di G diversi da 1 contengono G'.

Sia ora $q = p^r$ con $p \in \mathbb{N}$ un primo e r un intero positivo. Indichiamo con $SL(2, q)$ il gruppo delle matrici A 2×2 a coefficienti in $\mathbb{F}_q$ con $\det(A) = 1$. Definiamo poi $UT(2, q)$ il sottogruppo delle matrici (a_{ij}) unitriangolari, cioè tali che $a_{11} = a_{22} = 1$ e $a_{21} = 0$, e $PSL(2, q)$ il quoziente $SL(2, q)/\langle -I \rangle$.

3. (3 pt.) Dimostrate che $PSL(2, 3)$ è isomorfo ad A_4.

4. (3 pt.) Dimostrate che, per $q > 3$, i coniugati di $UT(2, q)$ generano $SL(2, q)$.

5. (4 pt.) Dimostrate che $PSL(2, q)$ è semplice per $q > 3$.

D Per un gruppo G infinito, un p-*Sylow* è, per definizione, un p-sottogruppo massimale (rispetto all'inclusione).

1. (3 pt.) Mostrate che, se un p-Sylow di G ha un numero finito di coniugati, tutti i p-Sylow di G sono coniugati.

Sia G un gruppo *localmente finito*, cioè tale che ogni sottogruppo finitamente generato di G è finito.

2. (4 pt.) Mostrate che, se G ha un p-Sylow finito, tutti i p-Sylow di G sono finiti e coniugati tra loro.

3. (4 pt.) Trovate un gruppo G localmente finito tale che i suoi p-Sylow non siano tutti coniugati.

Sia ora G un gruppo localmente finito numerabile, e supponiamo che G abbia due p-Sylow non coniugati.

4. (4 pt.) Mostrate che G ha un p-Sylow P tale che, se $X < P$ è finito, X sta in almeno un altro p-Sylow Q di G.

5. (6 pt.) Per $X < P$ finito, costruite $X_0, X_1 < G$ finiti tali che
   - $X < X_0, X_1$,
   - $X_0 < P$,
   - X_1 è coniugato a X_0,
   - $\langle X_0, X_1 \rangle$ non è un p-gruppo.

6. (4 pt.) Dimostrate che, se G è un gruppo localmente finito e numerabile, i p-Sylow di G sono tutti coniugati se e solo se sono in quantità numerabile.