Gli errori nelle dimostrazioni matematiche

Un libro a cura di G. Balzarotti e P. Lava

Alessio Del Vigna[1]

[1]Department of Mathematics (UniPi)

Introduzione

Prefazione

Il libro è "una raccolta di dimostrazioni errate".

Problema

Perché si sbagliano le dimostrazioni?

Usando le parole degli autori:

"Spesso l'errore è causato dalla voglia di dimostrare la tesi o le idee che si sono concepite".

$\Downarrow$

L'estremo desiderio di arrivare alla conclusione voluta, il sentimento e la foga che spingono un matematico nel voler dimostrare proprio quel fatto molto spesso sono alla base degli errori.

Primi errori

Osservazione

1. Una dimostrazione può essere errata anche se porta a conclusioni vere.
2. Molti tentativi che danno esito positivo *non* costituiscono una dimostrazione.

Molti studenti che non hanno capito il senso della dimostrazione matematica sarebbero pronti ad ammettere eccezioni di fronte a un controesempio ad una dimostrazione apparentemente giusta di un fatto (errato).

Consideriamo l'espressione $991 \cdot n^2 + 1$. Affermiamo che essa non genera mai quadrati perfetti. Per n sino a un milione si verifica velocemente l'affermazione con un calcolatore; però l'affermazione è falsa! Infatti per

$$n = 12055735790331359447442538767$$

l'espressione precedente genera un quadrato.

Perché?

Problema

Perché studiare dimostrazioni sbagliate?

Individuiamo due aspetti fondamentali:

1. nel corso della storia della matematica le dimostrazioni sono nate come le conosciamo, ed anzi all'inizio spesso e volentieri contenevano degli errori;
2. anche studiare dimostrazioni che "non funzionano" è utile per trasmettere il senso della dimostrazione agli studenti.

Dividiamo gli errori che presenteremo in diversi gruppi:

1. applicazione errata delle regole algebriche;
2. ritenere vere assunzioni intuitive ma errate;
3. utilizzare un linguaggio informale (cattiva definizione degli oggetti di cui si parla);
4. erorri logici-fondazionali (come scegliere gli assiomi di una teoria?);
5. l'errore degli errori...

Galleria degli... errori

Ogni numero è uguale al suo doppio

Teorema

Per ogni $a \in \mathbb{R}$ *vale* $a = 2a$*.*

Dimostrazione. Per $a = 0$ la tesi vale; si considerino dunque $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $a = b$ e $a, b \neq 0$. Moltiplicando per a si ha si ottiene

$$a^2 = ab.$$

Sottraiamo adesso b^2 da entrambi i membri e si ha $a^2 - b^2 = ab - b^2$. A questo punto si scompone in fattori

$$(a + b)(a - b) = b(a - b),$$

da cui $a + b = b$. Ma dato che $a = b$ si ottiene $2a = a$. □

Caccia all'errore

L'errore si trova nel passaggio che porta da $(a+b)(a-b) = b(a-b)$ a $a+b=b$. In questo passaggio abbiamo diviso per $a-b$, che purtroppo però sotto le nostre ipotesi è nullo...

Attenzione

Quando si esegue una divisione, *non* si può dividere per zero.

L'errore è facilmente scovabile in una dimostrazione così corta, ma nelle pagine di dimostrazioni più lunghe può non esserlo.

Lo stesso Bolzano (1781–1848) dice che quello era un errore diffuso ai suoi tempi.

π è intero!

Teorema

π è un numero intero.

Dimostrazione. Sia $\delta = \pi - 3$ la parte decimale di π e poniamo

$$x = \frac{\delta}{2} + 3 = \frac{\pi + 3}{2}.$$

Moltiplicando entrambi i membri per 2δ si ha $2x\delta = (\pi + 3)\delta$. Del resto $\delta = \pi - 3$, dunque $2x\pi - 6x = \pi^2 - 9$, da cui

$$9 - 6x + x^2 = \pi^2 - 2x\pi + x^2$$

$$(3 - x)^2 = (\pi - x)^2.$$

Da ciò segue $3 - x = \pi - x$, ossia $\pi = 3$ e $\delta = 0$. $\square$

Caccia all'errore

Anche qui l'errore è semplice da individuare, e risiede nel passaggio in cui sostanzialmente abbiamo estratto la radice quadrata. L'implicazione falsa è che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b.$$

Infatti dall'ipotesi potrebbe anche seguire $a = -b$, ossia l'implicazione corretta è che per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b \ \vee \ a = -b.$$

Vediamo cosa sarebbe successo con i passaggi correti. Da $(3-x)^2 = (\pi - x)^2$ segue

$$3 - x = \pi - x \ \vee \ 3 - x = x - \pi.$$

La prima di queste dà $\pi = 3$ mentre la seconda $x = \frac{\pi+3}{2}$. La seconda soluzione non è altro che la definizione di x che abbiamo dato all'inizio, ma rimane ancora da giustificare perché la prima soluzione, ossia $\pi = 3$ non sia valida. Questo perché sennò $\delta = 0$ e noi abbiamo moltiplicato per δ in uno dei passaggi.

I numeri immaginari, ovvero $0 = 2$

L'unità immaginaria i è quel numero complesso tale che $i^2 = -1$.

Teorema

Si ha $0 = 2$.

Dimostrazione. Partiamo da $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$, e effettuiamo le seguenti trasformazioni:

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1}\sqrt{1} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = -1,$$

da cui segue immediatamente $0 = 2$. $\square$

Caccia all'errore

Qui la questione è più sottile.

1. Se stiamo operando sui reali già scrivere $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}$ è un errore, in quanto $\sqrt{-1}$ non è definita in $\mathbb{R}$. Quindi la dimostrazione è errata perché stavamo lavorando su un oggetto che non esiste.
2. Se lavoriamo in $\mathbb{C}$ e denotiamo con $\sqrt{-1}$ l'unità immaginaria i l'errore è da un'altra parte. Il problema risiede qui:

$$\sqrt{\frac{1}{-1}} = \sqrt{\frac{-1}{1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}.$$

   Nessuno garantisce (e in effetti è falso) che le regole di calcolo con i radicali continuino a valere anche in $\mathbb{C}$. Già questo calcolo, se fosse corretto, mostrerebbe $i = 1/i$. Applicando le regole di calcolo dei numeri complessi abbiamo però che $1/i = -i$.

Somme infinite che sono finite...

Tutti sanno che

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1,$$

per convincersene basta disegnare un quadrato unitario e suddividerlo in parti di aree corrispondenti agli addendi di questa somma.

Come si può dimostrare? Sia A tale somma, allora

$$A = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = \frac{1}{2}(1 + A),$$

da cui si ricava $A = 1$.

Somme infinite che sono finite...

Consideriamo adesso la somma $B = 2 + 4 + 8 + \cdots$. Ragionando come prima si può scrivere

$$B = 2(1 + 2 + 4 + 8 + \cdots) = 2(1 + B),$$

da cui $B = -2$.

Stavolta siamo incappati in una contraddizione! L'errore sta nell'aver fatto un calcolo con una quantità B che in realtà non esiste.

Somme infinite che sono finite. . .

Matematicamente dovremmo dire che A e B sono due serie, la prima convergente e la seconda no.

La convergenza di una serie può essere stabilita senza conoscerne necessariamente la somma: del resto sapere che una serie è o no convergente è necessario per effettuare manipolazioni come le precedenti.

Attenzione

Prima di manipolare un'espressione si deve esser sicuri che questa espressione esista.

La ζ Riemann e le somme infinite

Lavoriamo adesso con una funzione di variabile complessa s, che denotiamo con $s = \sigma + it$.

Definizione

La *zeta di Riemann* è la funzione definita da

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Tale funzione soddisfa l'equazione funzionale

$$\zeta(1-s) = (s-1)!\,\frac{1}{2\pi^s}\cos\frac{\pi s}{2}\cdot\zeta(s)$$

che vale per s intero.

Un giochetto con l'equazione funzionale

Sostituendo $s = 2$ nell'equazione funzionale si ottiene $\zeta(-1) = -\frac{1}{2\pi^2}\zeta(2)$. È noto che

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

da cui si ottiene che

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

La somma di tutti i numeri naturali è un numero negativo!

L'errore

La definizione della funzione e l'equazione funzionale sono corrette, però necessitano di alcune precisazioni.

1. La definizione di ζ ha senso solo per gli s tali che $\sigma > 1$: infatti in questo semipiano si ha la convergenza assoluta della serie (e quindi anche puntuale);
2. la funzione ζ può essere prolungata in modo analitico per $s \neq 1$, e nel punto $s = 1$ la funzione ζ presenta un polo semplice di residuo 1;
3. l'equazione funzionale è valida per tutti gli $s \neq 1$.

L'errore consiste nell'aver supposto che per $s = -1$ l'espressione della funzione ζ fosse ancora quella della definizione, ma così non è.

I numeri pari interessanti

Teorema

Tutti i numeri pari (positivi) sono interessanti.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo supponendo che non tutti numeri pari positivi siano interessanti. L'insieme dei pari non interessanti avrà un minimo: il più piccolo numero pari non interessante? Interessante! Assurdo. □

Ovviamente l'errore sta nel non aver definito formalmente il concetto di "interessante". La buona definizione dei concetti sta alla base di innumerevoli errori nelle dimostrazioni.

Le teorie matematiche

Una teoria matematica è un insieme di formule logiche, dette *assiomi*.

Uno dei problemi che si devono affrontare nella formalizzazione di una teoria è la scelta degli assiomi, di cui evidenziamo due caratteristiche:

1. gli assiomi non devono contenere contraddizioni (contraddizioni evidenti, perché poi purtroppo c'è il secondo teorema di Gödel...);
2. un insieme minimale di assiomi non deve avere alcuna formula che sia ricavabile dalle altre.

La geometria euclidea

Euclide, tra gli assiomi della sua teoria geometrica (I libro, postulato 5), inserì il famoso

Assioma (postulato delle parallele)

Se una retta, incontrandone altre due, forma gli angoli interni da una stessa parte minori di due retti, le due rette prolungate all'infinito si incontrano dalla parte in cui sono i due angoli minori di due retti.

Una formulazione equivalente del postulato è la seguente (dovuta a John Playfair (1748–1819)):

Assioma (postulato delle parallele)

Per un punto esterno a una retta passa una e una sola retta parallela alla retta data.

Un po' di storia

Sin dall'antichità il postulato non era accettato come tale e in molti tentarono di dimostrarlo dagli altri assiomi.

Euclide dimostra, senza utilizzare il V postulato, che "In un triangolo due lati insieme sono maggiori del terzo". Con questo fatto Tolomeo dimostra la negazione del postulato delle parallele (con un procedimento a ripetizione infinita) ma Proclo ne individua l'errore logico che ci stava dietro.

Girolamo Saccheri (1667–1733) con un errore logico dimostra in realtà che il postulato delle parallele è indipendente dagli altri assiomi.

Euclide aveva ragione!

Dunque Euclide aveva fatto bene a mettere il postulato delle parallele tra gli assiomi della geometria che oggi porta il suo nome, in quanto tale enunciato non si può ricavare dagli altri assiomi.

A questo punto, però, nulla vieta che tra gli assiomi possiamo non mettere il postulato delle parallele o addirittura metterne la negazione: si ottengono semplicemente altre geometrie, vediamo un esempio.

La geometria sferica

La geometria sferica è un esempio di geometria non euclidea ed è caratterizzata dall'assenza di rette parallele. Un suo modello si presenta come "descritto" dalla geometria della superficie di una sfera, in cui i punti sono coppie di punti diametralmente opposti e le rette sono cerchi massimi.

L'errore degli errori

Dimostrabilità

L'errore che vogliamo analizzare è espresso nella seguente frase:

Tutto è dimostrabile.

L'interpretazione matematica di questa frase sta a significare questo: "data una proposizione è sempre possibile dimostrare che essa è vera o falsa".

Per il *principio del terzo escluso* ogni formula esprimibile logicamente è o vera o falsa all'interno di un modello di una certa teoria (*tertium non datur*).

Osservazione

Il problema, però, non riguarda la veridicità o meno delle formule, ma la loro dimostrabilità.

I teoremi di Gödel

Definizione

Una teoria logica si dice *completa* se ogni formula è dimostrabile o refutabile all'interno di questa teoria.

Il matematico austriaco Kurt Gödel (1906–1978) lavorò in quest'ambito nella logica del primo ordine: nel 1931 ha provato che non tutte le teorie sono complete!

Quindi in alcune teorie ci sono delle formule che non sono né dimostrabili né refutabili.

Cioè una certa formula deve essere, per il principio del terzo escluso, vera o falsa, ma la veridicità o la falsità della formula stessa non possono essere dimostrate all'interno della teoria.

I teoremi di Gödel

Vediamo l'enunciato del primo teorema di incompletezza:

Teorema (primo teorema)

Sia T una teoria che contiene la teoria aritmetica e coerente. Allora T è incompleta.

Ossia, in una teoria che soddisfa le ipotesi dette esiste una formula che non è né dimostrabile né refutabile.

Osservazione

La dimostrazione del teorema di Gödel è costruttiva, ossia la formula di cui il teorema prova l'esistenza viene effettivamente esibita. La formula costruita è una formula che afferma la propria dimostrabilità.

I teoremi di Gödel

Una prima conseguenza è la seguente.

Corollario

La teoria di Peano è incompleta.

Se ci pensiamo conoscevamo già un sistema incompleto: ad esempio se si elimina il postulato delle parallele dalla geometria euclidea si ottiene un sistema incompleto in quanto tale postulato è indipendente dagli assiomi.

Osservazione

L'assioma della scelta e l'ipotesi del continuo sono indecidibili nell'assiomatizzazione tradizionale della teoria degli insiemi. Questi risultati però non si basano sui teoremi di incompletezza.

I teoremi di Gödel

Adesso l'enunciato del secondo teorema di incompletezza.

Teorema (secondo teorema)

Sia T una teoria che contiene la teoria aritmetica e coerente. Allora T non può dimostrare la propria coerenza.

Osservazione

È interessante notare che la dimostrazione di questo teorema si basa sul dimostrare che la formula che esprime la coerenza di T è logicamente equivalente alla formula di Gödel costruita nel primo teorema.