

Biliardi poligonali

Antonio De Capua

Relatore: prof. **Stefano Marmi**

Scuola Normale Superiore

Colloquio IV anno, 4 maggio 2011

Lo studio dei biliardi poligonali

- I **biliardi poligonali** come sistema dinamico sono oggetto di studio relativamente recente, su cui rimangono aperte numerose questioni.

Lo studio dei biliardi poligonali

- I **biliardi poligonali** come sistema dinamico sono oggetto di studio relativamente recente, su cui rimangono aperte numerose questioni.
- Ci interessano in particolare le loro proprietà di “indecomponibilità”: la **minimalità** e l'**ergodicità**; nonché l'esistenza di **orbite periodiche**.

Lo studio dei biliardi poligonali

- I **biliardi poligonali** come sistema dinamico sono oggetto di studio relativamente recente, su cui rimangono aperte numerose questioni.
- Ci interessano in particolare le loro proprietà di “indecomponibilità”: la **minimalità** e l'**ergodicità**; nonché l'esistenza di **orbite periodiche**.
- Vedremo qual è l'impostazione usata per studiare i **biliardi razionali**.

Lo studio dei biliardi poligonali

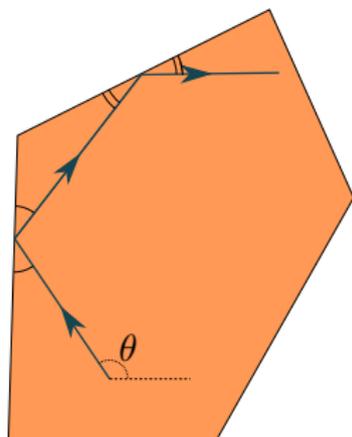
- I **biliardi poligonali** come sistema dinamico sono oggetto di studio relativamente recente, su cui rimangono aperte numerose questioni.
- Ci interessano in particolare le loro proprietà di “indecomponibilità”: la **minimalità** e l'**ergodicità**; nonché l'esistenza di **orbite periodiche**.
- Vedremo qual è l'impostazione usata per studiare i **biliardi razionali**.
- Enunceremo i risultati principali.

Lo studio dei biliardi poligonali

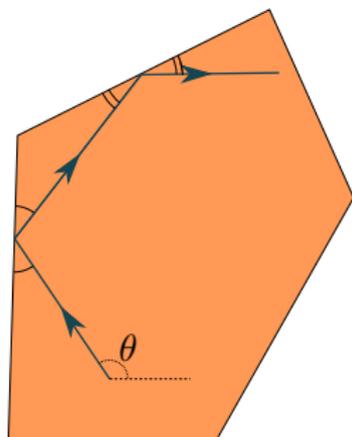
- I **biliardi poligonali** come sistema dinamico sono oggetto di studio relativamente recente, su cui rimangono aperte numerose questioni.
- Ci interessano in particolare le loro proprietà di “indecomponibilità”: la **minimalità** e l'**ergodicità**; nonché l'esistenza di **orbite periodiche**.
- Vedremo qual è l'impostazione usata per studiare i **biliardi razionali**.
- Enunceremo i risultati principali.
- Ci concentreremo su un risultato classico di Kerckhoff, Masur e Smillie, che assicura l'ergodicità nei biliardi razionali.

I biliardi poligonali come sistema dinamico

- Un biliardo poligonale è dato da un poligono nel piano e da un punto che si muove nell'interno di moto rettilineo uniforme (con velocità 1).

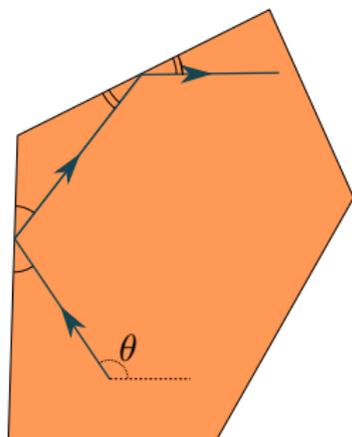


I biliardi poligonali come sistema dinamico



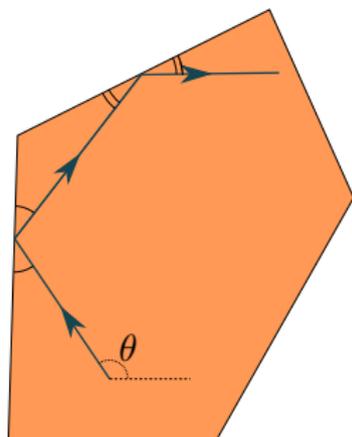
- Un biliardo poligonale è dato da un poligono nel piano e da un punto che si muove nell'interno di moto rettilineo uniforme (con velocità 1).
- Gli urti con i lati deviano il punto secondo le leggi dell'ottica.

I biliardi poligonali come sistema dinamico



- Un biliardo poligonale è dato da un poligono nel piano e da un punto che si muove nell'interno di moto rettilineo uniforme (con velocità 1).
- Gli urti con i lati deviano il punto secondo le leggi dell'ottica.
- Il moto successivo all'arrivo in un vertice non viene preso in considerazione.

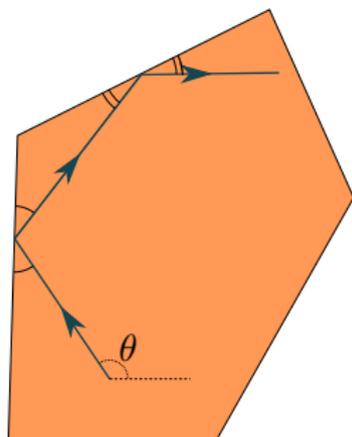
I biliardi poligonali come sistema dinamico



- Un biliardo poligonale è dato da un poligono nel piano e da un punto che si muove nell'interno di moto rettilineo uniforme (con velocità 1).
- Gli urti con i lati deviano il punto secondo le leggi dell'ottica.
- Il moto successivo all'arrivo in un vertice non viene preso in considerazione.

Il **flusso del biliardo** può essere inteso in due modi diversi:

I biliardi poligionali come sistema dinamico

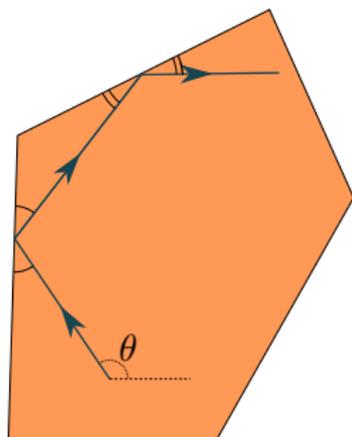


- Un biliardo poligonale è dato da un poligono nel piano e da un punto che si muove nell'interno di moto rettilineo uniforme (con velocità 1).
- Gli urti con i lati deviano il punto secondo le leggi dell'ottica.
- Il moto successivo all'arrivo in un vertice non viene preso in considerazione.

Il **flusso del biliardo** può essere inteso in due modi diversi:

- sul fibrato tangente unitario al poligono, cioè l'insieme delle coppie (punto, direzione);

I biliardi poligionali come sistema dinamico



- Un biliardo poligonale è dato da un poligono nel piano e da un punto che si muove nell'interno di moto rettilineo uniforme (con velocità 1).
- Gli urti con i lati deviano il punto secondo le leggi dell'ottica.
- Il moto successivo all'arrivo in un vertice non viene preso in considerazione.

Il **flusso del biliardo** può essere inteso in due modi diversi:

- sul fibrato tangente unitario al poligono, cioè l'insieme delle coppie (punto, direzione);
- fissando a priori una direzione iniziale θ .

Esempio: gli urti fra due masse

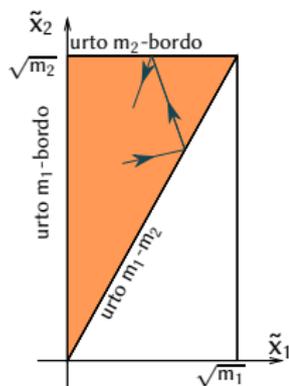


Lo spazio delle configurazioni di due punti materiali vincolati nell'intervallo $[0, 1]$ può essere visualizzato come un biliardo triangolare:

Esempio: gli urti fra due masse



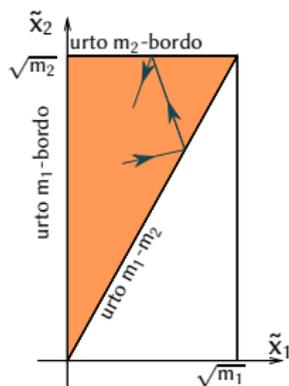
Lo spazio delle configurazioni di due punti materiali vincolati nell'intervallo $[0, 1]$ può essere visualizzato come un biliardo triangolare:



- Posti $\tilde{x}_j = x_j / \sqrt{m_j}$, lo spazio delle configurazioni è

$$\{0 \leq \sqrt{m_1} \tilde{x}_1 \leq \sqrt{m_2} \tilde{x}_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

Esempio: gli urti fra due masse



Lo spazio delle configurazioni di due punti materiali vincolati nell'intervallo $[0, 1]$ può essere visualizzato come un biliardo triangolare:

- Posti $\tilde{x}_j = x_j / \sqrt{m_j}$, lo spazio delle configurazioni è

$$\{0 \leq \sqrt{m_1} \tilde{x}_1 \leq \sqrt{m_2} \tilde{x}_2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

- Dalla conservazione dell'impulso e dell'energia si ha che i lati deviano la traiettoria come nei biliardi.

Minimalità ed ergodicità

Definizione

Sia X uno spazio topologico. Un flusso continuo $\Phi : X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ è:

- **topologicamente transitivo** se esiste un'orbita densa in X ;

Minimalità ed ergodicità

Definizione

Sia X uno spazio topologico. Un flusso continuo $\Phi : X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ è:

- **topologicamente transitivo** se esiste un'orbita densa in X ;
- **minimale** se tutte le orbite sono dense in X .

Minimalità ed ergodicità

Definizione

Sia X uno spazio topologico. Un flusso continuo $\Phi : X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ è:

- **topologicamente transitivo** se esiste un'orbita densa in X ;
- **minimale** se tutte le orbite sono dense in X .

Se (X, \mathcal{A}, μ) è anche uno spazio di misura finito e Φ la **preserva**, cioè

$$\forall Y \in \mathcal{A}, t \geq 0 \text{ vale } \mu(\Phi_t^{-1}(Y)) = \mu(Y) :$$

Minimalità ed ergodicità

Definizione

Sia X uno spazio topologico. Un flusso continuo $\Phi : X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ è:

- **topologicamente transitivo** se esiste un'orbita densa in X ;
- **minimale** se tutte le orbite sono dense in X .

Se (X, \mathcal{A}, μ) è anche uno spazio di misura finito e Φ la **preserva**, cioè

$$\forall Y \in \mathcal{A}, t \geq 0 \text{ vale } \mu(\Phi_t^{-1}(Y)) = \mu(Y) :$$

Definizione

Il flusso Φ è **ergodico** se vale una delle seguenti condizioni:

- 1 $\forall t \geq 0, Y \in \mathcal{A}$ fissati vale $\Phi_t^{-1}(Y) = Y \Rightarrow \mu(Y) = 0$ o $\mu(X \setminus Y) = 0$;

Minimalità ed ergodicità

Definizione

Sia X uno spazio topologico. Un flusso continuo $\Phi : X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ è:

- **topologicamente transitivo** se esiste un'orbita densa in X ;
- **minimale** se tutte le orbite sono dense in X .

Se (X, \mathcal{A}, μ) è anche uno spazio di misura finito e Φ la **preserva**, cioè

$$\forall Y \in \mathcal{A}, t \geq 0 \text{ vale } \mu(\Phi_t^{-1}(Y)) = \mu(Y) :$$

Definizione

Il flusso Φ è **ergodico** se vale una delle seguenti condizioni:

① $\forall t \geq 0, Y \in \mathcal{A}$ fissati vale $\Phi_t^{-1}(Y) = Y \Rightarrow \mu(Y) = 0$ o $\mu(X \setminus Y) = 0$;

② $\forall f \in L^1(X, \mu)$, per μ -q.o. $x \in X$ si ha

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\Phi_t(x)) dt = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu;$$

Minimalità ed ergodicità

Definizione

Sia X uno spazio topologico. Un flusso continuo $\Phi : X \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow X$ è:

- **topologicamente transitivo** se esiste un'orbita densa in X ;
- **minimale** se tutte le orbite sono dense in X .

Se (X, \mathcal{A}, μ) è anche uno spazio di misura finito e Φ la **preserva**, cioè

$$\forall Y \in \mathcal{A}, t \geq 0 \text{ vale } \mu(\Phi_t^{-1}(Y)) = \mu(Y) :$$

Definizione

Il flusso Φ è **ergodico** se vale una delle seguenti condizioni:

- 1 $\forall t \geq 0, Y \in \mathcal{A}$ fissati vale $\Phi_t^{-1}(Y) = Y \Rightarrow \mu(Y) = 0$ o $\mu(X \setminus Y) = 0$;
- 2 $\forall f \in L^1(X, \mu)$, per μ -q.o. $x \in X$ si ha

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\Phi_t(x)) dt = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu;$$
- 3 le uniche $f \in L^1(X, \mu)$ invarianti sotto Φ sono le costanti.

Unica ergodicità

Definizione

Un flusso Φ su X è **unicamente ergodico** rispetto alla misura μ se questa è l'unica misura su X preservata da Φ . In questo caso Φ è necessariamente μ -ergodico.

Unica ergodicità

Definizione

Un flusso Φ su X è **unicamente ergodico** rispetto alla misura μ se questa è l'unica misura su X preservata da Φ . In questo caso Φ è necessariamente μ -ergodico.

- Con le dovute ipotesi sulla misura μ , vale

$$\Phi \text{ unicamente ergodico} \implies \Phi \text{ minimale}$$

ma, in generale, il viceversa è falso.

Unica ergodicità

Definizione

Un flusso Φ su X è **unicamente ergodico** rispetto alla misura μ se questa è l'unica misura su X preservata da Φ . In questo caso Φ è necessariamente μ -ergodico.

- Con le dovute ipotesi sulla misura μ , vale

$$\Phi \text{ unicamente ergodico} \implies \Phi \text{ minimale}$$

ma, in generale, il viceversa è falso.

- Vedremo i risultati principali per la minimalità e l'(unica) ergodicità rispetto alla misura di Lebesgue per il flusso del biliardo nei due punti di vista sopra discussi.

Unica ergodicità

Definizione

Un flusso Φ su X è **unicamente ergodico** rispetto alla misura μ se questa è l'unica misura su X preservata da Φ . In questo caso Φ è necessariamente μ -ergodico.

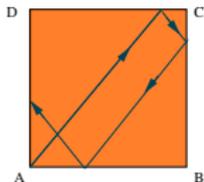
- Con le dovute ipotesi sulla misura μ , vale

$$\Phi \text{ unicamente ergodico} \implies \Phi \text{ minimale}$$

ma, in generale, il viceversa è falso.

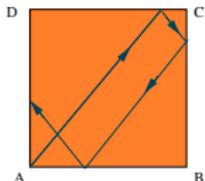
- Vedremo i risultati principali per la minimalità e l'(unica) ergodicità rispetto alla misura di Lebesgue per il flusso del biliardo nei due punti di vista sopra discussi.
- Osserviamo da subito che l'esistenza di integrali primi o di orbite periodiche è un'ostruzione alla minimalità e all'unica ergodicità.

Il biliardo rettangolare

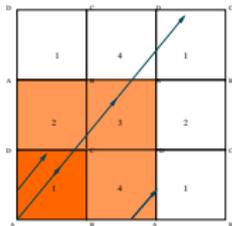


L'idea è di rimuovere gli urti contro i lati. Tramite successive riflessioni del quadrato rispetto ai lati, le orbite diventano rette del piano.

Il biliardo rettangolare

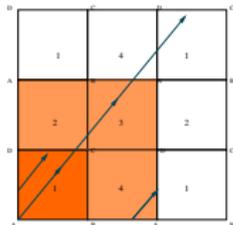
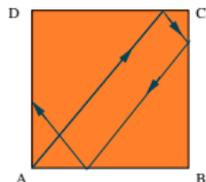


L'idea è di rimuovere gli urti contro i lati. Tramite successive riflessioni del quadrato rispetto ai lati, le orbite diventano rette del piano.



Poiché nella traiettoria sul quadrato il punto assume solo 4 direzioni, tale flusso può essere visto sul **toro**.

Il biliardo rettangolare

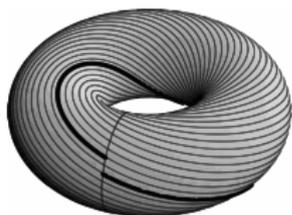
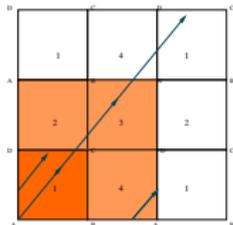
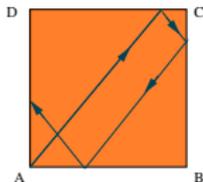


L'idea è di rimuovere gli urti contro i lati. Tramite successive riflessioni del quadrato rispetto ai lati, le orbite diventano rette del piano.

Poiché nella traiettoria sul quadrato il punto assume solo 4 direzioni, tale flusso può essere visto sul **toro**.

Le questioni sul flusso del biliardo si spostano su questo nuovo flusso.

Il biliardo rettangolare



L'idea è di rimuovere gli urti contro i lati. Tramite successive riflessioni del quadrato rispetto ai lati, le orbite diventano rette del piano.

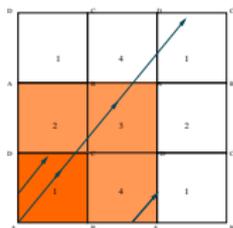
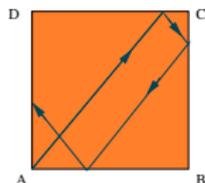
Poiché nella traiettoria sul quadrato il punto assume solo 4 direzioni, tale flusso può essere visto sul **toro**.

Le questioni sul flusso del biliardo si spostano su questo nuovo flusso.

Si può vedere facilmente che:

- se $\tan \theta$ è razionale, le traiettorie sono **periodiche**;

Il biliardo rettangolare



L'idea è di rimuovere gli urti contro i lati. Tramite successive riflessioni del quadrato rispetto ai lati, le orbite diventano rette del piano.

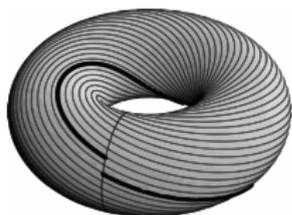
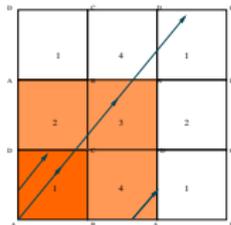
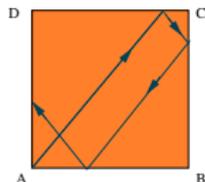
Poiché nella traiettoria sul quadrato il punto assume solo 4 direzioni, tale flusso può essere visto sul **toro**.

Le questioni sul flusso del biliardo si spostano su questo nuovo flusso.

Si può vedere facilmente che:

- se $\tan \theta$ è razionale, le traiettorie sono **periodiche**;
- altrimenti, il flusso in direzione θ è **minimale ed ergodico**.

Il biliardo rettangolare



L'idea è di rimuovere gli urti contro i lati. Tramite successive riflessioni del quadrato rispetto ai lati, le orbite diventano rette del piano.

Poiché nella traiettoria sul quadrato il punto assume solo 4 direzioni, tale flusso può essere visto sul **toro**.

Le questioni sul flusso del biliardo si spostano su questo nuovo flusso.

Si può vedere facilmente che:

- se $\tan \theta$ è razionale, le traiettorie sono **periodiche**;
- altrimenti, il flusso in direzione θ è **minimale ed ergodico**.

Per biliardi più complessi, non si ha una classificazione così netta.

Unfolding di un biliardo razionale

Il procedimento utilizzato per il biliardo quadrato, detto **unfolding**, si generalizza per una larga classe di poligoni.

Unfolding di un biliardo razionale

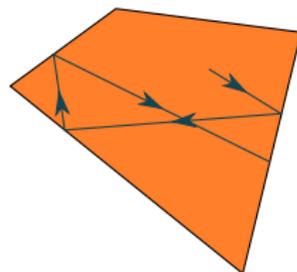
Il procedimento utilizzato per il biliardo quadrato, detto **unfolding**, si generalizza per una larga classe di poligoni.

- Sia $\Gamma(P) < O(2, \mathbb{R})$ il sottogruppo generato dalle simmetrie rispetto ai lati di P .

Unfolding di un biliardo razionale

Il procedimento utilizzato per il biliardo quadrato, detto **unfolding**, si generalizza per una larga classe di poligoni.

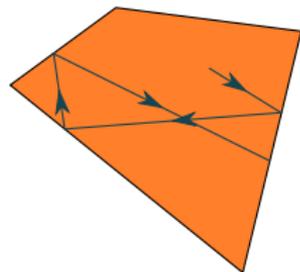
- Sia $\Gamma(P) < O(2, \mathbb{R})$ il sottogruppo generato dalle simmetrie rispetto ai lati di P .
- $\Gamma(P) \cdot \theta$ è l'insieme delle direzioni che prende il punto durante il moto.



Unfolding di un biliardo razionale

Il procedimento utilizzato per il biliardo quadrato, detto **unfolding**, si generalizza per una larga classe di poligoni.

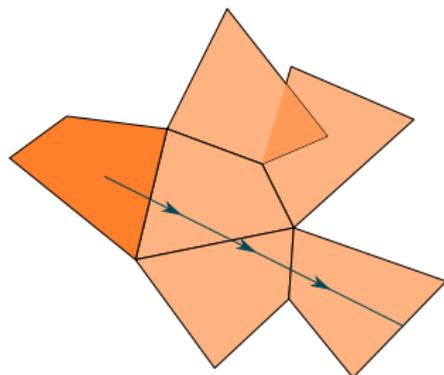
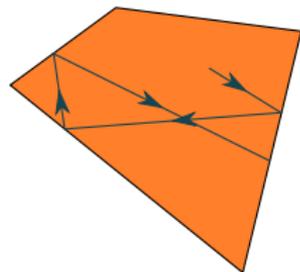
- Sia $\Gamma(P) < O(2, \mathbb{R})$ il sottogruppo generato dalle simmetrie rispetto ai lati di P .
- $\Gamma(P) \cdot \theta$ è l'insieme delle direzioni che prende il punto durante il moto.
- Se è finito, P si dice **razionale**. Quando P è semplicemente connesso, ciò equivale a dire che i suoi angoli interni sono ampi $\pi \frac{m_i}{n_i}$.



Unfolding di un biliardo razionale

Il procedimento utilizzato per il biliardo quadrato, detto **unfolding**, si generalizza per una larga classe di poligoni.

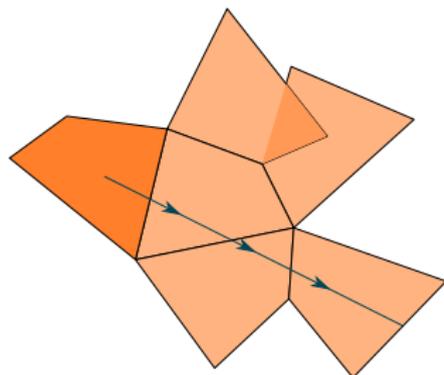
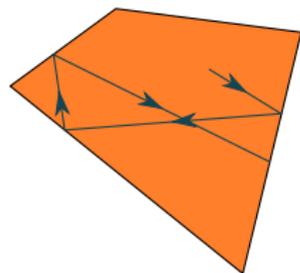
- Sia $\Gamma(P) < O(2, \mathbb{R})$ il sottogruppo generato dalle simmetrie rispetto ai lati di P .
- $\Gamma(P) \cdot \theta$ è l'insieme delle direzioni che prende il punto durante il moto.
- Se è finito, P si dice **razionale**. Quando P è semplicemente connesso, ciò equivale a dire che i suoi angoli interni sono ampi $\pi \frac{m_i}{n_i}$.
- Definiamo
$$M \doteq P \times \Gamma(P) / \text{incollamento dei lati}$$



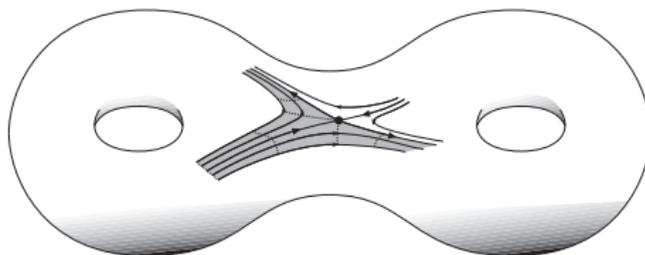
Unfolding di un biliardo razionale

Il procedimento utilizzato per il biliardo quadrato, detto **unfolding**, si generalizza per una larga classe di poligoni.

- Sia $\Gamma(P) < O(2, \mathbb{R})$ il sottogruppo generato dalle simmetrie rispetto ai lati di P .
- $\Gamma(P) \cdot \theta$ è l'insieme delle direzioni che prende il punto durante il moto.
- Se è finito, P si dice **razionale**. Quando P è semplicemente connesso, ciò equivale a dire che i suoi angoli interni sono ampi $\pi \frac{m_i}{n_i}$.
- Definiamo $M \doteq P \times \Gamma(P) / \text{incollamento dei lati}$
- Un'orbita del biliardo, portata su M , non cambia la sua direzione.

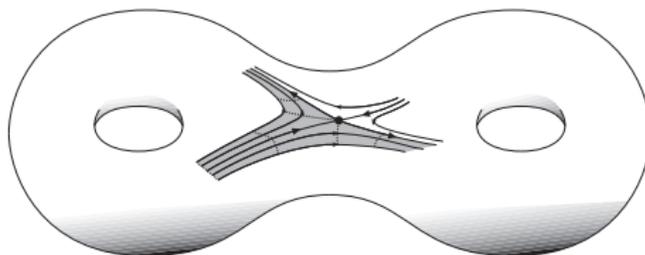


Proprietà dell'unfolding



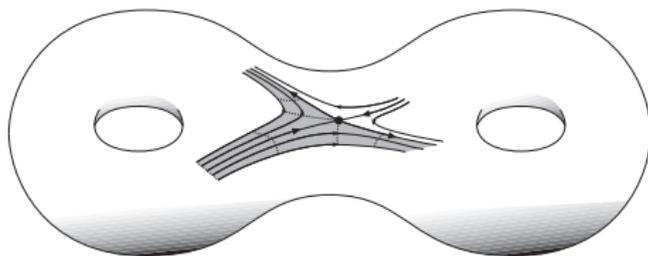
- Grazie all'ipotesi $\#\Gamma(P) < \infty$, M risulta essere una superficie compatta chiusa.

Proprietà dell'unfolding



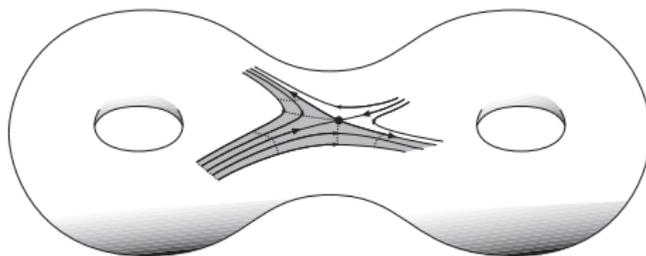
- Grazie all'ipotesi $\#\Gamma(P) < \infty$, M risulta essere una superficie compatta chiusa.
- M ha una struttura piatta fuori dai vertici, dove ha delle singolarità coniche ampie $2\pi m_i$.

Proprietà dell'unfolding



- Grazie all'ipotesi $\#\Gamma(P) < \infty$, M risulta essere una superficie compatta chiusa.
- M ha una struttura piatta fuori dai vertici, dove ha delle singolarità coniche ampie $2\pi m_i$.
- Il genere di M è $1 + \frac{N}{2} \left(k - 2 - \sum \frac{1}{n_i} \right)$, cioè in generale è > 1 .

Proprietà dell'unfolding



- Grazie all'ipotesi $\#\Gamma(P) < \infty$, M risulta essere una superficie compatta chiusa.
- M ha una struttura piatta fuori dai vertici, dove ha delle singolarità coniche ampie $2\pi m_i$.
- Il genere di M è $1 + \frac{N}{2} \left(k - 2 - \sum \frac{1}{n_i} \right)$, cioè in generale è > 1 .
- Nelle copie dei vertici viene “concentrata” la curvatura di M .

Strutture di traslazione

Il modo più significativo per formalizzare la struttura che M possiede è:

Strutture di traslazione

Il modo più significativo per formalizzare la struttura che M possiede è:

Definizione

Una **struttura di traslazione** su M con singolarità $\Sigma = \{(s_j, k_j)\}$ è un atlante ζ di carte $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ per $M \setminus \Sigma$ tale che i cambi carta siano traslazioni.

Strutture di traslazione

Il modo più significativo per formalizzare la struttura che M possiede è:

Definizione

Una **struttura di traslazione** su M con singolarità $\Sigma = \{(s_j, k_j)\}$ è un atlante ζ di carte $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ per $M \setminus \Sigma$ tale che i cambi carta siano traslazioni. A questo si aggiungono, per ogni singolarità, una mappa $\psi_j : V_j \rightarrow \mathbb{C}$ che sia un rivestimento di ordine k_j ramificato in 0 e tale che ψ_j , ristretta ad un aperto ove è iniettiva, è una carta di ζ .

Strutture di traslazione

Il modo più significativo per formalizzare la struttura che M possiede è:

Definizione

Una **struttura di traslazione** su M con singolarità $\Sigma = \{(s_j, k_j)\}$ è un atlante ζ di carte $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ per $M \setminus \Sigma$ tale che i cambi carta siano traslazioni. A questo si aggiungono, per ogni singolarità, una mappa $\psi_j : V_j \rightarrow \mathbb{C}$ che sia un rivestimento di ordine k_j ramificato in 0 e tale che ψ_j , ristretta ad un aperto ove è iniettiva, è una carta di ζ .

- Una struttura di traslazione definisce anche una struttura complessa su M .

Strutture di traslazione

Il modo più significativo per formalizzare la struttura che M possiede è:

Definizione

Una **struttura di traslazione** su M con singolarità $\Sigma = \{(s_j, k_j)\}$ è un atlante ζ di carte $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ per $M \setminus \Sigma$ tale che i cambi carta siano traslazioni. A questo si aggiungono, per ogni singolarità, una mappa $\psi_j : V_j \rightarrow \mathbb{C}$ che sia un rivestimento di ordine k_j ramificato in 0 e tale che ψ_j , ristretta ad un aperto ove è iniettiva, è una carta di ζ .

- Una struttura di traslazione definisce anche una struttura complessa su M .
- $SL(2, \mathbb{R})$ agisce sull'insieme delle strutture di traslazione per composizione a sinistra.

Strutture di traslazione

Il modo più significativo per formalizzare la struttura che M possiede è:

Definizione

Una **struttura di traslazione** su M con singolarità $\Sigma = \{(s_j, k_j)\}$ è un atlante ζ di carte $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ per $M \setminus \Sigma$ tale che i cambi carta siano traslazioni. A questo si aggiungono, per ogni singolarità, una mappa $\psi_j : V_j \rightarrow \mathbb{C}$ che sia un rivestimento di ordine k_j ramificato in 0 e tale che ψ_j , ristretta ad un aperto ove è iniettiva, è una carta di ζ .

- Una struttura di traslazione definisce anche una struttura complessa su M .
- $SL(2, \mathbb{R})$ agisce sull'insieme delle strutture di traslazione per composizione a sinistra.

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

flusso circolare

Strutture di traslazione

Il modo più significativo per formalizzare la struttura che M possiede è:

Definizione

Una **struttura di traslazione** su M con singolarità $\Sigma = \{(s_j, k_j)\}$ è un atlante ζ di carte $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ per $M \setminus \Sigma$ tale che i cambi carta siano traslazioni. A questo si aggiungono, per ogni singolarità, una mappa $\psi_j : V_j \rightarrow \mathbb{C}$ che sia un rivestimento di ordine k_j ramificato in 0 e tale che ψ_j , ristretta ad un aperto ove è iniettiva, è una carta di ζ .

- Una struttura di traslazione definisce anche una struttura complessa su M .
- $SL(2, \mathbb{R})$ agisce sull'insieme delle strutture di traslazione per composizione a sinistra.

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

flusso circolare

$$g_t = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

flusso di Teichmüller

Strutture di traslazione

Il modo più significativo per formalizzare la struttura che M possiede è:

Definizione

Una **struttura di traslazione** su M con singolarità $\Sigma = \{(s_j, k_j)\}$ è un atlante ζ di carte $\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ per $M \setminus \Sigma$ tale che i cambi carta siano traslazioni. A questo si aggiungono, per ogni singolarità, una mappa $\psi_j : V_j \rightarrow \mathbb{C}$ che sia un rivestimento di ordine k_j ramificato in 0 e tale che ψ_j , ristretta ad un aperto ove è iniettiva, è una carta di ζ .

- Una struttura di traslazione definisce anche una struttura complessa su M .
- $SL(2, \mathbb{R})$ agisce sull'insieme delle strutture di traslazione per composizione a sinistra.

$$r_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

flusso circolare

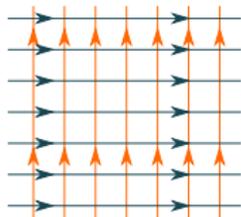
$$g_t = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

flusso di Teichmüller

$$h_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

flusso orociclico

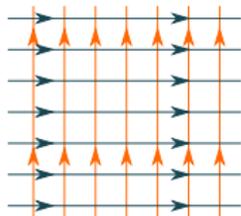
Foliazioni su una superficie di traslazione



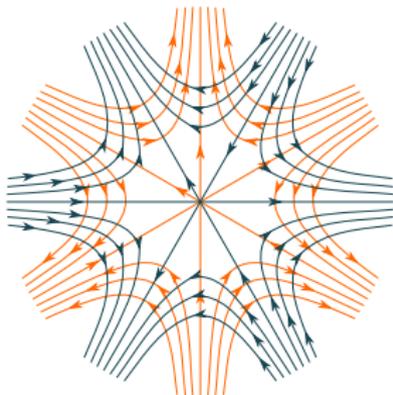
nell'intorno di un punto regolare

- Le ϕ_α definiscono una **foliazione** locale in ogni direzione θ , e tali foliazioni si incollano coerentemente cambiando carta.

Foliazioni su una superficie di traslazione



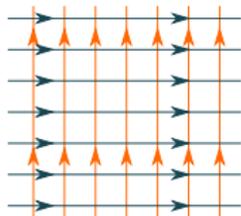
nell'intorno di un punto regolare



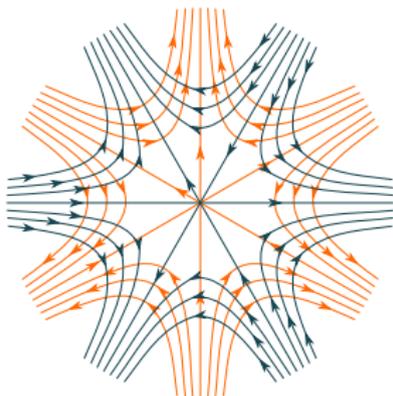
nell'intorno di un punto s_j con $k_j = 3$

- Le ϕ_α definiscono una **foliazione** locale in ogni direzione θ , e tali foliazioni si incollano coerentemente cambiando carta.
- Nell'intorno di una singolarità, la foliazione verticale è una sella con $2k_j$ separatrici, diffeomorfa alle curve di livello di $\text{Im } z^{k_j}$.

Foliazioni su una superficie di traslazione



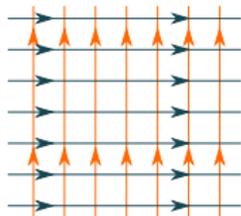
nell'intorno di un punto regolare



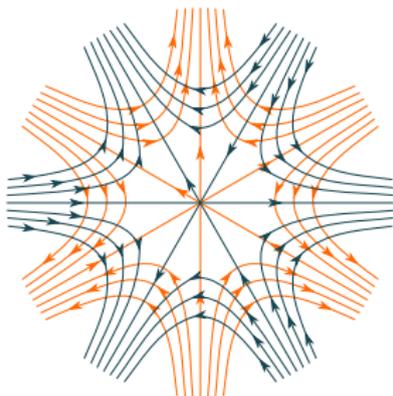
nell'intorno di un punto s_j con $k_j = 3$

- Le ϕ_α definiscono una **foliazione** locale in ogni direzione θ , e tali foliazioni si incollano coerentemente cambiando carta.
- Nell'intorno di una singolarità, la foliazione verticale è una sella con $2k_j$ separatrici, diffeomorfa alle curve di livello di $\text{Im } z^{k_j}$.
- Una foglia che nasce e muore in una singolarità è detta **connessione fra selle**.

Foliazioni su una superficie di traslazione



nell'intorno di un punto regolare



nell'intorno di un punto s_j con $k_j = 3$

- Le ϕ_α definiscono una **foliazione** locale in ogni direzione θ , e tali foliazioni si incollano coerentemente cambiando carta.
- Nell'intorno di una singolarità, la foliazione verticale è una sella con $2k_j$ separatrici, diffeomorfa alle curve di livello di $\text{Im } z^{k_j}$.
- Una foglia che nasce e muore in una singolarità è detta **connessione fra selle**.
- La foliazione verticale possiede una **misura trasversa** data da $\phi_\alpha^*(dx)$, per la quale si definisce ad hoc una nozione di unica ergodicità.

Differenziali quadratici

Definizione

Un **differenziale quadratico** q su M dotata di una struttura complessa è una collezione di applicazioni olomorfe sulle carte $q_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfano $q_\alpha dz_\alpha^2 = q_\beta dz_\beta^2$.

Differenziali quadratici

Definizione

Un **differenziale quadratico** q su M dotata di una struttura complessa è una collezione di applicazioni olomorfe sulle carte $q_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfano $q_\alpha dz_\alpha^2 = q_\beta dz_\beta^2$.

- Anche i differenziali quadratici definiscono una struttura piatta con singolarità, dotata di foliazioni misurate in ogni direzione. In generale però le singolarità coniche sono ampie un multiplo di π .

Differenziali quadratici

Definizione

Un **differenziale quadratico** q su M dotata di una struttura complessa è una collezione di applicazioni olomorfe sulle carte $q_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfano $q_\alpha dz_\alpha^2 = q_\beta dz_\beta^2$.

- Anche i differenziali quadratici definiscono una struttura piatta con singolarità, dotata di foliazioni misurate in ogni direzione. In generale però le singolarità coniche sono ampie un multiplo di π .
- Le strutture di traslazione si identificano con i differenziali quadratici **orientabili**.

Differenziali quadratici

Definizione

Un **differenziale quadratico** q su M dotata di una struttura complessa è una collezione di applicazioni olomorfe sulle carte $q_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfano $q_\alpha dz_\alpha^2 = q_\beta dz_\beta^2$.

- Anche i differenziali quadratici definiscono una struttura piatta con singolarità, dotata di foliazioni misurate in ogni direzione. In generale però le singolarità coniche sono ampie un multiplo di π .
- Le strutture di traslazione si identificano con i differenziali quadratici **orientabili**.

La tecnica che si usa per studiare le proprietà delle orbite in direzione θ di un biliardo razionale è:

- vederle come la foliazione verticale di $r_{2\pi-\theta}\zeta$;

Differenziali quadratici

Definizione

Un **differenziale quadratico** q su M dotata di una struttura complessa è una collezione di applicazioni olomorfe sulle carte $q_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfano $q_\alpha dz_\alpha^2 = q_\beta dz_\beta^2$.

- Anche i differenziali quadratici definiscono una struttura piatta con singolarità, dotata di foliazioni misurate in ogni direzione. In generale però le singolarità coniche sono ampie un multiplo di π .
- Le strutture di traslazione si identificano con i differenziali quadratici **orientabili**.

La tecnica che si usa per studiare le proprietà delle orbite in direzione θ di un biliardo razionale è:

- vederle come la foliazione verticale di $r_{2\pi-\theta}\zeta$;
- utilizzare il fatto che dalle proprietà di tale foliazione discendono quelle del biliardo.

Risultati di indecomponibilità topologica

Teorema

In ogni biliardo razionale, il flusso in direzione θ è minimale per tutti i $\theta \in S^1$ tranne una quantità numerabile.

Risultati di indecomponibilità topologica

Teorema

In ogni biliardo razionale, il flusso in direzione θ è minimale per tutti i $\theta \in S^1$ tranne una quantità numerabile.

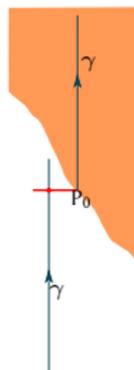
- Le direzioni da scartare sono quelle delle c.f.s. sull'unfolding M ; per le altre non esistono orbite periodiche.

Risultati di indecomponibilità topologica

Teorema

In ogni biliardo razionale, il flusso in direzione θ è minimale per tutti i $\theta \in S^1$ tranne una quantità numerabile.

- Le direzioni da scartare sono quelle delle c.f.s. sull'unfolding M ; per le altre non esistono orbite periodiche.
- Comunque presa una foglia ed un segmento trasversale, la foglia reinterseca il segmento.

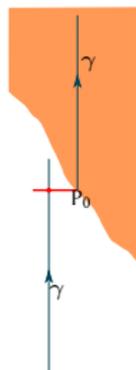


Risultati di indecomponibilità topologica

Teorema

In ogni biliardo razionale, il flusso in direzione θ è minimale per tutti i $\theta \in S^1$ tranne una quantità numerabile.

- Le direzioni da scartare sono quelle delle c.f.s. sull'unfolding M ; per le altre non esistono orbite periodiche.
- Comunque presa una foglia ed un segmento trasversale, la foglia reinterseca il segmento.
- Se per assurdo una foglia ha un ω -limite $A \subsetneq M$, sia $P_0 \in \partial A$.

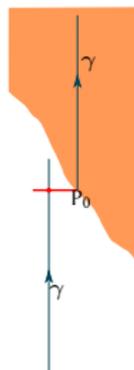


Risultati di indecomponibilità topologica

Teorema

In ogni biliardo razionale, il flusso in direzione θ è minimale per tutti i $\theta \in S^1$ tranne una quantità numerabile.

- Le direzioni da scartare sono quelle delle c.f.s. sull'unfolding M ; per le altre non esistono orbite periodiche.
- Comunque presa una foglia ed un segmento trasversale, la foglia reinterseca il segmento.
- Se per assurdo una foglia ha un ω -limite $A \subsetneq M$, sia $P_0 \in \partial A$.
- La foglia γ per P_0 è contenuta in A ; ma deve reintersecare un segmento trasversale per P_0 .

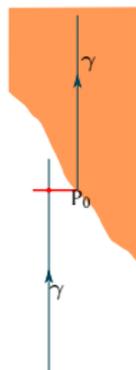


Risultati di indecomponibilità topologica

Teorema

In ogni biliardo razionale, il flusso in direzione θ è minimale per tutti i $\theta \in S^1$ tranne una quantità numerabile.

- Le direzioni da scartare sono quelle delle c.f.s. sull'unfolding M ; per le altre non esistono orbite periodiche.
- Comunque presa una foglia ed un segmento trasversale, la foglia reinterseca il segmento.
- Se per assurdo una foglia ha un ω -limite $A \subsetneq M$, sia $P_0 \in \partial A$.
- La foglia γ per P_0 è contenuta in A ; ma deve reintersecare un segmento trasversale per P_0 .



Teorema (Katok, Zemlyakov - 1975)

Sia $X = \{\text{n-agoni sempl. conn.}\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Allora esiste $G_\delta \subseteq X$ denso costituito da poligoni tali che il flusso sul fibrato unitario è topologicamente transitivo.

Risultati di ergodicità

Teorema (Kerckhoff, Masur, Smillie - 1986)

Per ogni biliardo poligonale razionale, il flusso del biliardo in direzione θ è unicamente ergodico per quasi tutti i $\theta \in S^1$.

Risultati di ergodicità

Teorema (Kerckhoff, Masur, Smillie - 1986)

Per ogni biliardo poligonale razionale, il flusso del biliardo in direzione θ è unicamente ergodico per quasi tutti i $\theta \in S^1$.

Quello che si dimostra è:

Sia M una superficie, q un differenziale quadratico. Per quasi tutti i $\theta \in S^1$ la foliazione verticale di $r_\theta q$ è unicamente ergodica.

Risultati di ergodicità

Teorema (Kerckhoff, Masur, Smillie - 1986)

Per ogni biliardo poligonale razionale, il flusso del biliardo in direzione θ è unicamente ergodico per quasi tutti i $\theta \in S^1$.

Quello che si dimostra è:

Sia M una superficie, q un differenziale quadratico. Per quasi tutti i $\theta \in S^1$ la foliazione verticale di $r_\theta q$ è unicamente ergodica.

Inoltre si ha:

Teorema

Sia $X = \{n\text{-agoni convessi}\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Allora esiste un $G_\delta \subset X$ denso di biliardi tali che il flusso sul fibrato tangente unitario è ergodico.

Risultati di ergodicità

Teorema (Kerckhoff, Masur, Smillie - 1986)

Per ogni biliardo poligonale razionale, il flusso del biliardo in direzione θ è unicamente ergodico per quasi tutti i $\theta \in S^1$.

Quello che si dimostra è:

Sia M una superficie, q un differenziale quadratico. Per quasi tutti i $\theta \in S^1$ la foliazione verticale di $r_\theta q$ è unicamente ergodica.

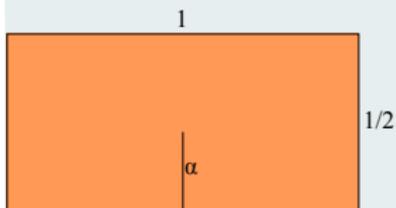
Inoltre si ha:

Teorema

Sia $X = \{n\text{-agoni convessi}\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Allora esiste un $G_\delta \subset X$ denso di biliardi tali che il flusso sul fibrato tangente unitario è ergodico.

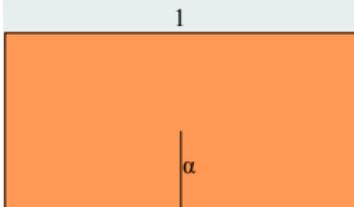
Nessun biliardo razionale $\in G_\delta$: infatti tali biliardi hanno un **integrale primo**, che è $\theta \in S^1/\Gamma(P)$.

L'esempio non ergodico di Veech



Se α è irrazionale, il biliardo a sinistra è **minimale e non ergodico** per una quantità più che numerabile di $\theta \in S^1$.

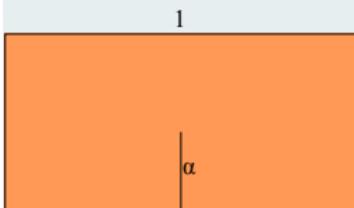
L'esempio non ergodico di Veech



Se α è irrazionale, il biliardo a sinistra è **minimale e non ergodico** per una quantità più che numerabile di $\theta \in S^1$.

- L'unfolding M di tale biliardo è un incollamento di due tori lungo un taglio verticale T lungo $1 - 2\alpha$.

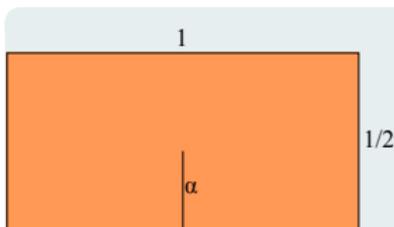
L'esempio non ergodico di Veech



Se α è irrazionale, il biliardo a sinistra è **minimale e non ergodico** per una quantità più che numerabile di $\theta \in S^1$.

- L'unfolding M di tale biliardo è un incollamento di due tori lungo un taglio verticale T lungo $1 - 2\alpha$.
- Un teorema afferma che, date delle partizioni $[A_n, B_n]$ di M con frontiera costituita da c.f.s., se queste “convergono”, la foliazione nella direzione limite non è ergodica.

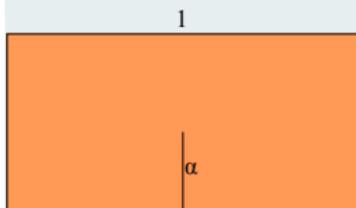
L'esempio non ergodico di Veech



Se α è irrazionale, il biliardo a sinistra è **minimale e non ergodico** per una quantità più che numerabile di $\theta \in S^1$.

- L'unfolding M di tale biliardo è un incollamento di due tori lungo un taglio verticale T lungo $1 - 2\alpha$.
- Un teorema afferma che, date delle partizioni $[A_n, B_n]$ di M con frontiera costituita da c.f.s., se queste “convergono”, la foliazione nella direzione limite non è ergodica.
- Ricorsivamente, a partire da una c.f.s. con gli stessi estremi di T , si selezionano due “figlie” vicine ad essa.

L'esempio non ergodico di Veech



Se α è irrazionale, il biliardo a sinistra è **minimale e non ergodico** per una quantità più che numerabile di $\theta \in S^1$.

- L'unfolding M di tale biliardo è un incollamento di due tori lungo un taglio verticale T lungo $1 - 2\alpha$.
- Un teorema afferma che, date delle partizioni $[A_n, B_n]$ di M con frontiera costituita da c.f.s., se queste “convergono”, la foliazione nella direzione limite non è ergodica.
- Ricorsivamente, a partire da una c.f.s. con gli stessi estremi di T , si selezionano due “figlie” vicine ad essa.
- Si ha così una famiglia più che numerabile di successioni come sopra.

Un'orbita periodica immediata

Proposizione (Stepin)

In ogni biliardo razionale c'è un'orbita periodica.

Un'orbita periodica immediata

Proposizione (Stepin)

In ogni biliardo razionale c'è un'orbita periodica.

- Si fa partire l'orbita da un lato del biliardo, perpendicolare ad esso.

Un'orbita periodica immediata

Proposizione (Stepin)

In ogni biliardo razionale c'è un'orbita periodica.

- Si fa partire l'orbita da un lato del biliardo, perpendicolare ad esso.
- Per il **teorema di ricorrenza di Poincaré**, esiste una condizione iniziale vicina a questa che dovrà tornare sullo stesso lato in una direzione vicina alla perpendicolare.

Un'orbita periodica immediata

Proposizione (Stepin)

In ogni biliardo razionale c'è un'orbita periodica.

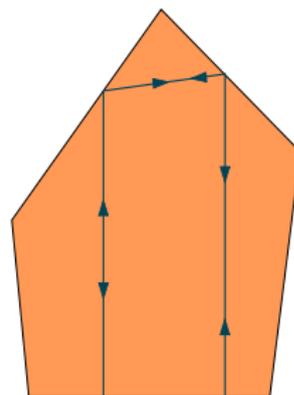
- Si fa partire l'orbita da un lato del biliardo, perpendicolare ad esso.
- Per il **teorema di ricorrenza di Poincaré**, esiste una condizione iniziale vicina a questa che dovrà tornare sullo stesso lato in una direzione vicina alla perpendicolare.
- Dato che le direzioni assunte dal punto sono in numero finito, tale direzione sarà esattamente perpendicolare.

Un'orbita periodica immediata

Proposizione (Stepin)

In ogni biliardo razionale c'è un'orbita periodica.

- Si fa partire l'orbita da un lato del biliardo, perpendicolare ad esso.
- Per il **teorema di ricorrenza di Poincaré**, esiste una condizione iniziale vicina a questa che dovrà tornare sullo stesso lato in una direzione vicina alla perpendicolare.
- Dato che le direzioni assunte dal punto sono in numero finito, tale direzione sarà esattamente perpendicolare.
- Dopodiché l'orbita ripercorre esattamente lo stesso percorso.



Esistenza di orbite periodiche

Teorema (Masur - 1986)

Per ogni biliardo razionale, l'insieme delle direzioni θ tali che c'è un'orbita periodica in direzione θ è denso in S^1 .

Esistenza di orbite periodiche

Teorema (Masur - 1986)

Per ogni biliardo razionale, l'insieme delle direzioni θ tali che c'è un'orbita periodica in direzione θ è denso in S^1 .

Quello che si dimostra è

Per ogni differenziale quadratico q c'è un insieme denso di direzioni $\theta \in S^1$ tali che $r_\theta q$ ha un **cilindro metrico**.

Quindi le orbite periodiche sono raggruppate in “fasce”.

Esistenza di orbite periodiche

Teorema (Masur - 1986)

Per ogni biliardo razionale, l'insieme delle direzioni θ tali che c'è un'orbita periodica in direzione θ è denso in S^1 .

Quello che si dimostra è

Per ogni differenziale quadratico q c'è un insieme denso di direzioni $\theta \in S^1$ tali che $r_\theta q$ ha un **cilindro metrico**.

Quindi le orbite periodiche sono raggruppate in “fasce”.

- L'esistenza di orbite periodiche è una questione aperta per biliardi non razionali generici, persino per i triangoli ottusangoli.

Esistenza di orbite periodiche

Teorema (Masur - 1986)

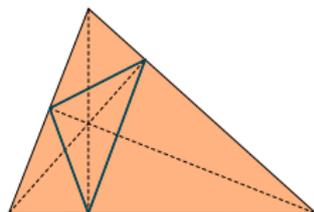
Per ogni biliardo razionale, l'insieme delle direzioni θ tali che c'è un'orbita periodica in direzione θ è denso in S^1 .

Quello che si dimostra è

Per ogni differenziale quadratico q c'è un insieme denso di direzioni $\theta \in S^1$ tali che $r_\theta q$ ha un **cilindro metrico**.

Quindi le orbite periodiche sono raggruppate in “fasce”.

- L'esistenza di orbite periodiche è una questione aperta per biliardi non razionali generici, persino per i triangoli ottusangoli.
- Nei triangoli acutangoli c'è invece l'**orbita di Fagnano**.



Spazi di Teichmüller e differenziali quadratici

Definizione

Lo **spazio di Teichmüller** di una superficie (differenziabile) M è l'insieme delle strutture complesse su M , considerate a meno di isotopie.

Spazi di Teichmüller e differenziali quadratici

Definizione

Lo **spazio di Teichmüller** di una superficie (differenziabile) M è l'insieme delle strutture complesse su M , considerate a meno di isotopie.

- $\text{Teich}(M)$ è esso stesso una varietà complessa, omeomorfa a \mathbb{R}^{6g-6} .

Spazi di Teichmüller e differenziali quadratici

Definizione

Lo **spazio di Teichmüller** di una superficie (differenziabile) M è l'insieme delle strutture complesse su M , considerate a meno di isotopie.

- $\text{Teich}(M)$ è esso stesso una varietà complessa, omeomorfa a \mathbb{R}^{6g-6} .
- Il **teorema di Teichmüller** lo dota di una metrica.

Spazi di Teichmüller e differenziali quadratici

Definizione

Lo **spazio di Teichmüller** di una superficie (differenziabile) M è l'insieme delle strutture complesse su M , considerate a meno di isotopie.

- $\text{Teich}(M)$ è esso stesso una varietà complessa, omeomorfa a \mathbb{R}^{6g-6} .
- Il **teorema di Teichmüller** lo dota di una metrica.
- L'insieme $Q(M)$ dei differenziali quadratici di area 1 a meno di isotopia costituisce il fibrato cotangente unitario a $\text{Teich}(M)$

Spazi di Teichmüller e differenziali quadratici

Definizione

Lo **spazio di Teichmüller** di una superficie (differenziabile) M è l'insieme delle strutture complesse su M , considerate a meno di isotopie.

- $\text{Teich}(M)$ è esso stesso una varietà complessa, omeomorfa a \mathbb{R}^{6g-6} .
- Il **teorema di Teichmüller** lo dota di una metrica.
- L'insieme $Q(M)$ dei differenziali quadratici di area 1 a meno di isotopia costituisce il fibrato cotangente unitario a $\text{Teich}(M)$
- In questo modo, il flusso g_t costituisce il flusso geodetico su $\text{Teich}(M)$.

Spazi di Teichmüller e differenziali quadratici

Definizione

Lo **spazio di Teichmüller** di una superficie (differenziabile) M è l'insieme delle strutture complesse su M , considerate a meno di isotopie.

- $\text{Teich}(M)$ è esso stesso una varietà complessa, omeomorfa a \mathbb{R}^{6g-6} .
- Il **teorema di Teichmüller** lo dota di una metrica.
- L'insieme $Q(M)$ dei differenziali quadratici di area 1 a meno di isotopia costituisce il fibrato cotangente unitario a $\text{Teich}(M)$
- In questo modo, il flusso g_t costituisce il flusso geodetico su $\text{Teich}(M)$.
- Lo spazio di Teichmüller ammette una compattificazione, che si ottiene aggiungendogli delle degenerazioni di M .

Forme ricorrenti e divergenti

Definizione

Lo spazio modulare di una superficie M è

$$\mathcal{R}(M) \doteq \text{Teich}(M) / \text{MCG}(M),$$

ovvero l'insieme delle strutture complesse a meno di diffeomorfismi.

- Parallelamente si definisce $\text{QD}(M) \doteq \text{Q}(M) / \text{MCG}(M)$

Forme ricorrenti e divergenti

Definizione

Lo spazio modulare di una superficie M è

$$\mathcal{R}(M) \doteq \text{Teich}(M) / \text{MCG}(M),$$

ovvero l'insieme delle strutture complesse a meno di diffeomorfismi.

- Parallelamente si definisce $\text{QD}(M) \doteq \text{Q}(M) / \text{MCG}(M)$
- Le geodetiche in $\text{Q}(M)$ escono da tutti i compatti per $t \rightarrow \pm\infty$

Forme ricorrenti e divergenti

Definizione

Lo spazio modulare di una superficie M è

$$\mathcal{R}(M) \doteq \text{Teich}(M) / \text{MCG}(M),$$

ovvero l'insieme delle strutture complesse a meno di diffeomorfismi.

- Parallelamente si definisce $\text{QD}(M) \doteq \text{Q}(M) / \text{MCG}(M)$
- Le geodetiche in $\text{Q}(M)$ escono da tutti i compatti per $t \rightarrow \pm\infty$
- Invece, per una $q \in \text{QD}(M)$, ha senso distinguere tra:
 - **forma ricorrente** se $\{g_t q \mid t \geq 0\}$ è contenuto in un compatto di $\text{QD}(M)$;
 - **forma divergente** altrimenti.

Forme ricorrenti e divergenti

Definizione

Lo spazio modulare di una superficie M è

$$\mathcal{R}(M) \doteq \text{Teich}(M) / \text{MCG}(M),$$

ovvero l'insieme delle strutture complesse a meno di diffeomorfismi.

- Parallelamente si definisce $\text{QD}(M) \doteq \text{Q}(M) / \text{MCG}(M)$
- Le geodetiche in $\text{Q}(M)$ escono da tutti i compatti per $t \rightarrow \pm\infty$
- Invece, per una $q \in \text{QD}(M)$, ha senso distinguere tra:
 - **forma ricorrente** se $\{g_t q | t \geq 0\}$ è contenuto in un compatto di $\text{QD}(M)$;
 - **forma divergente** altrimenti.
- Un'eshaustione in compatti per $\text{QD}(M)$ è data dai

$$\text{QD}_\epsilon(M) \doteq \{q | \text{le c.f.s. di } q \text{ hanno lunghezza} \geq \epsilon\} / \text{MCG}(M)$$

La dimostrazione di KMS

Teorema

Sia M una superficie, q un differenziale quadratico. Per quasi tutti i $\theta \in S^1$ la foliazione verticale di $r_\theta q$ è unicamente ergodica.

La dimostrazione di KMS

Teorema

Sia M una superficie, q un differenziale quadratico. Per quasi tutti i $\theta \in S^1$ la foliazione verticale di $r_\theta q$ è unicamente ergodica.

Passo 1. q_θ è ricorrente per q.o. $\theta \in S^1$.

La dimostrazione di KMS

Teorema

Sia M una superficie, q un differenziale quadratico. Per quasi tutti i $\theta \in S^1$ la foliazione verticale di $r_\theta q$ è unicamente ergodica.

Passo 1. q_θ è ricorrente per q.o. $\theta \in S^1$.

- Se la tesi è falsa, si trovano successioni $t_i \rightarrow +\infty$, $\epsilon_i \rightarrow 0$ tali che gli insiemi

$$S_i = \{\theta \mid g_{t_i} q_\theta \text{ ha una c.f.s. lunga } \leq \epsilon_i\}$$

hanno misura $> \delta$.

La dimostrazione di KMS

Teorema

Sia M una superficie, q un differenziale quadratico. Per quasi tutti i $\theta \in S^1$ la foliazione verticale di $r_\theta q$ è unicamente ergodica.

Passo 1. q_θ è ricorrente per q.o. $\theta \in S^1$.

- Se la tesi è falsa, si trovano successioni $t_i \rightarrow +\infty$, $\epsilon_i \rightarrow 0$ tali che gli insiemi

$$S_i = \{\theta \mid g_{t_i} q_\theta \text{ ha una c.f.s. lunga } \leq \epsilon_i\}$$

hanno misura $> \delta$.

- L'idea fondamentale è far vedere che anche gli insiemi

$$S'_i = \{\theta \in S_i \mid g_{t_i} q_\theta \text{ ha una c.f.s. } \leq \epsilon_i \text{ non tagliata da c.f.s. } \leq C\}$$

hanno misura $> \delta/2$.

La dimostrazione di KMS

Teorema

Sia M una superficie, q un differenziale quadratico. Per quasi tutti i $\theta \in S^1$ la foliazione verticale di $r_\theta q$ è unicamente ergodica.

Passo 1. q_θ è ricorrente per q.o. $\theta \in S^1$.

- Se la tesi è falsa, si trovano successioni $t_i \rightarrow +\infty$, $\epsilon_i \rightarrow 0$ tali che gli insiemi

$$S_i = \{\theta \mid g_{t_i} q_\theta \text{ ha una c.f.s. lunga } \leq \epsilon_i\}$$

hanno misura $> \delta$.

- L'idea fondamentale è far vedere che anche gli insiemi

$$S'_i = \{\theta \in S_i \mid g_{t_i} q_\theta \text{ ha una c.f.s. } \leq \epsilon_i \text{ non tagliata da c.f.s. } \leq C\}$$

hanno misura $> \delta/2$.

- D'altra parte è possibile trovare k tale che $\mu(S'_i) \leq k\epsilon_i$: assurdo.

La dimostrazione di KMS

Passo 2. L'insieme $\{\theta | q_\theta \text{ è ricorrente e non unicamente ergodico}\}$ ha misura nulla.

La dimostrazione di KMS

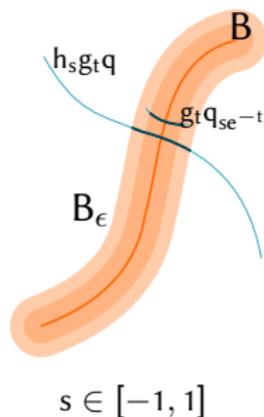
Passo 2. L'insieme $\{\theta | q_\theta \text{ è ricorrente e non unicamente ergodico}\}$ ha misura nulla.

- I punti di accumulazione delle forme non unicamente ergodiche sono contenuti in $B = \{q' \in \text{QD} | q' \text{ ha una c.f.s. verticale}\}$, che è chiuso e di misura nulla

La dimostrazione di KMS

Passo 2. L'insieme $\{\theta|q_\theta \text{ è ricorrente e non unicamente ergodico}\}$ ha misura nulla.

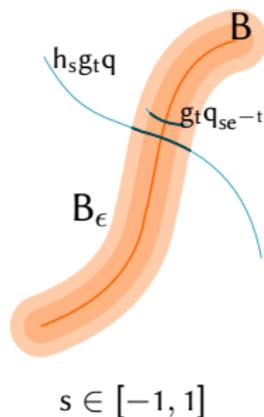
- I punti di accumulazione delle forme non unicamente ergodiche sono contenuti in $B = \{q' \in \text{QD} | q' \text{ ha una c.f.s. verticale}\}$, che è chiuso e di misura nulla
- Se $K \subset \text{QD}$ è compatto, per ϵ piccolo gran parte di $\{h_s q | s \in [-1, 1]\}$ si trova fuori da B_ϵ , per ogni $q \in K$.



La dimostrazione di KMS

Passo 2. L'insieme $\{\theta | q_\theta \text{ è ricorrente e non unicamente ergodico}\}$ ha misura nulla.

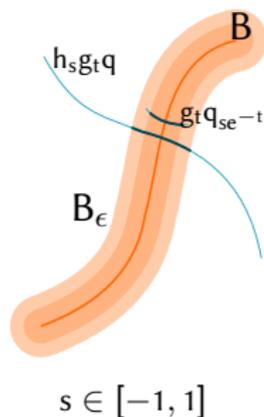
- I punti di accumulazione delle forme non unicamente ergodiche sono contenuti in $B = \{q' \in \text{QD} | q' \text{ ha una c.f.s. verticale}\}$, che è chiuso e di misura nulla
- Se $K \subset \text{QD}$ è compatto, per ϵ piccolo gran parte di $\{h_s q | s \in [-1, 1]\}$ si trova fuori da B_ϵ , per ogni $q \in K$.
- Mentre se la tesi è falsa, si può supporre che per la maggior parte dei θ intorno a 0, $g_t q_\theta$ cade dentro $B_{\epsilon/2}$ per t arbitrariamente alti.



La dimostrazione di KMS

Passo 2. L'insieme $\{\theta | q_\theta \text{ è ricorrente e non unicamente ergodico}\}$ ha misura nulla.

- I punti di accumulazione delle forme non unicamente ergodiche sono contenuti in $B = \{q' \in \text{QD} | q' \text{ ha una c.f.s. verticale}\}$, che è chiuso e di misura nulla
- Se $K \subset \text{QD}$ è compatto, per ϵ piccolo gran parte di $\{h_s q | s \in [-1, 1]\}$ si trova fuori da B_ϵ , per ogni $q \in K$.
- Mentre se la tesi è falsa, si può supporre che per la maggior parte dei θ intorno a 0, $g_t q_\theta$ cade dentro $B_{\epsilon/2}$ per t arbitrariamente alti.
- Ma per t grande, $g_t q_{se-t}$ è vicino a $h_s g_t q$, assurdo.



Ergodicità in un denso di biliardi irrazionali

Teorema

Sia $X = \{\text{n-agoni convessi}\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Allora esiste un insieme $G_\delta \subset X$ denso tale che, per ogni $P \in G_\delta$, il flusso del biliardo sul fibrato tangente unitario è ergodico.

Ergodicità in un denso di biliardi irrazionali

Teorema

Sia $X = \{\text{n-agoni convessi}\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Allora esiste un insieme $G_\delta \subset X$ denso tale che, per ogni $P \in G_\delta$, il flusso del biliardo sul fibrato tangente unitario è ergodico.

- L'unfolding M di un biliardo razionale P può essere visto come una sottovarietà di $U(P)$.

Ergodicità in un denso di biliardi irrazionali

Teorema

Sia $X = \{\text{n-agoni convessi}\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Allora esiste un insieme $G_\delta \subset X$ denso tale che, per ogni $P \in G_\delta$, il flusso del biliardo sul fibrato tangente unitario è ergodico.

- L'unfolding M di un biliardo razionale P può essere visto come una sottovarietà di $U(P)$.
- Per $\#\Gamma(P)$ alto, $\int_{U(P)} f$ è vicino a $\int_M f$.

Ergodicità in un denso di biliardi irrazionali

Teorema

Sia $X = \{\text{n-agoni convessi}\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Allora esiste un insieme $G_\delta \subset X$ denso tale che, per ogni $P \in G_\delta$, il flusso del biliardo sul fibrato tangente unitario è ergodico.

- L'unfolding M di un biliardo razionale P può essere visto come una sottovarietà di $U(P)$.
- Per $\#\Gamma(P)$ alto, $\int_{U(P)} f$ è vicino a $\int_M f$.
- I biliardi razionali con $\#\Gamma(P)$ alto sono densi in X .

Ergodicità in un denso di biliardi irrazionali

Teorema

Sia $X = \{\text{n-agoni convessi}\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Allora esiste un insieme $G_\delta \subset X$ denso tale che, per ogni $P \in G_\delta$, il flusso del biliardo sul fibrato tangente unitario è ergodico.

- L'unfolding M di un biliardo razionale P può essere visto come una sottovarietà di $U(P)$.
- Per $\#\Gamma(P)$ alto, $\int_{U(P)} f$ è vicino a $\int_M f$.
- I biliardi razionali con $\#\Gamma(P)$ alto sono densi in X .
- Se $f \in \mathcal{C}^0(\bigcup U(P))$, gli insiemi $E(n) = \left\{ P \in X \mid \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(\Phi_t(z)) - \int_{U(P)} f \right| < \frac{1}{n} \text{ per q.o. } z \in U(P), T \text{ suff. grande} \right\}$ sono aperti densi.

Ergodicità in un denso di biliardi irrazionali

Teorema

Sia $X = \{\text{n-agoni convessi}\} \subseteq \mathbb{R}^{2n}$. Allora esiste un insieme $G_\delta \subset X$ denso tale che, per ogni $P \in G_\delta$, il flusso del biliardo sul fibrato tangente unitario è ergodico.

- L'unfolding M di un biliardo razionale P può essere visto come una sottovarietà di $U(P)$.
- Per $\#\Gamma(P)$ alto, $\int_{U(P)} f$ è vicino a $\int_M f$.
- I biliardi razionali con $\#\Gamma(P)$ alto sono densi in X .
- Se $f \in \mathcal{C}^0(\bigcup U(P))$, gli insiemi $E(n) = \left\{ P \in X \mid \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(\Phi_t(z)) - \int_{U(P)} f \right| < \frac{1}{n} \text{ per q.o. } z \in U(P), T \text{ suff. grande} \right\}$ sono aperti densi.
- Si conclude con Baire.

Grazie per l'attenzione.

Riferimenti bibliografici



Pierre Arnoux

Ergodicité générique des billards polygonaux
Séminaire N. Bourbaki, 1987-1988, exp. n° 696.



Howard Masur, Serge Tabachnikov

Rational Billiards and Flat Structures
Handbook of Dynamical Systems, Vol 1A, 2002 Elsevier Science B.V.



Serge Tabachnikov

Billiards
Panoramas et Synthèses N.1, 1995 Société Mathématique de France



Corinna Ulcigrai

Proprietà Ergodiche di Trasformazioni di Scambio di Intervalli e Foliazioni Misurate su Superfici
Tesi di Laurea, A.A. 2001-2002



Jean-Christophe Yoccoz

Interval exchange maps and translation surfaces