IL TEOREMA DI HALES-JEWETT

ALESSIO DEL VIGNA

In queste note tratteremo il teorema di Hales-Jewett, apparso per la prima volta nel 1963 in [2]: la dimostrazione che vedremo qui non è quella originaria, ma è quella esposta da Blass in [1]. Infine vedremo come dal teorema di Hales-Jewett seguono molti risultati in teoria di Ramsey, come il teorema di van der Waerden, una sua generalizzazione in più dimensioni e alcune sue varianti.

1. Preliminari

Sia A un insieme non vuoto e consideriamo l'insieme

$$S = \{f : \{0, \dots, n-1\} \to A \, : \, n \in \mathbb{N}\}.$$

Nella pratica ci riferiremo agli elementi di S con il termine *parole*, e le scriveremo elencando in ordine i valori della funzione corrispondente. Inoltre chiamiamo *lunghezza* di f il naturale n tale che $\operatorname{Dom} f = \{0, \dots, n-1\}$.

Esempio 1. Se $A = \{3, 7\}$ e $f : \{0, 1, 2\} \to A$ è la funzione definita da

$$f(0) = 3, \quad f(1) = 3 \quad \text{e} \quad f(2) = 7,$$

allora rappresentiamo f come la parola 337.

Date f e g in S possiamo definire l'operazione di *concatenazione* come segue: se f e g hanno lunghezza rispettivamente n e m definiamo $f \frown g$ come la funzione di dominio $\{1, \dots, m+n-1\}$ data da

$$(f \frown g)(i) = \begin{cases} f(i) & \text{se } i < n \\ g(i-n) & \text{se } i \geq n \end{cases}.$$

Esempio 2. Sia A come nel precedente esempio. Se f e g sono le parole 337 e 373373 allora $f \frown g$ è la parola $337 \frown 373373 = 337373373$.

Si può verificare che l'operazione di concatenazione definita su S è associativa, pertanto ha senso dare la seguente definizione.

Definizione 3. Sia A un insieme non vuoto. Il *semigruppo libero su* A è l'insieme S dotato dell'operazione di concatenazione.

Definizione 4. Sia S il semigruppo libero sull'alfabeto A, e sia $x \notin A$ una variabile.

(i) Una *parola variabile* $w(x)$ è un elemento del semigruppo libero su $A \cup \{x\}$ in cui x occorre.

(ii) Definiamo l'insieme $V = \{w(x) \, : \, w(x) \text{ è una parola variabile}\}$ e il semigruppo S' delle parole sull'alfabeto $A \cup \{x\}$.

(iii) Data una parola variabile $w(x)$ e un elemento $a \in A$, denotiamo con $w(a)$ la parola di S in cui ogni occorrenza di x è rimpiazzata da un'occorrenza di a.

Osservazione 5. Le definizioni sopra sono chiare, ma non sono state date in modo formale: infatti non ci siamo espressi in termini di funzioni. Inoltre se $w(x)$ è una parola variabile e $a \in A$ definiamo $w(a)$ come la parola con stesso dominio di $w(x)$ e definita da

$$w(a)_i = \begin{cases} w(x)_i & \text{se } w(x)_i \neq x \\ a & \text{se } w(x)_i = x \end{cases}.$$

Se $w \in S$ e $a \in A$ diciamo che a *occorre* in w se $a \in \operatorname{Im} w$.

Per un elemento $a \in A$ definiamo la funzione

$$s_a : S' \to S$$

tale che $s_a(w(x)) = w(a)$, ossia la parola che sostituisce a ad ogni occorrenza della variabile x. Ovviamente la funzione s_a è l'identità se ristretta a S.

2. Il teorema e il filetto multidimensionale

Finalmente possiamo enunciare il teorema nella forma che dimostreremo direttamente tramite gli ultrafiltri.

Teorema 6 (Hales-Jewett)**.** *Sia A un insieme non vuoto finito e sia $S = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ una r-colorazione del semigruppo libero S su A. Allora esiste un colore i e una parola variabile $w(x)$ tale che $\{w(a) : a \in A\} \subseteq C_i$.*

Data una parola variabile $w(x) \in V$ denotiamo con $R_w = \{w(a) : a \in A\}$ l'insieme di tutte le parole $w(a)$ ottenute da $w(x)$ sostituendo x con ciascun elemento di A.

Definizione 7. Un insieme del tipo R_w è detto *retta combinatoria.*

In termini di rette combinatorie possiamo riformulare il teorema come segue.

Teorema 7 (Hales-Jewett)**.** *Sia A un insieme non vuoto finito e sia $S = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ una r-colorazione del semigruppo libero S su A. Allora esiste una retta combinatoria monocromatica.*

Prima di proseguire con la dimostrazione del teorema vogliamo soffermarci un momento sulla sua versione finita, forse anche più nota. Denotiamo con W^n l'insieme delle parole sull'alfabeto $A = \{1, \ldots, n\}$, e con W^n_k l'insieme delle parole di lunghezza k sull'alfabeto $A = \{1, \ldots, n\}$.

Teorema 8 (Hales-Jewett finito)**.** *Per ogni r e n interi positivi esiste $HJ(n, r)$ intero positivo tale che per ogni r-colorazione $W^n_k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ con $k \geq HJ(n, r)$ esiste una retta combinatoria monocromatica.*

Dimostrazione. Segue dal teorema di Hales-Jewett per compattezza combinatoria. Più nei dettagli, definiamo la famiglia di insiemi finiti

$$\mathcal{A} = \{R_w : w(x) \in W^n(x))\}.$$

Il teorema di Hales-Jewett ci dice semplicemente che $\mathcal{A}$ è r-regolare su $X = W^n$: per il teorema di compattezza combinatoria abbiamo allora che esiste $Y \subseteq X$ finito sul quale $\mathcal{A}$ è ancora r-regolare. Dato che Y è un sottoinsieme finito di X possiamo definire $M = \max_{f \in Y} |\operatorname{Dom} f|$. Preso $k > M$

mostriamo adesso che $\mathcal{A}$ è r-regolare su W_k^n. Per ogni $h < k$ sia w_h una parola con lunghezza $k-h$ e sia

$$W_k^n = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r.$$

Da questa ricaviamo una r-colorazione di $Y = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$ in questo modo: una parola w di lunghezza h sta nel colore D_i se e solo se $w_h \frown w \in C_i$ (e ciò ha senso perché $w_h \frown w$ ha lunghezza k). In questo modo, per r-regolarità di $\mathcal{A}$ su Y esiste una parola variabile $z'(x)$ tale che $R_{z'} \subseteq D_i$ e sia m la lunghezza di z'. Definita $z = w_m \frown z'$ abbiamo che $R_z \subseteq C_i$. □

Per chiudere il paragrafo vogliamo vedere una semplice applicazione al gioco del filetto multidimensionale. Abbiamo una griglia $n \times \cdots \times n$ in dimensione d (ossia n è ripetuto d volte): i due giocatori selezionano a turno un punto della griglia, e vince chi riesce a selezionare per primo una retta.

Esempio 9. Il filetto classico si ha per $n = 3$ e $d = 2$.

Corollario 10. *Per ogni n intero positivo esiste $HJG(n)$ tale che per ogni $d > HJG(n)$ il gioco del filetto su una griglia $n \times \cdots \times n$ in dimensione d non può terminare in patta.*

Dimostrazione. I punti di una griglia del filetto $n \times \cdots \times n$ in dimensione d si possono identificare[1] con le parole di W_d^n. Una partita a filetto è una 2-colorazione della griglia, ossia una 2-colorazione di W_d^n. Fissato n possiamo applicare il teorema di Hales-Jewett finito e concludere che se $d \geq HJ(n,2)$ allora esiste una retta combinatoria monocromatica. Ciò significa che per $d \geq HJ(n,2)$ uno dei due giocatori ha vinto perché ha selezionato una retta combinatoria monocromatica. Il corollario è dimostrato osservando che $HJG(n) = HJ(n,2)$. □

L'obiettivo del filetto è riuscire a selezionare una retta monocromatica, dove "retta" è da intendersi in senso geometrico. Il teorema di Hales-Jewett, però, ci dà l'esistenza di rette combinatorie monocromatiche: non c'è da preoccuparsi, in quanto le rette combinatorie sono un sottoinsieme delle rette geometriche. Tranne che in W_d^1, le rette combinatorie sono un sottoinsieme proprio delle rette geometriche, vediamo per esempio nel caso del filetto classico. In W_2^3 la retta

$$(3,1)(2,2)(1,3)$$

è una retta geometrica ma non è combinatoria.

Osservazione 11. Indichiamo sempre con $HJ(n,r)$ il minimo numero naturale che soddisfa il teorema di Hales-Jewett e con $HJG(n)$ la minima dimensione in cui il filetto su una griglia di "lato" n è vinto per il primo giocatore. Ovviamente vale che

$$HJG(n) \leq HJ(n,2).$$

Un problema interessante è lo studio di limitazioni superiori per questi due numeri: per quanto riguarda $HJ(n,r)$ sono stati compiuti molti passi avanti da Shelah e successivamente da Gowers in alcuni loro lavori; per $HJG(n)$, invece, il problema di stabilirne la crescita è ancora aperto.

[1] La corrispondenza è quella che associa ad una d-upla $(i_1, \ldots, i_d) \in \{1, \ldots, n\}^d$ la parola $i_1 i_2 \cdots i_d$.

Definizione 12. Un *semigruppo topologico destro* è una coppia $(X, \star)$ dove:

(i) X è uno spazio topologico;

(ii) l'operazione $\star$ è un'operazione binaria associativa su X;

(iii) per ogni $y \in X$, la funzione $\psi_y : X \to X$ dove $x \mapsto x \star y$ è continua.

La dimostrazione del teorema di Hales-Jewett passa attraverso lo spazio degli ultrafiltri βS, dove S è il semigruppo libero sull'alfabeto finito A. Ricordiamo un paio di fatti generali. Sia $(S, \cdot)$ uno semigruppo topologico discreto e consideriamo lo spazio βS degli ultrafiltri su S. Tale spazio è compatto e di Hausdorff e inoltre contiene (una copia isomorfa di) S come sottospazio denso. In sostanza, βS è (isomorfo a) la compattificazione di Stone-Čech di S. L'operazione di semigruppo di S si può estendere in modo unico ad un'operazione binaria su βS, che indicheremo con $\star$, e si ha che l'applicazione $\psi_y : \beta S \to \beta S$ definita da

$$\psi_y(x) = x \star y$$

è continua per ogni $y \in \beta S$. Pertanto $(\beta S, \star)$ risulta essere un semigruppo topologico destro, compatto e di Hausdorff. Vedremo di seguito alcuni risultati di carattere generale sui semigruppi topologici destri compatti e di Hausdorff, risultati che poi potranno essere applicati a βS per quanto appena detto. In questo paragrafo $(X, \star)$ denoterà sempre un semigruppo topologico destro compatto e di Hausdorff.

Teorema 13 (di Ellis)**.** *Sia $(X, \star)$ un semigruppo topologico destro compatto e di Hausdorff. Allora X possiede elementi idempotenti.*

Dimostrazione. Definiamo $\mathcal{C} = \{C : C \neq \emptyset \text{ chiuso tale che } C \star C \subseteq C\}$. Affermiamo che ogni catena discendente $\langle C_i : i \in I \rangle$ in $(\mathcal{C}, \subseteq)$ ammette minoranti. Per ipotesi la famiglia $\{C_i\}_{i \in I}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, dunque per compattezza vale che $C' = \bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset$. Banalmente C' è chiuso, e si vede per verifica diretta che $C' \star C' \subseteq C'$: così C' è l'elemento minimale cercato per la catena discendente. Applicando il lemma di Zorn abbiamo l'esistenza di $C \in \mathcal{C}$ elemento minimale rispetto all'inclusione. Mostriamo adesso che $C = \{x\}$ consiste di un solo punto, che quindi deve essere idempotente.

Prendiamo $x \in C$, e consideriamo $C \star x = \{y \star x : y \in C\}$. Affermiamo che $C \star x$ è chiuso: infatti C è compatto perché chiuso in uno spazio compatto di Hausdorff, e così $C \star x = \psi_x(C)$ è compatto perché immagine continua di un compatto, e dunque chiuso perché X è di Hausdorff. Inoltre

$$\begin{aligned}\psi_x(C) \star \psi_x(C) &= (C \star \{x\}) \star (C \star \{x\}) \subseteq C \star (C \star \{x\}) = \\ &= (C \star C) \star \{x\} \subseteq C \star \{x\} = \psi_x(C) \subseteq C.\end{aligned}$$

Per la minimalità di C deve essere $\psi_x(C) = C$. In particolare, dall'inclusione $\supseteq$ e dal fatto che $x \in C$ otteniamo che $\Lambda = \{y \in C : y \star x = x\} \neq \emptyset$. Del resto però $\Lambda = \psi_x^{-1}(\{x\}) \cap C$: essendo C chiuso per ipotesi ed essendo $\{x\}$ chiuso perché è un singoletto in uno spazio di Hausdorff, abbiamo anche che Λ è chiuso. Inoltre affermiamo che $\Lambda \star \Lambda \subseteq \Lambda$: presi $y, y' \in \Lambda$ si ha

$$(y \star y') \star x = y \star (y' \star x) = y \star x = x,$$

ossia $y \star y' \in \Lambda$. Sempre per minimalità si ha $\Lambda = C$. In partcolare $x \in \Lambda$, e dunque x è idempotente. Infine non può che essere $C = \{x\}$ per minimalità di C, visto che $\{x\} \in \mathcal{C}$. $\square$

Lemma 14. *Sia I un ideale sinistro minimale e $x \in I$. Allora per ogni $y \in X$ esiste $z \in X$ tale che $z \star y \star x = x$.*

Dimostrazione. Per ogni $z' \in I$ l'ideale sinistro $X \star z'$ è contenuto in I, pertanto è I stesso per minimalità: dunque I è generato da ogni suo elemento. Dunque per ogni $y \in X$ abbiamo $y \star x \in I$ e tale elemento genera I. Dunque esiste $z \in X$ tale che $z \star (y \star x) = x$. □

Introduciamo una relazione di ordine parziale sul semigruppo X. Definiamo

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \star y = y \star x = x.$$

Lemma 15. *Sia x un elemento idempotente. Se $I \subseteq X \star x$ è un ideale sinistro minimale allora in I esiste un idempotente $y \leq x$.*

Dimostrazione. Essendo I un sottosemigruppo chiuso di X, per il teorema di Ellis esso contiene un elemento z idempotente. Tale $z \in I \subseteq X \star x$, dunque esiste $z' \in X$ tale che $z = z' \star x$. Ma x è idempotente, dunque z soddisfa

$$z = z' \star x = z' \star (x \star x) = (z' \star x) \star x = z \star x.$$

Definiamo adesso $y = x \star z$ e osserviamo subito che $y \in I$ perché I è un ideale sinistro e $z \in I$. Dimostriamo che $y \leq x$: si ha

$$\begin{aligned} y \star x = (x \star z) \star x = x \star (z \star x) = x \star z = y \\ x \star y = x \star (x \star z) = (x \star x) \star z = x \star z = y. \end{aligned}$$

Infine per vedere che y è idempotente si procede in modo analogo:

$$y \star y = (x \star z) \star (x \star z) = x \star (z \star x) \star z = x \star z \star z = x \star z = y,$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Proposizione 16. *Sia x un elemento idempotente. Allora esiste $y \leq x$ idempotente e minimale rispetto all'ordine $\leq$.*

Dimostrazione. Sia $I \subseteq X \star x$ un ideale sinistro minimale e sia $y \leq x$ idempotente dato dal precedente lemma. Mostriamo che un tale y deve anche essere minimale. Sia $y' \leq y$ idempotente: per il Lemma 14 esiste z tale che $z \star y' \star y = y$. L'elemento z soddisfa la relazione $z \star y' = z \star (y' \star y) = y$ e da questa segue

$$y' = y \star y' = (z \star y') \star y' = z \star (y' \star y') = z \star y' = y,$$

e questo conclude. □

Lemma 17. *Un elemento x idempotente e minimale rispetto a $\leq$ appartiene ad ogni ideale bilatero di X.*

Dimostrazione. Affermiamo che x appartiene a un ideale sinistro minimale: prendiamo un ideale sinistro minimale $I \subseteq X \star x$, dunque per il Lemma 15 esiste $y \in I$ idempotente con $y \leq x$. Per minimalità deve essere $x = y \in I$. Per concludere è sufficiente ricordare che ogni ideale sinistro minimale è contenuto in tutti gli ideali bilateri. □

4. La prova del teorema

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari per procedere alla dimostrazione del teorema di Hales-Jewett, che richiamiamo.

Teorema 15 (Hales-Jewett)**.** *Sia A un insieme non vuoto finito e sia $S = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ una r-colorazione del semigruppo libero S su A. Allora esiste un colore i e una parola variabile $w(x)$ tale che $\{w(a) : a \in A\} \subseteq C_i$.*

Dimostrazione. Consideriamo il semigruppo $(S', \frown)$ e osserviamo che S è un sottosemigruppo di S' e che V è un ideale bilatero. Inoltre per ogni $a \in A$ l'applicazione $s_a : S' \to S$ è un omomorfismo. Adesso possiamo estendere l'applicazione di concatenazione allo spazio compatto $\beta S'$, ottenendo un semigruppo topologico destro compatto. Non è difficile verificare che βS è un sottosemigruppo chiuso di $\beta S'$ e che βV è un ideale bilatero chiuso in βS. Inoltre l'estensione di s_a a $\beta S'$, che indicheremo ancora con $s_a : \beta S' \to \beta S$ è un omomorfismo, ed è l'identità se ristretto a βS. Infine si verifica immediatamente che s_a rispetta l'ordine parziale $\leq$, ossia

$$\mathcal{V} \leq \mathcal{W} \Longrightarrow s_a(\mathcal{V}) \leq s_a(\mathcal{W}).$$

Per il teorema di Ellis e la Proposizione 16 esiste un idempotente minimale $\mathcal{W} \in \beta S$. Tale $\mathcal{W}$ è idempotente, ma non è detto che sia minimale anche in $\beta S'$. Però, ancora per la Proposizione 16, esiste in $\beta S'$ un idempotente minimale $\mathcal{V} \leq \mathcal{W}$. Dunque per il Lemma 17 tale $\mathcal{V}$ appartiene ad ogni ideale bilatero di $\beta S'$, dunque anche a βV[2]. Per ogni $a \in A$ abbiamo

$$s_a(\mathcal{V}) \leq s_a(\mathcal{W}) = \mathcal{W},$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché $\mathcal{W} \in \beta S$ e s_a è l'identità su βS. Ora, $s_a(\mathcal{V}) \in \beta S$ ed è anche idempotente (verifica immediata), dunque per minimalità di $\mathcal{W}$ si ha $s_a(\mathcal{V}) = \mathcal{W}$.
Data una qualunque colorazione finita di S, per le proprietà di ultrafiltro uno dei colori - diciamo C_i - deve appartenere a $\mathcal{W}$. Dato che per ogni $a \in A$ vale $C_i \in \mathcal{W} = s_a(\mathcal{V})$, segue che $s_a^{-1}(C_i) \in \mathcal{V}$. L'osservazione chiave è che

$$\bigcap_{a \in A} s_a^{-1}(C_i) \in \mathcal{V},$$

dunque è non vuoto. Presa una parola $w(x) \in \bigcap_{a\in A} s_a^{-1}(C_i)$ avremo esattamente che $\{s_a(w(x)) : a \in A\} \subseteq C_i$, che è la tesi. □

5. Conseguenze del teorema di Hales-Jewett

Vediamo adesso come dal teorema di Hales-Jewett seguano diversi risultati importanti in teoria di Ramsey. Iniziamo dal classico teorema di van der Waerden.

Teorema 16 (van der Waerden)**.** *Per ogni r-colorazione dei naturali $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ esiste un colore i tale che C_i contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe.*

Dimostrazione. Fissato un intero positivo k dimostriamo che in uno dei colori deve esistere una progressione aritmetica di lunghezza k. Questo è sufficiente a dimostrare il teorema di van der Waerden, dato che la colorazione è finita: infatti ciò implica che per infiniti k le progressioni aritmetiche trovate appartengono tutte allo stesso colore, e dunque tale colore ne contiene di arbitrariamente lunghe. Scrivendo ogni numero naturale in base k, l'insieme $\mathbb{N}$ può essere identificato con l'insieme W^k

[2]Osserviamo che da quest'ultimo fatto segue che $\mathcal{V} \neq \mathcal{W}$.

delle parole sull'alfabeto $\{0, \ldots, k-1\}$. Il teorema di Hales-Jewett ci assicura l'esistenza di una retta combinatoria monocromatica: questa corrisponde ad una progressione aritmetica lunga k e monocromatica. Infatti se $R_w = \{w(0), \ldots, w(k-1)\}$ è la retta combinatoria data dal teorema di Hales-Jewett abbiamo che tutte le differenze $w(i+1) - w(i)$ sono costanti: precisamente tali differenze sono uguali alla parola che ha tutti 0 nei posti in cui la parola w non ha la variabile x, ed ha degli 1 nei posti rimanenti. $\square$

Osservazione 17. Nell'ultima parte del teorema abbiamo dimostrato che la ragione di una progressione aritmetica monocromatica lunga k è un numero che in base k si scrive solo con le cifre 0 e 1.

Come ulteriore conseguenza del teorema di Hales-Jewett possiamo anche dimostrare il teorema seguente, considerato una generalizzazione del teorema di van der Waerden.

Definizione 18. Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^m$. Diremo che B è *omotetico* ad A se esistono $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}^m$ tali che

$$B = cA + b.$$

Teorema 19 (Gallai)**.** *Sia data una r-colorazione di $\mathbb{R}^m$ e sia $V \subseteq \mathbb{R}^m$ finito. Allora esiste un insieme $W \subseteq \mathbb{R}^m$ monocromatico e omotetico a V.*

Dimostrazione. L'insieme V è un finito dunque possiamo considerarlo come nostro alfabeto. Inoltre, fissato n naturale denotiamo con W_n l'insieme delle parole di lunghezza n sull'alfabeto V. Le parole di W_n possono essere identificate con i punti di $\mathbb{R}^m$ associando alla stringa $v_1 \cdots v_n$ il punto $v_1 + \cdots + v_n$. Dalla r-colorazione di $\mathbb{R}^m$ viene dunque indotta una r-colorazione di W_n: scelto dunque $n \geq HJ(|V|, r)$, dalla versione finita del teorema di Hales-Jewett abbiamo l'esistenza di una retta combinatoria monocromatica generata da una parola variabile $w(x)$. Siano w_i per $i = 1, \ldots, n$ le "lettere" della parola $w(x)$. Siano $J = \{i : w_i = x\}$ e $I = \{1, \ldots, n\} - J$. La parola $w(x)$ corrisponde pertanto al punto $\sum_{i \in I} w_i + |J|x$, e dunque la retta combinatoria monocromatica corrisponde all'insieme

$$W = \left\{ \sum_{i \in I} w_i + |J|v \, : \, v \in V \right\},$$

che è omotetico a V e monocromatico. $\square$

Esaminiamo infine una variante del teorema di van der Waerden, che ci dà l'esistenza di progressioni aritmetiche con ragione in un certo insieme, a patto che questo insieme abbia una certa struttura.

Teorema 20. *Sia S un insieme additivamente grande. Per ogni colorazione finita dei naturali esistono progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe, monocromatiche e con ragione in S.*

Dimostrazione. Sia $X = \{x_1 < \cdots < x_n < \cdots\}$ un insieme infinito con $\mathrm{FS}(X) \subseteq S$. Fissato $l \geq 2$ dimostriamo che esiste una progressione aritmetica monocromatica di lunghezza l con ragione in S: per il solito ragionamento effettuato all'inizio della dimostrazione del teorema di van der Waerden, ciò è sufficiente a dimostrare il teorema.
Consideriamo W^l, l'insieme delle parole sull'alfabeto finito $\{1, \ldots, l\}$ e consideriamo l'applicazione $\varphi : W^l \to \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi(a_1 \cdots a_l) = a_1 x_1 + \cdots + a_l x_l.$$

Ogni colorazione finita dei naturali si riporta in questo modo ad una colorazione finita di W^l. Applicando il teorema di Hales-Jewett otteniamo l'esistenza di una retta combinatoria monocromatica, che corrisponde ad una progressione aritmetica di lunghezza l, la cui ragione appartiene a $\mathrm{FS}(X)$, e dunque a S. $\square$

Riferimenti bibliografici

[1] A. Blass, *Ultrafilters: where Dynamics = Algebra = Combinatorics*, Topology Proc. **18**: 33–56, 1993

[2] A. W. Hales e R. I. Jewett, *Regularity and positional games*, Trans. Amer. Math. Soc. **106**: 222–229, 1963

[3] N. Hindman e D. Strauss, *Algebra in the Stone-Čech compactification*, Walter de Guyter, Berlin, New York, 1998

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
Email address: alessio.delvigna@dm.unipi.it