



Università degli Studi di Pisa - Dipartimento di Matematica

Elementi di meccanica celeste

Autore

Alessio Del Vigna

delvigna@mail.dm.unipi.it

Titolare del corso

Prof. Anna Maria Nobili

Università di Pisa

Note dell'omonimo corso tenuto dalla Prof. Anna Maria Nobili
nell'anno accademico 2011-2012.

Queste note contengono almeno un errore. Se ne trovaste qualcuno, vi pregherei di segnalarmelo all'indirizzo delvigna@mail.dm.unipi.it.

Una precisazione. La frase "Queste note contengono almeno un errore" è un primo esempio di teorema di esistenza. Come ogni teorema che si rispetti, ecco la sua dimostrazione: se ci sono errori, ce ne sono; se non ci sono errori, allora è questa stessa frase a costituire un errore. Così sappiamo che un errore c'è, ma in questo momento non sappiamo dire qual è: questo, del resto, è il prezzo dei teoremi di esistenza! Pertanto, se l'unico errore dovesse essere la frase "Queste note contengono almeno un errore", non segnalatelo: eccezion fatta per questa frase, significherebbe -felicemente- che queste note non contengono altri errori.

Indice

1	Problema dei due corpi	1
1.1	Posizione del problema e sua integrabilità	1
1.2	Moto relativo al centro di massa	4
1.3	Passaggio in coordinate polari	7
1.4	Orbite e prime proprietà geometriche	10
1.5	Classificazione delle orbite	14
1.6	Velocità lineare e integrale dell'energia	17
1.7	Le tre leggi di Keplero	20
1.8	L'equazione di Keplero	22
1.9	L'orbita nello spazio	27
2	Problema dei tre corpi ristretto circolare	31
2.1	Formulazione del problema	31
2.2	L'equazione del moto per il terzo corpo	33
2.3	L'integrale di Jacobi	36
2.3.1	Un nuovo integrale primo	36
2.3.2	Regioni ammissibili di moto	37
2.4	Calcolo del primo punto di Lagrange	41
2.4.1	Forze mareali	41
2.4.2	Raggio d'influenza	43
2.5	Criterio di stabilità di Hill	44
3	Maree	49
3.1	Potenziale mareale	49
3.1.1	Caso di assetto fisso	49
3.1.2	Caso corotante	53
3.2	Calcolo del campo delle forze mareali	54
3.2.1	Caso di assetto fisso	55

3.2.2	Caso corotante	58
3.3	Calcolo dell'altezza della marea	59
3.3.1	Caso di assetto fisso	59
3.3.2	Caso corotante	60
3.3.3	Il caso della Terra	61
3.3.4	Maree sulla Terra in tre dimensioni	63
3.4	Attrito delle maree	65
3.4.1	Caso della rotazione lenta	65
3.4.2	Caso della rotazione veloce	67
3.4.3	La marea del sole nel Sistema Solare	69
4	La Terra come sferoide oblatto	71
4.1	Il potenziale di uno sferoide oblatto	71
4.2	La Terra come sferoide oblatto	76
4.2.1	Densità costante	76
4.2.2	Densità non costante	79
4.2.3	Dati numerici	81
4.3	Moti della Terra come corpo rigido	81
4.3.1	Equazioni di Eulero	81
4.3.2	Precessione libera della Terra rigida	83
4.3.3	Precessione lunisolare dell'asse di rotazione della Terra	85
A	Moti del Sole, della Terra e della Luna	91
A.1	Giorno sidereo e giorno solare	91
A.2	Mese sidereo e mese sinodico della Luna	93
A.3	Giorno sinodico della Luna	94

Capitolo 1

Problema dei due corpi

Storicamente l'interazione gravitazionale tra due corpi è il problema che per primo fu affrontato, ed è anche il più semplice. In prima approssimazione, il moto dei pianeti del sistema solare può essere studiato attraverso l'utilizzo del problema dei due corpi, un problema matematico peraltro pienamente risolvibile analiticamente. In questo capitolo descriveremo il moto di due corpi autogravitanti e alcune delle principali applicazioni a casi astrofisici reali, primo su tutti la verifica delle leggi empiriche di Keplero.

Dapprima studieremo il problema dei due corpi nel sistema di riferimento del centro di massa, dopodiché vedremo come ricondurre il problema al piano e daremo le equazioni delle traiettorie del moto. Successivamente analizzeremo le coniche (ossia le orbite ottenute) da un punto di vista matematico e astrofisico; l'analisi delle orbite si completa nei paragrafi successivi, dove si va a studiare come queste si orientano nello spazio.

1.1 Posizione del problema e sua integrabilità

Il problema dei due corpi studia due masse m_1 e m_2 in \mathbb{R}^3 puntiformi, soggette soltanto alla loro mutua interazione gravitazionale. Prendiamo il sistema di riferimento Σ_1 mostrato in nella figura a pagina seguente: questo sarà un sistema di riferimento inerziale, ossia in Σ_1 vale la legge di inerzia.¹ Indichiamo con $\boldsymbol{\rho}_i$ il raggio vettore della massa m_i (per $i = 1, 2$) nel sistema di riferimento Σ_1 e sia

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1$$

il vettore *posizione relativa*.

¹la legge di inerzia, anche nota come prima legge di Newton, afferma che un corpo non soggetto a forze mantiene il proprio stato di moto.

Definizione 1.1. Il *centro di massa* è definito come il punto individuato dal raggio vettore

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \boldsymbol{\rho}_1 + m_2 \boldsymbol{\rho}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \boldsymbol{\rho}_1 + m_2 \boldsymbol{\rho}_2}{M},$$

e indichiamo con $M = m_1 + m_2$ la *massa totale* del sistema.

Il sistema di riferimento Σ_2 mostrato in figura (in blu) è il sistema di riferimento del centro di massa (indicato con CM), e denotiamo con \mathbf{r}_i il raggio vettore di m_i nel sistema di riferimento Σ_2 .

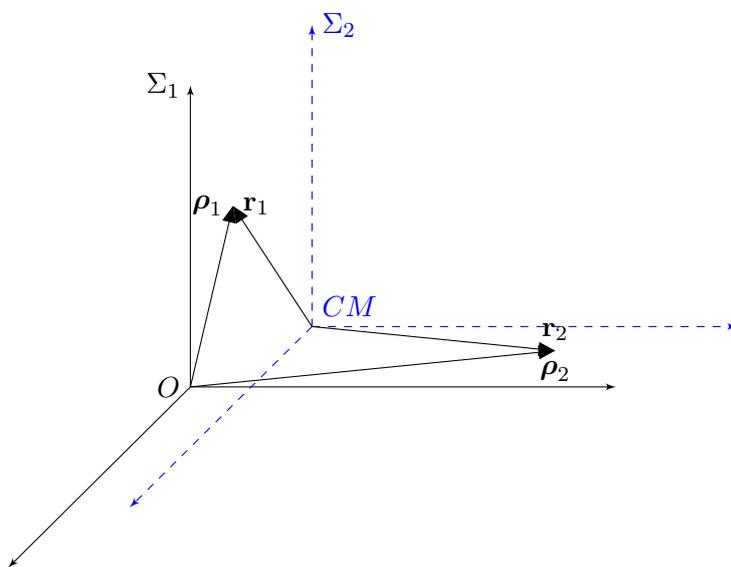


Figura 1.1: Sistemi di riferimento Σ_1 e Σ_2 (del centro di massa).

Il sistema è isolato per ipotesi e ha 6 gradi di libertà (tre coordinate spaziali per ciascuno dei due corpi). Per vedere se il problema è o meno integrabile dobbiamo vedere quanti integrali primi esso possiede, per poi applicare il teorema di Liouville–Arnold–Yost.

Iniziamo osservando che, poiché il sistema è isolato, allora il centro di massa ha accelerazione nulla, ossia

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0.^2$$

Ciò implica che la quantità di moto lineare del sistema $M\dot{\mathbf{R}}$ si conserva, e questo ci dà tre integrali primi del moto. Il centro di massa dunque non accelera, quindi – se il centro di massa non era inizialmente fermo – si può passare al sistema di riferimento Σ_2 , tanto anch'esso è inerziale come Σ_1 .

²questo segue dal fatto che la risultante delle forze esterne è $\mathbf{F} = m_1 \ddot{\boldsymbol{\rho}}_1 + m_2 \ddot{\boldsymbol{\rho}}_2 = M\ddot{\mathbf{R}}$, e in un sistema isolato tale risultante è nulla.

In Σ_2 possiamo scrivere

$$\begin{cases} m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = 0 \\ \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{M} \mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{M} \mathbf{r} \end{cases}. \quad (1.1)$$

Dato che il sistema è isolato (non c'è dissipazione), anche l'energia totale si conserva, e questo fornisce un altro integrale primo del moto. E poiché non ci sono nemmeno momenti di forze esterne non nulli, il momento angolare orbitale del sistema si deve conservare; mostriamo questo fatto:

Proposizione 1.1. *Se il momento totale delle forze esterne a un sistema è nullo allora il momento angolare orbitale del sistema si conserva.*

Dimostrazione. Consideriamo

$$\mathbf{J} = m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2,$$

il momento angolare orbitale totale del sistema, e riscriviamolo grazie alla (1.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= -\frac{m_1 m_2}{M} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{m_1 m_2}{M} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}_2 = \\ &= \frac{m_1 m_2}{M} \mathbf{r} \times (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1) = \\ &= \frac{m_1 m_2}{M} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

dove $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ è la *massa ridotta* del sistema. Dunque si vede che \mathbf{J} potrebbe variare solo in presenza di una forza che produce un momento non nullo. \square

Visto che la forza gravitazionale, che è l'unica in gioco, è una forza centrale (in quanto diretta lungo la congiungente) abbiamo che essa ha momento nullo, e dunque grazie alla proposizione precedente $\dot{\mathbf{J}} = 0$, ossia \mathbf{J} si conserva.

Osservazione 1.1. Ricordiamo che quella appena esposta è una caratteristica di tutte le forze centrali, non solo di quella gravitazionale.

Come si vede dalla (1.2), \mathbf{J} è uno pseudovettore. Essendo il prodotto vettoriale di due vettori c'è l'ambiguità del segno del vettore risultante del prodotto vettoriale: ossia tale risultato dipende dalla scelta della regola della mano destra o della mano sinistra; noi sceglieremo la seconda di esse. Per questo \mathbf{J} fornisce due (e non tre!) integrali primi del moto "buoni" (cioè che soddisfano le proprietà di stabilità dal teorema di Liouville–Arnold–Yost per poter contribuire all'integrabilità del problema).

Teorema 1.1. *Il problema dei due corpi è integrabile.*

Dimostrazione. Nel corso del paragrafo abbiamo determinato sei integrali primi del moto (tre dalla quantità di moto lineare, uno dall'energia e due dal momento angolare totale), e non ve ne sono altri. Essi risultano in numero pari al numero di gradi di libertà del sistema, e pertanto ne garantiscono l'integrabilità grazie al teorema di Liouville–Arnold–Yost. \square

Osservazione 1.2. Si noti che basterebbe aggiungere un terzo corpo per passare a nove gradi di libertà. Siccome non si conoscono per il problema dei tre corpi (senza alcuna approssimazione) altri integrali primi oltre a quelli già trovati, è evidente che il problema generale dei tre corpi non è integrabile.

1.2 Moto relativo al centro di massa

Scriviamo ora le equazioni del moto del problema dei due corpi nel riferimento Σ_2 , nel quale, essendo inerziale, vale la legge fondamentale della dinamica $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, dove in questo caso \mathbf{F} è la forza di attrazione gravitazionale di Newton. Le equazioni sono le seguenti:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = G\frac{m_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = -G\frac{m_1m_2}{r^3}\mathbf{r} \end{cases}, \quad (1.3)$$

che esprimono le equazioni di moto di m_1 soggetto all'attrazione gravitazionale di m_2 e viceversa. Ricordiamo che G è la *costante di gravitazione universale*, e vale

$$G = 6.668 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{s}^{-2}\text{kg}^{-1}.$$

Osservazione 1.3. Da notare che volutamente non abbiamo semplificato le masse dai due lati delle equazioni, e continueremo ancora per tutto il paragrafo a non farlo: il motivo sarà chiaro alla fine di questo paragrafo, dove parleremo del principio di equivalenza delle masse.

Adesso manipoliamo in modo ovvio le equazioni in modo che vi compaia solo la posizione relativa (con le proprie derivate). Moltiplichiamo la prima equazione per m_2 , la seconda per m_1 e sottraiamole; si ottiene

$$m_1m_2\ddot{\mathbf{r}} = -m_1m_2(m_1 + m_2)\frac{G\mathbf{r}}{r^3}.$$

Di conseguenza abbiamo

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r}, \quad \text{ossia} \quad \mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{\mu M}{r^3} \mathbf{r}, \quad (1.4)$$

e la seconda di esse rappresenta l'equazione di moto del problema dei due corpi ridotto ad un solo corpo. È bene osservare che tale riduzione è stata effettuata senza introdurre alcuna approssimazione o caso particolare. Le equazioni (1.4) vengono interpretate, per semplicità di rappresentazione, come le equazioni di moto del sistema descritto nella figura 1.2: un corpo di massa pari alla massa ridotta μ soggetto all'attrazione gravitazionale di un corpo di massa M che è fisso nell'origine.

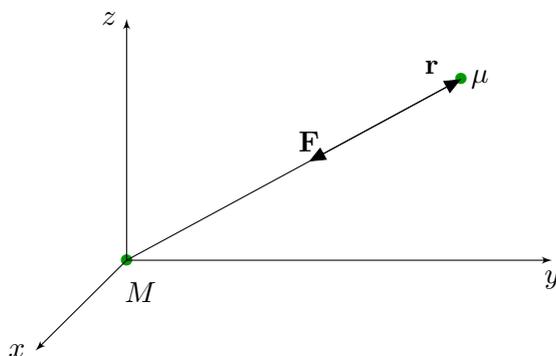


Figura 1.2: Sistema ridotto del problema dei due corpi.

Osservazione 1.4. Quello appena descritto non è il problema dei due corpi gravitazionale con masse μ e M poiché se lo fosse la massa M non potrebbe essere fissa, essendo soggetta all'attrazione di μ . Però quello descritto potrebbe essere l'approssimazione di un problema dei due corpi gravitazionale qualora $\mu \ll M$: questo ad esempio si ha nel caso del sistema formato dalla Terra puntiforme e da un satellite artificiale.

Quanto volevamo presentare è sostanzialmente terminato però vogliamo fare un ragionamento conclusivo che ci consentirà di capire il motivo principale perché nella (1.4) possiamo semplificare da ambo i membri la massa ridotta μ . Ripartiamo allora dalle equazioni 1.3 scritte per i due corpi. Teniamo di conto che per ogni corpo esistono due tipi di masse:

Definizione 1.2. La *massa inerziale* m^i di un corpo è l'inerzia che il corpo oppone all'azione di una forza. In altre parole è il coefficiente di proporzionalità tra forza applicata e accelerazione acquisita dal corpo.

Definizione 1.3. La *massa gravitazionale* m^g esprime la capacità di un corpo dotato di massa di attrarre gravitazionalmente un altro corpo.

Dunque la massa inerziale è quella che compare nel secondo principio della dinamica $\underline{F} = m^i \underline{a}$, mentre la massa gravitazionale compare nella legge della gravitazione universale

$$\underline{F} = G \frac{m_1^g m_2^g}{r^3} \underline{r}.$$

Tenendo conto di questi due diversi tipi di massa, concettualmente ben distinti tra loro, le equazioni 1.3 diventano

$$\begin{cases} m_1^i \ddot{\underline{r}}_1 = G \frac{m_1^g m_2^g}{r^3} \underline{r} \\ m_2^i \ddot{\underline{r}}_2 = -G \frac{m_1^g m_2^g}{r^3} \underline{r} \end{cases}. \quad (1.5)$$

Il *principio di equivalenza* tra massa inerziale e massa gravitazionale stabilisce che per ogni corpo di qualsiasi massa e composizione vale che

$$m^i = m^g.$$

Osservazione 1.5. Dal principio di equivalenza, ad esempio, segue la cosiddetta *universalità della caduta libera*. Indichiamo con il simbolo \oplus la Terra; per un corpo in caduta libera sulla superficie della Terra si ha

$$m^i g = \frac{GM_{\oplus}^g m^g}{R_{\oplus}^2},$$

nella quale possiamo semplificare m^i con m^g ottenendo così

$$g = \frac{GM_{\oplus}^g}{R_{\oplus}^2}.$$

Questo ci dice che l'accelerazione di caduta libera nel campo gravitazionale della terra è la stessa per tutti i corpi, indipendentemente dalla loro massa e composizione. Infatti nella formula precedente la massa non compare più.

Osservazione 1.6. Il principio di equivalenza è in realtà un'ipotesi che sta alla base sia della teoria della gravitazione di Newton che della moderna teoria della relatività generale di Einstein. La sua verifica sperimentale richiede di verificare l'universalità della caduta libera; ad oggi risulta sperimentalmente verificato al livello di una parte su 10^{13} .

Vediamo come utilizzare il principio di equivalenza per il problema dei due corpi. Le equazioni (1.5) diventano

$$\begin{cases} \ddot{\underline{r}}_1 = G \frac{m_2}{r^3} \underline{r} \\ \ddot{\underline{r}}_2 = -G \frac{m_1}{r^3} \underline{r} \end{cases},$$

e sottraendo la prima dalla seconda otteniamo $\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{G\mathbf{r}}{r^3}(m_1 + m_2)$, da cui

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM\mathbf{r}}{r^3}, \quad (1.6)$$

che è identica alla (1.4) una volta che primo e secondo membro sono stati divisi per μ , che è possibile solo in quanto le (1.4) sono state ottenute dalle (1.3), che abbiamo scritto usando un solo tipo di massa per ciascun corpo. Il che significa aver tacitamente assunto la validità del principio di equivalenza.

1.3 Passaggio in coordinate polari

Alla fine del precedente paragrafo abbiamo ottenuto l'equazione

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r},$$

la quale esprimeva il moto nel sistema di riferimento del baricentro. Allora abbiamo interpretato l'equazione precedente come l'equazione del moto di un corpo di massa μ soggetto all'attrazione gravitazionale di un altro corpo di massa M fisso nell'origine del sistema di riferimento (cioè nel baricentro). Ci proponiamo adesso di scrivere l'equazione delle orbite soluzione dell'equazione con date condizioni iniziali.

Dato che il moto avviene solo a causa di una forze centrale esso sarà piano; dunque l'equazione precedente rappresenta due equazioni nel piano dell'orbita. È naturale pensare che sia opportuno riscrivere tali equazioni in coordinate polari piane.

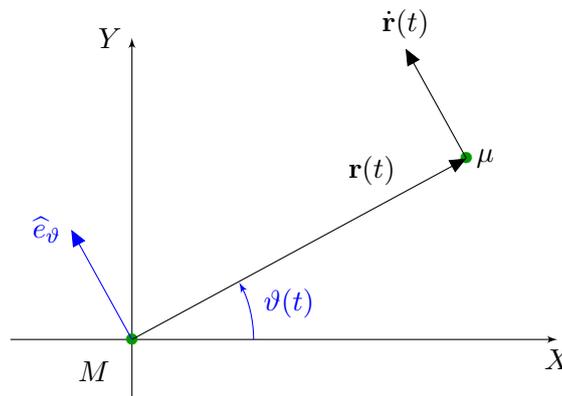


Figura 1.3: Piano dell'orbita del problema dei due corpi ridotto.

La figura 1.3 mostra il sistema di riferimento inerziale, nel piano dell'orbita, dove valgono le equazioni di moto (1.6) e dove la direzione dell'asse X è stata scelta verso una direzione fissa nel cielo.³ Pertanto il sistema inerziale in figura non è legato al particolare problema dei due corpi che stiamo studiando (con date condizioni iniziali).

Definizione 1.4. L'angolo ϑ , misurato in senso antiorario a partire dall'asse X di tale sistema, si indica come *longitudine* del corpo.

In coordinate cartesiane le equazioni di moto sono le seguenti due:

$$\begin{cases} \ddot{X} = -\frac{GM}{r^3}X \\ \ddot{Y} = -\frac{GM}{r^3}Y \end{cases}.$$

Se passiamo a coordinate polari i versore degli assi coordinati sono \hat{e}_r e \hat{e}_ϑ , che evidentemente variano nel tempo. In tale sistema di coordinate non vale la legge fondamentale della dinamica, dato che si tratta di un sistema non inerziale. Convien quindi partire dalle equazioni di moto (1.6) in forma vettoriale ed esprimere il vettore \mathbf{r} e la sua derivata seconda rispetto al tempo in coordinate polari anziché in quelle cartesiane. Intanto i due versori sono

$$\hat{e}_r = (\cos \vartheta, \sin \vartheta) \quad \text{e} \quad \hat{e}_\vartheta = (-\sin \vartheta, \cos \vartheta).$$

A differenza dei versori cartesiani \hat{e}_x e \hat{e}_y , i versori polari variano nel tempo, dunque vediamo l'andamento calcolandone la derivata temporale (ricordando che ϑ è funzione di t): per il primo abbiamo

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\vartheta}(-\sin \vartheta, \cos \vartheta) = \dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta. \quad (1.7)$$

mentre per il secondo

$$\dot{\hat{e}}_\vartheta = \dot{\vartheta}(-\cos \vartheta, -\sin \vartheta) = -\dot{\vartheta}\hat{e}_r. \quad (1.8)$$

In questo modo possiamo scrivere il raggio vettore come

$$\mathbf{r} = r\hat{e}_r, \quad \text{dove } r = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

³una possibile scelta è il punto γ , nodo ascendente dell'orbita della Terra attorno al Sole, che si muove molto lentamente a causa della precessione lunisolare, peraltro ben nota e quindi tale da poter essere tenuta in considerazione (si può fare riferimento anche al capitolo apposito).

A questo è sufficiente applicare le relazioni (1.7) e (1.8) per calcolare le derivate temporali del raggio vettore. Per la derivata prima si ha

$$\dot{\underline{\mathbf{r}}} = \dot{r}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r + r\dot{\hat{\underline{\mathbf{e}}}}_r = \dot{r}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r + r\dot{\vartheta}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_\vartheta,$$

mentre per la derivata seconda

$$\ddot{\underline{\mathbf{r}}} = \ddot{r}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r + \dot{r}\dot{\hat{\underline{\mathbf{e}}}}_r + (\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})\hat{\underline{\mathbf{e}}}_\vartheta - r\dot{\vartheta}^2\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})\hat{\underline{\mathbf{e}}}_\vartheta.$$

Per fissare le idee riassumiamo quanto visto sinora in una proposizione:

Proposizione 1.2. *Scritto il raggio vettore in coordinate polari $\underline{\mathbf{r}} = r\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r$ abbiamo*

$$\dot{\underline{\mathbf{r}}} = \dot{r}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r + r\dot{\vartheta}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_\vartheta \quad e \quad \ddot{\underline{\mathbf{r}}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})\hat{\underline{\mathbf{e}}}_\vartheta.$$

Dimostrazione. Appena prima dell'enunciato. \square

Adesso utilizziamo la proposizione precedente per scrivere le equazioni di moto (1.6) in coordinate polari piane. Otteniamo

$$(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r + (r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})\hat{\underline{\mathbf{e}}}_\vartheta = -\frac{GM}{r^2}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r,$$

e quindi, componente per componente, abbiamo

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \\ r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

La seconda equazione delle (1.9) è equivalente a chiedere che la quantità $r^2\dot{\vartheta}$ sia una costante del moto. Infatti, dato che $r > 0$, si ottiene

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\vartheta}) = 2r\dot{r}\dot{\vartheta} + r^2\ddot{\vartheta} = r(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}),$$

e quindi questa è nulla se e solo se vale la seconda delle (1.9). La grandezza $r^2\dot{\vartheta}$ ha le dimensioni di un momento angolare per unità di massa, riprendiamo quindi il momento angolare orbitale del sistema $\underline{\mathbf{J}}$ e scriviamolo per unità di massa rispetto alla massa ridotta, ossia scriviamo

$$\underline{\mathbf{j}} = \frac{\underline{\mathbf{J}}}{\mu} = \underline{\mathbf{r}} \times \dot{\underline{\mathbf{r}}}.$$

Vogliamo vedere che relazione c'è con la precedente grandezza; andiamo a calcolare il modulo di $\underline{\mathbf{j}}$ in coordinate polari. Si ha

$$\underline{\mathbf{j}} = r\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r \times (\dot{r}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r + r\dot{\vartheta}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_\vartheta) = r\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r \times r\dot{\vartheta}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_\vartheta = r^2\dot{\vartheta}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_r \times \hat{\underline{\mathbf{e}}}_\vartheta = r^2\dot{\vartheta}\hat{\underline{\mathbf{e}}}_z, \quad (1.10)$$

ossia in modulo abbiamo che $j = r^2\dot{\vartheta}$, che ovviamente deve essere costante.

Osservazione 1.7. Noi sapevamo già che \underline{j} era un integrale primo del moto (dato che la forza di Newton è centrale) e che era perpendicolare al piano dell'orbita; il calcolo precedente mostra entrambi questi fatti soltanto dalle equazioni: la (1.10) ci dice sia che il vettore è perpendicolare al piano dell'orbita in quanto è orientato come \hat{e}_z e unita all'osservazione che $r^2\dot{\vartheta}$ è costante ci dice anche che \underline{j} è un integrale primo.

La relazione $j = r^2\dot{\vartheta}$ lega univocamente – per ogni dato problema dei due corpi – le grandezze $\dot{\vartheta}$ e r^2 , quindi ci permette di eliminare $\dot{\vartheta}$ dalla prima equazione delle (1.9). Essa diventa pertanto

$$\ddot{r} = \frac{j^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2}. \quad (1.11)$$

A questo punto abbiamo ridotto il problema dei due corpi ad una sola equazione di moto nella variabile scalare $r > 0$ (essendo invece partiti dalle (1.3), che erano sei equazioni!).

1.4 Orbite e prime proprietà geometriche

Arrivati all'equazione (1.11) dobbiamo trovare l'equazione dell'orbita che la soddisfa. Un modo molto elegante per ottenerla è quello di introdurre il vettore di Lenz:

Definizione 1.5. Il *vettore di Lenz* è definito come

$$\underline{e} = \frac{1}{GM}\dot{\underline{r}} \times \underline{j} - \hat{e}_r.$$

Si tratta di un vettore adimensionale (verificare) che giace nel piano del moto e ha l'importante proprietà di essere un integrale del moto, cioè una grandezza costante nel tempo per un dato problema dei due corpi con date condizioni iniziali. Come vedremo si tratta di un integrale primo non indipendente da quelli già trovati (in particolare il momento angolare orbitale e l'energia), ma che tuttavia ha un ruolo molto importante.

Proposizione 1.3. *Il vettore di Lenz è un integrale primo del moto.*

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $\dot{\underline{e}} = \underline{0}$. Si ha $\dot{\underline{e}} = \frac{1}{GM}\ddot{\underline{r}} \times \underline{j} - \dot{\hat{e}}_r$. Per il primo addendo si utilizza l'equazione del moto (1.6), mentre per il secondo si usa la formula di derivazione (1.7); così

$$\dot{\underline{e}} = -\frac{\underline{r}}{r^3} \times \underline{j} - \dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta = -\frac{1}{r^2}\hat{e}_r \times (r^2\dot{\vartheta}\hat{e}_z) - \dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta = -\dot{\vartheta}\hat{e}_r \times \hat{e}_z - \dot{\vartheta}\hat{e}_\vartheta = 0,$$

in quanto nell'ultimo passaggio vale la relazione $\hat{e}_r \times \hat{e}_z = -\hat{e}_\vartheta$. \square

Poiché \underline{e} è un vettore che giace nel piano del moto ed è una costante del moto, ne segue che per ogni dato problema dei due corpi con date condizioni iniziali esiste una direzione fissa nel piano del moto tipica di quel dato sistema fisico. In attesa di definirne il significato fisico–geometrico, possiamo senz’altro scegliere questa direzione fissa nel piano come asse coordinato orizzontale invece dell’asse X , che tanto non aveva alcuna relazione con il problema dei due corpi che stiamo studiando (a differenza del vettore di Lenz!).

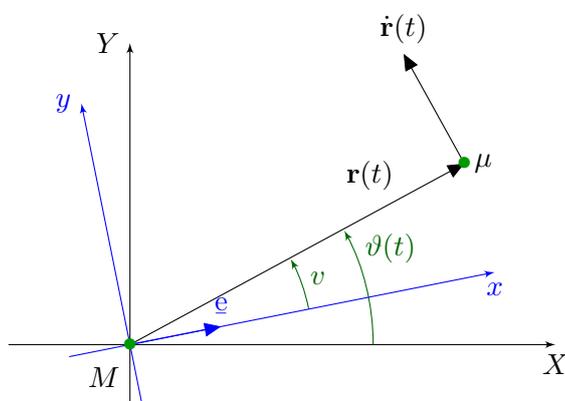


Figura 1.4: Sistema di riferimento con il vettore di Lenz.

Avremo quindi una situazione come nella figura soprastante, in cui il nuovo asse orizzontale x coincide con il vettore di Lenz \underline{e} . Nel nuovo sistema di riferimento il vettore posizione istantanea $\underline{r}(t)$ della massa ridotta μ viene espresso in coordinate polari da r e v , dove v è l’angolo misurato in senso antiorario a partire dal vettore di Lenz (ossia dall’asse x).

Definizione 1.6. L’angolo v viene chiamato *anomalia vera*.⁴

Il vettore di Lenz è fisso nel piano, dunque $\vartheta - v$ è costante, così

$$\dot{\vartheta} = \dot{v}.$$

Dunque in tutte le formule che abbiamo scritto in cui compariva il momento angolare orbitale, e quindi $\dot{\vartheta}$, possiamo usare indifferentemente \dot{v} . Questa \dot{v} altro non è che la velocità angolare istantanea del raggio vettore \underline{r} , derivata temporale della longitudine $\vartheta(t)$ o dell’anomalia vera $v(t)$.

⁴il nome “anomalia” è dovuto al fatto che v si misura a partire dal vettore di Lenz, e “vera” perché dà la posizione istantanea vera del corpo sull’orbita rispetto alla massa totale che si trova nel fuoco dell’orbita.

Osservazione 1.8. Il momento angolare \underline{J} è un integrale del moto in qualunque problema caratterizzato da una forza centrale, indipendentemente dalla sua dipendenza dalla distanza. Invece il vettore di Lenz è un integrale del moto soltanto nel caso in cui la forza centrale dipende dall'inverso del quadrato della distanza mutua, come accade nel caso della forza di attrazione gravitazionale. Infatti nel calcolo che abbiamo fatto per mostrare che \underline{e} è un integrale primo, la variabile r scompare proprio perché la forza è proporzionale a $\frac{1}{r^2}$.

Per scrivere l'equazione dell'orbita che soddisfa l'equazione del moto (1.11) dobbiamo trovare una relazione nel piano xy di figura 1.4 tra le variabili r e v , relazione che darà l'equazione dell'orbita.

Teorema 1.2. *Le soluzioni della (1.11) sono della forma*

$$r(t) = \frac{j^2/GM}{1 + e \cos v(t)}.$$

Dimostrazione. Partiamo dal prodotto scalare $\underline{e} \cdot \hat{e}_r$. Usando le definizioni e le relazioni date si ha

$$\begin{aligned} \underline{e} \cdot \hat{e}_r &= \left(\frac{1}{GM} \dot{\underline{r}} \times \underline{j} - \hat{e}_r \right) \cdot \hat{e}_r = \frac{1}{GM} \hat{e}_r \cdot (\dot{\underline{r}} \times \underline{j}) - 1 = \\ &= \frac{1}{GM} \underline{j} \cdot (\hat{e}_r \times \dot{\underline{r}}) - 1 = \frac{1}{GM} r^2 \dot{v} \hat{e}_z \cdot (\hat{e}_r \times (r \dot{\hat{e}}_r + r \dot{v} \hat{e}_\theta)) - 1 = \\ &= \frac{1}{GM} r^2 \dot{v} \hat{e}_z \cdot (r \dot{v} (\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta)) - 1 = \frac{r^3 \dot{v}^2}{GM} \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z - 1 = \\ &= \frac{r^3 \dot{v}^2}{GM} - 1 = \frac{1}{GM} \frac{j^2}{r} - 1. \end{aligned}$$

Del resto $\underline{e} \cdot \hat{e}_r = e \cos v$ e dunque uguagliando le due espressioni ottenute si ha

$$e \cos v = \frac{r^3 \dot{v}^2}{GM} - 1 = \frac{1}{GM} \frac{j^2}{r} - 1,$$

e ricavando $r(t)$ abbiamo concluso. \square

Osserviamo che $\frac{j}{GM} > 0$ e $e \geq 0$ sono costanti del moto. Quella ottenuta è l'equazione dell'orbita soluzione dell'equazione di moto (1.11) scritta in coordinate polari piane r e v : r è la distanza relativa della massa ridotta rispetto alla massa totale posta nell'origine (è anche la distanza relativa tra le due masse m_1 e m_2), mentre v è l'anomalia vera.

Quella ottenuta è l'equazione di una conica in coordinate polari. La grandezza $\frac{j^2}{GM} > 0$ è una lunghezza e viene storicamente indicata come p ,

fra poco spiegheremo meglio questo nome; intanto l'equazione dell'orbita si scrive anche come

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

vediamo di portarla in equazioni cartesiane. Dato che $r \cos v = x$ e $r \sin v = y$, l'equazione si può scrivere come $r = p - ex$, e dunque

$$x^2 + y^2 = r^2 = (p - ex)^2$$

che è chiaramente l'equazione di una conica nel piano Oxy . L'asse di simmetria della conica è l'asse x (che coincide con l'asse contenente il vettore di Lenz), mentre l'origine degli assi è sempre un fuoco della conica (questo sarà chiaro nella trattazione successiva più dettagliata); se la conica è a centro, il centro è spostato sull'asse x dall'origine dato che la variabile x compare anche alla prima potenza oltre che al quadrato. A questo punto è chiaro che la grandezza p è il *semilato retto* della conica, dato che rappresenta la distanza della massa ridotta dalla massa totale quando $v = \frac{\pi}{2}$, cioè ad angolo retto rispetto al vettore di Lenz e quindi quando la massa ridotta si trova sopra il fuoco della conica.

Per continuare a studiare le prime proprietà geometriche delle soluzioni vogliamo vedere adesso quanto vale l'eccentricità dell'orbita. Il semilato retto della conica p è già stato definito; la dimensione della conica lungo la linea del vettore di Lenz, cioè l'asse x , è l'*asse maggiore* della conica, e si può calcolare come

$$2a = r|_{v=0} + r|_{v=\pi} = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2},$$

ossia

$$p = a(1 - e^2) \tag{1.12}$$

se $e \neq 1$.⁵ Abbiamo espresso il semilato retto in funzione del semiasse maggiore della conica, pertanto l'eccentricità dell'orbita è esattamente e .

Osservazione 1.9. Usando la definizione di p e quanto appena detto abbiamo

$$j^2 = GM \cdot p = GMa(1 - e^2),$$

che esprime il modulo del momento angolare orbitale (per unità di massa) in funzione delle caratteristiche geometriche dell'orbita: esso infatti dipende dal semiasse maggiore a e dall'eccentricità e .

Ancora, vogliamo individuare il punto dell'orbita in cui la distanza dal fuoco, cioè da M , è minima:

⁵infatti se $e = 1$ non possiamo fare le semplificazioni scritte, ed anzi a è infinito.

Definizione 1.7. Definiamo *pericentro* il punto dell'orbita di minima distanza da M . Definiamo *apocentro* il punto di massima distanza da M .

Ottenere il pericentro dell'orbita è semplice, basterà vedere che valore minimo assume r . Per questo è sufficiente che il denominatore sia il più grande possibile, e ciò si ha per $v = 0$, istante nel quale r vale

$$r_{\min} = r|_{v=0} = \frac{p}{1+e}.$$

Notiamo che se $e > 0$ il pericentro esiste sempre indipendentemente dal tipo di orbita (ossia dal tipo di conica) che si ottiene. Se $e \neq 1$ possiamo utilizzare la (1.12) e scrivere

$$r_{\min} = \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a(1-e).$$

Osservazione 1.10. Osserviamo che se $e = 0$ allora $r = p = a$ e il pericentro non è ben definito. Infatti l'unica conica che ha eccentricità nulla è una circonferenza, tutti i punti sono a distanza fissa dal fuoco (che ne è il centro) e pertanto tutti i punti sarebbero possibili pericentri. In tal caso si preferisce dire che questo punto non è definito.

1.5 Classificazione delle orbite

Una volta determinata l'equazione dell'orbita

$$r = \frac{p}{1+e \cos v}$$

e una volta scritte alcune relazioni di base tra i parametri che compaiono vogliamo dare una classificazione completa delle orbite che l'equazione precedente descrive. Tale classificazione è basata sui valori di e .

- Se $e = 0$ abbiamo osservato alla fine del precedente paragrafo che la traiettoria è una *circonferenza* di raggio

$$r = a = p = \frac{j^2}{GM},$$

pertanto il pericentro non è definito.

- Supponiamo adesso $0 < e < 1$. In questo caso è facile verificare che oltre alla distanza minima r_{\min} di pericentro abbiamo anche una distanza massima

$$r_{\max} = r|_{v=\pi} = \frac{p}{1-e} = a(1+e).$$

L'orbita in questo caso è un'ellisse che ha semiasse maggiore pari a

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{j^2}{GM(1 - e^2)}$$

e semiasse minore $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Come già osservato in generale, l'asse x è asse di simmetria per l'ellisse, e uno dei suoi due fuochi si trova nell'origine.

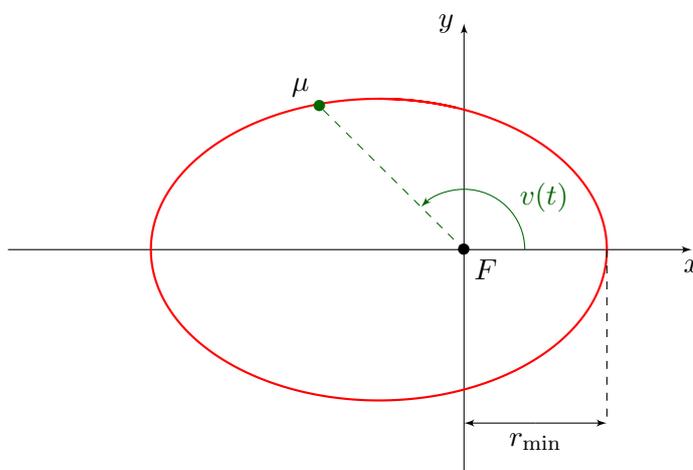


Figura 1.5: Traiettoria ellittica.

- Se $e = 1$ abbiamo già osservato che a è infinito. Questo informalmente ci dice che la conica si è “aperta” e che non c'è più una distanza massima, ossia l'apocentro non è definito. Sostituendo $e = 1$ nell'equazione della conica otteniamo

$$y^2 = p^2 - 2px,$$

che è l'equazione di una parabola di parametro p . Al solito l'asse x è asse di simmetria e il fuoco della parabola si trova nell'origine degli assi. La distanza di pericentro in questo caso non si può calcolare con la formula $a(1 - e)$, bensì dobbiamo tornare alla più generale formula $r_{\min} = r|_{v=0} = \frac{p}{1+e}$; dunque la distanza del pericentro è

$$r|_{\min} = \frac{p}{2}.$$

La figura seguente mostra quello che accade in questo caso:

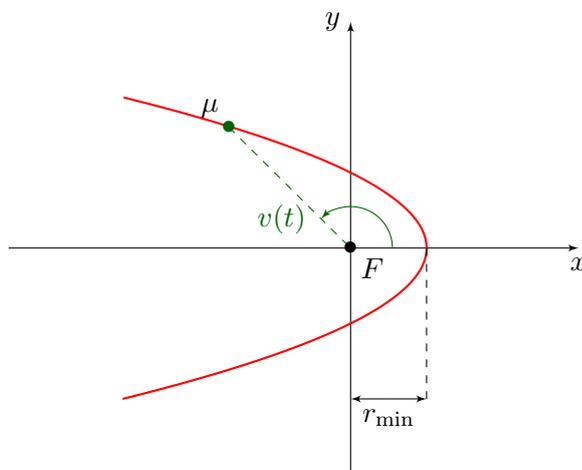


Figura 1.6: Traiettoria parabolica.

- L'ultimo caso da prendere in considerazione è quello con $e > 1$. Con questa ipotesi, considerando che $p = \frac{j^2}{GM} > 0$, otteniamo che a è negativo. La conica è dunque un'iperbole e dunque anche in questo caso l'apocentro non è definito, mentre il pericentro è dato dalla formula $r_{\min} = \frac{p}{1+e}$ che ora è valida.

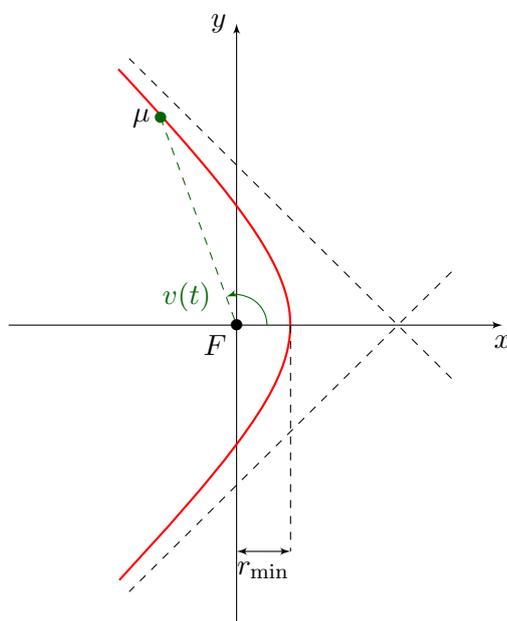


Figura 1.7: Traiettoria iperbolica.

L'iperbole ha due asintoti e vorremmo calcolare l'angolo che essi formano con l'asse x . Prendendo l'equazione della conica scritta come $1 + e \cos v = \frac{p}{r}$ abbiamo che l'anomalia v_{as} si ottiene quando r è infinito, dunque

$$\cos v_{as} = -\frac{1}{e}.$$

Tiriamo adesso le somme. Le soluzioni del problema dei due corpi puntiformi m_1 e m_2 in interazione gravitazionale sono moti relativi su coniche di equazione

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v},$$

dove i parametri p ed e sono completamente determinati dalle condizioni iniziali $\mathbf{r}(0)$ e $\dot{\mathbf{r}}(0)$; infatti

$$p = \frac{j^2}{G(m_1 + m_2)} \quad \text{e} \quad e = \left| \frac{1}{G(m_1 + m_2)} \dot{\mathbf{r}}(0) \times \underline{\mathbf{j}} - \underline{\mathbf{e}}_r(0) \right|$$

e va ricordato che $\underline{\mathbf{j}} = \mathbf{r}(0) \times \dot{\mathbf{r}}(0)$. La direzione $\underline{\mathbf{e}}$ fornisce l'asse di simmetria (asse maggiore) della conica, con l'unica eccezione che si ha per $\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{0}}$, quando la conica è una circonferenza; l'anomalia vera v è l'angolo misurato a partire da $\underline{\mathbf{e}}$ in senso antiorario. Diciamo qualcosa sulla velocità angolare $\dot{\vartheta}$ su ogni punto della conica: ricordando la (1.10) abbiamo

$$\dot{\vartheta} = \frac{\dot{j}}{r^2} = \frac{j}{p^2} (1 + e \cos v)^2.$$

Osservazione 1.11. Dall'orbita della massa ridotta μ è facile ricostruire le orbite delle masse m_1 e m_2 rispetto al loro comune centro di massa \mathbf{R} . Basta ricordare che se l'origine è in \mathbf{R} , allora m_1 e m_2 sono sempre allineati con l'origine, da parti opposte rispetto a essa e con velocità antiparallele (dato che le quantità di moto dei due corpi sono uguali in modulo e opposte).

1.6 Velocità lineare e integrale dell'energia

Abbiamo già avuto modo di osservare all'inizio che, visto che il sistema è isolato, l'energia totale del sistema si conserva; questa energia è

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu v^2 - \frac{GM\mu}{r},$$

dove $v^2 = \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2$, con \mathbf{r} posizione relativa tra i due corpi. Come abbiamo fatto sinora consideriamo invece l'energia totale per unità di massa ridotta, ossia

$$E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{GM}{r}.$$

Abbiamo visto negli scorsi paragrafi che il vettore di Lenz \underline{e} è un integrale primo del moto, che però è “in più” rispetto ai sei trovati nel primo paragrafo. Dunque dovranno sussistere delle relazioni di dipendenza tra il vettore di Lenz, il momento angolare per unità di massa \underline{j} e l’energia per unità di massa E . Quella con \underline{j} è immediata: il moto dei due corpi si svolge nel piano ortogonale a \underline{j} , e \underline{e} sta in questo piano, dunque $\underline{j} \cdot \underline{e} = 0$. Vediamo adesso la relazione del vettore di Lenz con l’energia:

Proposizione 1.4. *Si ha*

$$e^2 = 1 + \frac{2Ej^2}{G^2M^2}.$$

Dimostrazione. Il vettore di Lenz è $\underline{e} = \frac{1}{GM}\dot{\underline{i}} \times \underline{j} - \hat{\underline{e}}_r$, dunque prima di calcolarne il modulo vogliamo svilupparlo. Dalla proposizione 1.2 si ha

$$\dot{\underline{i}} = \dot{r}\hat{\underline{e}}_r + r\dot{\vartheta}\hat{\underline{e}}_\vartheta,$$

mentre il momento angolare orbitale è $\underline{j} = r^2\dot{\vartheta}\hat{\underline{e}}_z$. Calcoliamo il loro prodotto vettore ricordando che $\hat{\underline{e}}_r$, $\hat{\underline{e}}_\vartheta$ e $\hat{\underline{e}}_z$ sono una terna ortonormale destrorsa. Si ha

$$\dot{\underline{i}} \times \underline{j} = -r^2\dot{\vartheta}\dot{r}\hat{\underline{e}}_\vartheta + r^3\dot{\vartheta}^2\hat{\underline{e}}_r.$$

Così

$$\begin{aligned} e^2 &= \left[\frac{1}{GM} \left(r^3\dot{\vartheta}^2\hat{\underline{e}}_r - r^2\dot{\vartheta}\dot{r}\hat{\underline{e}}_\vartheta \right) - \hat{\underline{e}}_r \right] \cdot \left[\frac{1}{GM} \left(r^3\dot{\vartheta}^2\hat{\underline{e}}_r - r^2\dot{\vartheta}\dot{r}\hat{\underline{e}}_\vartheta \right) - \hat{\underline{e}}_r \right] = \\ &= \frac{1}{G^2M^2} \left(r^6\dot{\vartheta}^4 + r^4\dot{r}^2\dot{\vartheta}^2 \right) - \frac{2}{GM} r^3\dot{\vartheta}^2 + 1 = \\ &= 1 + \frac{r^4}{G^2M^2} \frac{j^2}{r^4} \left(r^3\dot{\vartheta}^2 + \dot{r}^2 \right) - \frac{2}{GM} r^3 \frac{j^2}{r^4} = \\ &= 1 + \frac{j^2}{G^2M^2} v^2 - \frac{2j^2}{GMr} = 1 + \frac{2j^2}{G^2M^2} \left(\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} \right), \end{aligned}$$

che è la tesi. \square

La proposizione precedente lega momento angolare (per unità di massa ridotta) con l’eccentricità dell’orbita. D’altro canto dall’osservazione 1.9 sappiamo che $j^2 = GMa(1 - e^2)$, così

$$E = -\frac{GM}{2a}. \quad (1.13)$$

L’equazione appena scritta dice che l’energia totale fissa uno degli elementi orbitali, ossia il semiasse maggiore.

L'osservazione 1.9 e la precedente equazione dicono che fissati E e j risultano determinati due elementi orbitali, ossia l'eccentricità e il semiasse maggiore. Ancora, sostituendo la (1.13) nell'espressione dell'energia E si ottiene

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right); \quad (1.14)$$

fissata E , e quindi a , la velocità lineare per ogni r è data dall'espressione precedente. Dunque la classificazione delle orbite rispetto a E è presto fatta:

- per $E > 0$ si hanno orbite iperboliche, infatti $a < 0$ e $e > 1$;
- per $E = 0$ si hanno orbite paraboliche, infatti a è infinito e $e = 1$;
- per $E < 0$ si hanno orbite ellittiche (eventualmente circolari), infatti $a > 0$ e $0 \leq e < 1$.

Un altro modo ancora per vedere la classificazione delle orbite è quello di usare l'equazione $\dot{\vartheta} = \frac{j}{r^2}$ per eliminare $\dot{\vartheta}$ dall'espressione dell'energia e ridurre il problema al caso unidimensionale con variabili r e \dot{r} . Si ha

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) - \frac{GM}{r} = \\ &= \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \left(\frac{j^2}{2r^2} - \frac{GM}{r} \right) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = E(r, \dot{r}), \end{aligned}$$

dove $V(r) = \frac{j^2}{2r^2} - \frac{GM}{r}$ è il nuovo potenziale del problema ridotto al caso unidimensionale (si chiama anche *potenziale effettivo*). L'andamento di questo potenziale è mostrato sotto:

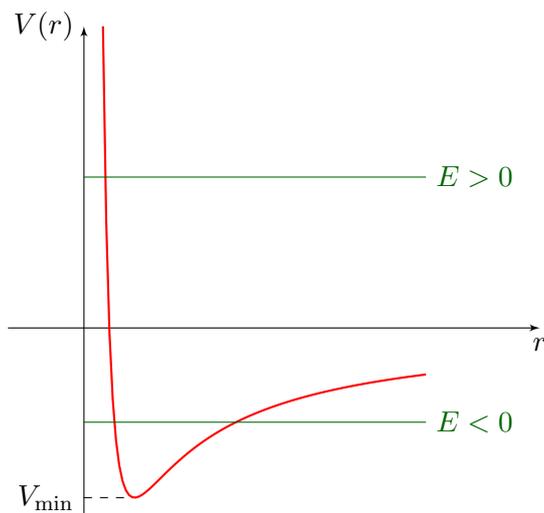


Figura 1.8: Grafico del potenziale effettivo.

Continua ovviamente a valere la classificazione delle orbite effettuata poco fa grazie all'energia E , e questa stessa classificazione la ritroviamo esaminando le curve di livello della funzione energia $E(r, \dot{r})$ grazie al grafico precedente. Soffermiamoci ora sul caso a energia E negativa: fissati j (momento angolare per unità di massa ridotta), si possono avere orbite limitate purché $0 > E \geq V_{\min}$. In particolare, il minimo valore possibile di E , ossia $V_{\min} = -\frac{1}{2} \frac{G^2 M^2}{r^2}$, corrisponde all'orbita circolare con quel j . I casi $E = 0$ e $E < 0$ danno entrambi orbite non limitate, parabole ed iperboli rispettivamente. Un'importante differenza tra i due casi è il valore della velocità all'infinito. In generale, grazie alla (1.14), la velocità all'infinito è

$$v_{\infty}^2 = -\frac{GM}{a} = 2E,$$

quindi $v_{\infty} = 0$ per l'orbita parabolica, mentre $v_{\infty}^2 > 0$ per l'orbita iperbolica.

1.7 Le tre leggi di Keplero

Le leggi di Keplero sono leggi empiriche ottenute osservando il moto dei pianeti attorno al Sole. Le prime due vennero pubblicate dall'omonimo astronomo negli anni 1608–1609, mentre la terza nel 1619. Diamo adesso una loro formulazione discorsiva:

1. le orbite dei pianeti sono ellissi di cui il Sole occupa uno dei fuochi;
2. i raggi vettori dei pianeti spazzano aree proporzionali ai tempi;
3. i quadrati dei periodi dei pianeti nel moto attorno al Sole sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle rispettive orbite.

In effetti la prima legge l'abbiamo già mostrata: essendo i pianeti gravitazionalmente legati al Sole (ossia $E < 0$) abbiamo visto nei precedenti paragrafi che questo è proprio il caso in cui le traiettorie risultano ellissi. Per quanto riguarda la seconda legge essa è banale conseguenza della conservazione del momento angolare per unità di massa j , vediamo perché:

Teorema 1.3 (prima e seconda legge di Keplero). *Le orbite dei pianeti sono ellissi e il moto dei pianeti avviene a velocità areolare costante.*

Dimostrazione. La dimostrazione della prima legge è già stata data prima dell'enunciato. Per la seconda legge non serve l'ipotesi $E < 0$ in quanto la proprietà espressa vale per qualunque moto in campo centrale. Ricordiamo che a conseguenza delle (1.9) avevamo mostrato che $j = r^2 \dot{\vartheta} = r^2 \dot{v}$; procediamo ricavando l'espressione per la velocità areolare del moto. L'area della

regione D spazzata dal raggio vettore da un tempo t_0 a un tempo t è data da

$$A(t) = \iint_D r \, dr \, d\vartheta = \int_{\vartheta(t_0)}^{\vartheta(t)} \int_0^{r(\vartheta)} r \, dr \, d\vartheta = \int_{\vartheta(t_0)}^{\vartheta(t)} \frac{1}{2} r^2(\vartheta) \, d\vartheta$$

e dunque la velocità areolare è $\dot{A}(t) = \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta} = \frac{1}{2} j$. Così dal fatto che j è costante otteniamo che la velocità areolare è costante. \square

Inoltre possiamo notare che la conica soluzione dell'equazione di moto viene percorsa con verso costante in quanto $\dot{\vartheta}$ ha lo stesso segno di j e perciò è fissato dalle condizioni iniziali.

Osservazione 1.12. Potevamo anche procedere come segue. L'equazione della traiettoria è

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}$$

con $p = \frac{j^2}{GM} = a(1 - e^2)$. Se conosciamo $v(t)$ conosciamo anche il modo in cui l'orbita viene percorsa e quindi potremmo ricavare la velocità areolare. Per determinare v basta ricordare sempre l'espressione $j = r^2 \dot{v}$ e così l'equazione della traiettoria diventa

$$\dot{v} = \frac{j(1 + e \cos v)^2}{p^2},$$

e poi potremmo integrare la precedente equazione per ottenere v . La soluzione messa in atto nel teorema è senza dubbio più rapida.

Naturalmente se $0 \leq e < 1$ il moto è periodico. Infatti quando il corpo ripassa dallo stesso punto dell'orbita dopo un giro (e quindi \mathbf{r} è lo stesso) allora anche la velocità è la stessa, poiché $\mathbf{j} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$ è un integrale primo del moto e se \mathbf{r} è lo stesso dopo un giro anche $\dot{\mathbf{r}}$ deve essere lo stesso. Per mostrare la terza legge di Keplero dobbiamo dunque calcolare il periodo di questo moto:

Teorema 1.4. *Nel caso di orbite ellittiche il periodo del moto P soddisfa*

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3.$$

Dimostrazione. Visto che il moto avviene a velocità areolare costante avremo che il periodo P sarà il rapporto tra l'area dell'ellisse e la velocità areolare. Dunque usando anche l'osservazione 1.9 nel terzo passaggio si ha

$$P^2 = \left(\frac{\pi ab}{\dot{A}} \right)^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{j^2} = \frac{4\pi^2 a^3 (1 - e^2)}{GM a (1 - e^2)} = \frac{4\pi^2}{GM} a^3,$$

e abbiamo concluso. \square

Nel precedente teorema non abbiamo scritto “terza legge di Keplero” e adesso spieghiamo il perché. La relazione precedente mostra che P^2 e a^3 sono proporzionali a parità di $M = m_1 + m_2$. Nel caso del sistema solare, dominato dalla massa del Sole, la somma $m_1 + m_2$ è approssimabile alla massa del Sole m_\odot : tale approssimazione è giustificata in quanto è dello 0,1% nel caso più sfavorevole del pianeta Giove. Dunque il rapporto

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

è in effetti costante e pari a $\frac{4\pi^2}{Gm_\odot} \simeq 2.97 \cdot 10^{-19} \text{ s}^2\text{m}^{-3}$.

Osservazione 1.13. Sapendo che la massa del Sole è circa $m_\odot = 1.991 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ e che $G = 6.668 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$. Con un periodo di 365.256365 giorni (ossia l’anno siderale terrestre) si ottiene

$$a = 1.4962 \times 10^{11} \text{ m},$$

che prende il nome di *unità astronomica* (U.A.) e che corrisponde al semiasse maggiore dell’orbita di un punto materiale di massa infinitesima in moto attorno al Sole con periodo siderale uguale a quello terrestre.

1.8 L’equazione di Keplero

In questo paragrafo ricaveremo l’equazione di Keplero, che vedremo essere importante per la determinazione dell’anomalia vera. Introduciamo la velocità angolare media

$$n = \frac{2\pi}{P},$$

che viene solitamente chiamata *moto medio*. Unendo questa definizione con l’equazione della terza legge di Keplero si ottiene

$$n = \frac{(-2E)^{\frac{3}{2}}}{GM},$$

ossia l’integrale dell’energia fissa il moto medio con cui viene percorsa l’orbita. Inoltre n permette di definire una variabile angolo l nel modo seguente:

Definizione 1.8. L’anomalia media l è l’angolo che percorrerebbe un corpo che si muove sulla traiettoria con velocità angolare costante e pari a n , misurato in verso antiorario a partire dal vettore di Lenz.

Volendo parafrasare quanto detto, se al tempo iniziale $t = t_P$ il corpo passa al pericentro (ossia $v(t_P) = 0$), al tempo $t - t_P$ con $t > t_P$ esso avrebbe percorso un angolo

$$l = n(t - t_P).$$

Notiamo che se l'orbita fosse circolare allora $\dot{v}(t) = n$ con n costante per ogni t : dunque nel caso di orbita circolare (ossia $e = 0$) l'anomalia vera v e l'anomalia media l coincidono. In generale, se $e \neq 0$ le due variabili angolo sono diverse.

Ciò che condurrà all'equazione di Keplero sarà cercare la relazione tra l e v che, unita a $l = n(t - t_P)$ fornirà $v(t)$. Per determinare questa relazione dobbiamo definire un'altra variabile angolo intermedia:

Definizione 1.9. È data un'orbita ellittica con centro C e semiasse maggiore a , e sia P un punto che si muove su questa orbita; sia Q il punto che ha la stessa ascissa di P e che appartiene alla circonferenza di raggio a concentrica all'orbita. Definiamo *anomalia eccentrica* l'angolo u con vertice in C e misurato in senso antiorario tra il vettore di Lenz e la congiungente CQ .

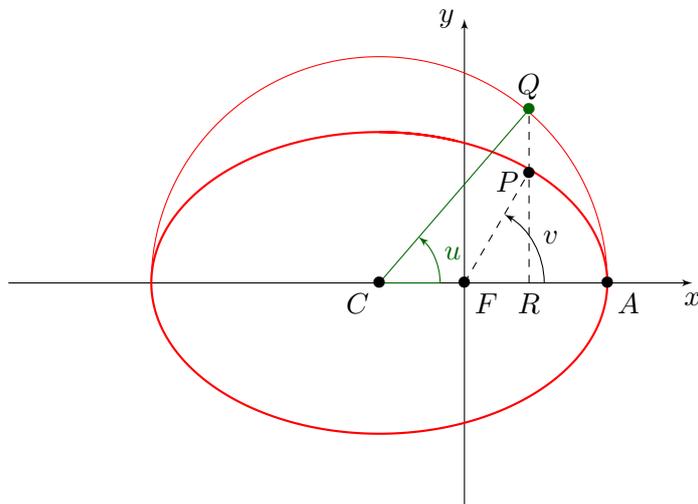


Figura 1.9: Definizione dell'anomalia eccentrica.

Il disegno precedente chiarisce la costruzione dell'anomalia eccentrica riportata nella definizione. È evidente che anomalia vera e anomalia eccentrica coincidono solo quando una delle due (e quindi anche l'altra) è un multiplo di π .

La relazione generale tra u e v è facilmente ricavabile in modo geometrico ed è espressa dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} r \cos v = a \cos u - ae \\ r \sin v = a\sqrt{1-e^2} \sin u \end{cases}, \quad (1.15)$$

ovvero

$$r = a(1 - e \cos u), \quad \cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \quad \text{e} \quad \sin v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin u}{1 - e \cos u}.$$

Da notare che la prima delle precedenti equazioni non è altro che l'equazione dell'orbita nelle variabili r e u . Dalle equazioni precedenti possiamo anche ricavare la velocità \dot{u} . Uguagliando l'equazione dell'orbita con l'anomalia vera e quella appena data che invece contiene l'anomalia eccentrica si ha

$$(1 - e \cos u)(1 + e \cos v) = \frac{p}{a} = 1 - e^2,$$

e derivando rispetto al tempo si ottiene

$$\dot{u} = \dot{v} \frac{\sin v}{\sin u} \frac{1 - e \cos u}{1 + e \cos v}.$$

Utilizzando ora

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \frac{j}{r^2} = \frac{j}{a^2(1 - e \cos u)^2} \\ 1 + e \cos v &= \frac{a(1 - e^2)}{r} = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos u} \\ \sin v &= \frac{a}{r} \sqrt{1 - e^2} \sin u = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u} \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{j}{a^2(1 - e \cos u)^2} \cdot \frac{1}{\sin u} \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u} \frac{(1 - e \cos u)^2}{1 - e^2} = \\ &= \frac{j}{ar\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\sqrt{GMa(1 - e^2)}}{ar\sqrt{1 - e^2}} = \frac{\sqrt{GM} a}{a^{\frac{3}{2}} r} = n \frac{a}{r}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Questo calcolo per la velocità \dot{u} , ossia della rapidità di variazione dell'anomalia eccentrica ci sarà utile in seguito.

Diamo adesso l'equazione di Keplero: gli ingredienti fondamentali che useremo sono la seconda legge di Keplero e alcune semplici considerazioni geometriche.

Teorema 1.5 (equazione di Keplero). *Si ha*

$$l = u - e \sin u.$$

Dimostrazione. La legge delle aree ci dice che il rapporto tra l'area del settore FPA e l'area dell'ellisse è $\frac{t-t_P}{P}$, ossia

$$A(FPA) = \pi ab \frac{t-t_P}{P} = \frac{\pi abl}{nP} = \frac{1}{2}abl = \frac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}l = \frac{1}{2}a^2\varepsilon l,$$

dove abbiamo posto $\varepsilon = \sqrt{1-e^2}$ per comodità. D'altro canto

$$A(FPA) = A(FPR) + A(RPA) = A(FPR) + \varepsilon A(QRA);$$

infatti $A(RPA) = \sqrt{1-e^2}A(QRA)$ per la relazione di affinità tra il cerchio e l'ellisse.⁶ Così

$$\begin{aligned} A(FPA) &= A(FPR) + \varepsilon A(QRA) = \\ &= A(FPR) + \varepsilon [A(QCA) - A(QCR)] = \\ &= \frac{1}{2}r^2 \cos v \sin v + \varepsilon \left(\frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}a^2 \cos u \sin u \right) = \\ &= \frac{1}{2}r \cos v \cdot r \sin v + \varepsilon \left(\frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}a^2 \cos u \sin u \right) = \\ &= \frac{1}{2}a^2(\cos u - e)\varepsilon \sin u + \varepsilon \left(\frac{1}{2}a^2u - \frac{1}{2}a^2 \cos u \sin u \right) = \\ &= -\frac{1}{2}a^2e\varepsilon \sin u + \frac{1}{2}a^2u\varepsilon = \frac{1}{2}a^2\varepsilon(u - e \sin u), \end{aligned}$$

e questo conclude. \square

Ricordando ora che $l = n(t - t_P)$ otteniamo l'equazione

$$n(t - t_P) = l = u - e \sin u.$$

L'equazione di Keplero dà l'anomalia media in funzione dell'anomalia eccentrica, ma per $e > 0$ non ha soluzione analitica esplicita.

Utilizzando la relazione $r = a(1 - e \cos u)$ vogliamo ricavare l'anomalia eccentrica all'istante iniziale. Intanto varrà

$$\cos u(0) = \frac{1}{e} \left(1 - \frac{r(0)}{a} \right). \quad (1.17)$$

Dato che vogliamo calcolare $u(0)$, dobbiamo decidere in che quadrante esso si trova (dato che conosciamo solo il suo coseno) e per farlo calcoliamo $\sin u(0)$.

⁶basta integrare l'area per strisce orizzontali.

Deriviamo la relazione $r = a(1 - e \cos u)$ e si ha $\dot{r} = ae\dot{u} \sin u$, da cui grazie alla (1.16) si ha

$$\sin u(0) = \frac{r(0)\dot{r}(0)}{aen}, \quad (1.18)$$

e in questo modo $u(0)$ è univocamente determinato. Grazie a $u(0)$ e all'equazione di Keplero possiamo calcolare l'anomalia media all'istante iniziale:

$$l(0) = n(0 - t_P) = u(0) - e \sin u(0),$$

da cui si ha anche il tempo di passaggio dal pericentro

$$t_P = -\frac{l(0)}{n}.$$

Adesso un'ultima applicazione dell'equazione di Keplero: grazie all'anomalia eccentrica vogliamo calcolare le coordinate cartesiane della massa ridotta in moto attorno all'origine ad un tempo $t_1 > 0$. L'anomalia media è subito calcolabile da $l(t_1) = n(t_1 - t_P)$; per l'equazione di Keplero, invece, intanto possiamo scrivere

$$l(t_1) = u(t_1) - e \sin u(t_1).$$

Da questa vorremmo ricavare $u(t_1)$, ma abbiamo già osservato che l'equazione precedente non sempre ammette soluzione analitica esplicita; la soluzione, in ogni caso, può essere determinata con metodi di approssimazione (come il metodo della tangenti di Newton). Determinate $u(t_1)$ si ha semplicemente

$$\begin{cases} x(t_1) = a \cos u(t_1) - ae \\ y(t_1) = a\sqrt{1 - e^2} \sin u(t_1) \end{cases},$$

con $r(t_1) = \sqrt{x(t_1)^2 + y(t_1)^2}$. Per quanto riguarda le velocità è molto semplice: basta prendere le (1.15), derivarle e sostituire $\dot{u}(t_1) = n\frac{a}{r(t_1)}$; quello che si ottiene è

$$\begin{cases} \dot{x}(t_1) = -a\dot{u}(t_1) \sin u(t_1) \\ \dot{y}(t_1) = a\sqrt{1 - e^2}\dot{u}(t_1) \cos u(t_1) \end{cases}.$$

È da notare però che in questo modo abbiamo determinato posizione e velocità per tempo $t_1 > 0$ nel riferimento in cui il piano Oxy coincide con il piano orbitale e l'asse x con la direzione del pericentro (ossia del vettore di Lenz). Per avere posizioni e velocità nel riferimento iniziale da cui siamo partiti dovremo eseguire una traslazione (corrispondente al moto uniforme del centro di massa) e poi una rotazione corrispondente all'orientazione dell'orbita nello spazio. Nel prossimo paragrafo discuteremo appunto l'orientazione dell'orbita nello spazio e finiremo di risolvere il problema dei due corpi.

1.9 L'orbita nello spazio

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale $Oxyz$ nella cui origine immaginiamo sia concentrata tutta la massa $m_1 + m_2$ e mettiamoci nel caso in cui $e < 1$, ossia nel caso in cui l'orbita è ellittica. Nella figura che segue sono mostrati i principali elementi orbitali:

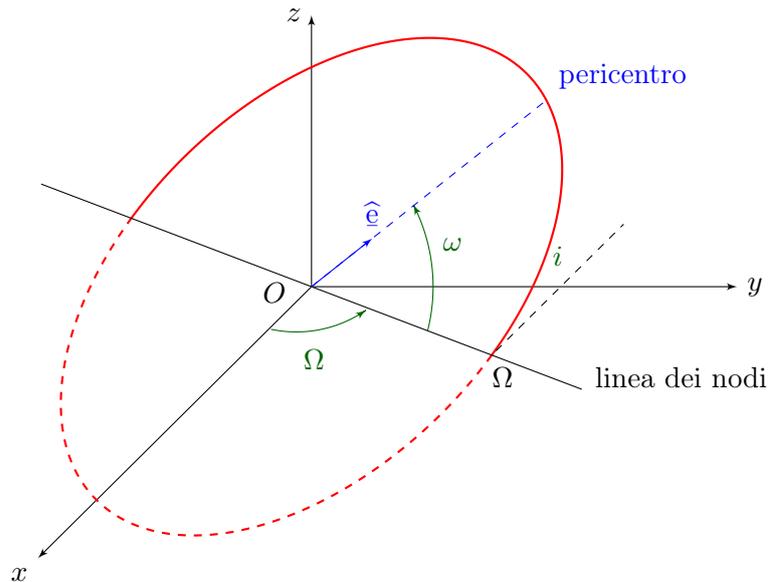


Figura 1.10: Orbita nello spazio.

Il piano orbitale è il piano individuato dal vettore di Lenz \hat{e} e dal raggio vettore della massa ridotta μ , purché non sia preso al pericentro o all'apocentro, nel qual caso si usa il vettore velocità.

Definizione 1.10. La linea di intersezione tra il piano orbitale e il piano Oxy è detta *linea dei nodi*. L'orbita incontra il piano Oxy in due punti della linea dei nodi: il *nodo ascendente* Ω e il *nodo discendente*.

Quello che caratterizza il nodo ascendente è il fatto che la massa ridotta passa da quel punto dal basso verso l'alto. L'angolo della linea $O\Omega$ con l'asse x è detto *longitudine del nodo ascendente*, denotata ancora con Ω e con $0 \leq \Omega \leq 2\pi$.

Definizione 1.11. L'angolo diedro tra il piano dell'orbita e il piano Oxy è detto *inclinazione* ed è denotato con i , dove $0 \leq i \leq \pi$.

Dati i e Ω è fissato il piano orbitale, ma se l'orbita non è circolare bisogna ancora fissarne l'orientazione, e cioè il pericentro. L'angolo ω (*argomento del pericentro*) è l'angolo del vettore di Lenz rispetto alla linea dei nodi $O\Omega$, con $0 \leq \omega < 2\pi$.

Sappiamo già che a ed e danno le dimensioni dell'orbita; se viene dato anche t_P , il tempo di passaggio al pericentro, i sei elementi a , e , i , ω , Ω e t_P individuano il moto di μ per qualunque tempo e sono del tutto equivalenti alle sei condizioni iniziali (posizioni e velocità in coordinate cartesiane). Per avere Ω e ω a partire dalle condizioni iniziali è sufficiente costruire il versore del nodo ascendente, ossia

$$\widehat{\Omega} = \frac{\widehat{\mathbf{x}} \times \widehat{\mathbf{j}}}{|\widehat{\mathbf{x}} \times \widehat{\mathbf{j}}|}, \quad (1.19)$$

da cui $\cos \Omega = \widehat{\Omega} \cdot \widehat{\mathbf{x}}$ e $\cos \omega = \widehat{\Omega} \cdot \widehat{\mathbf{e}}$.

Definizione 1.12. I sei elementi a , e , i , ω , Ω e t_P si chiamano *elementi kepleriani*.

Osservazione 1.14. I sei parametri appena introdotti valgono anche per orbite iperboliche e paraboliche (in quest'ultimo caso con p al posto di a). Per orbite circolari ω non ha senso; per orbite con $i = 0$ o $i = \pi$ invece Ω non ha senso. Per questo, nel caso di piccole inclinazioni si preferisce usare l'angolo $\Omega + \omega$ (longitudine del pericentro), che per $i \rightarrow 0, \pi$ tende all'angolo del versore $\widehat{\mathbf{e}}$ con l'asse delle x nel piano Oxy visto da $\widehat{\mathbf{j}}$.

Ricapitoliamo adesso come dalle condizioni iniziali $\mathbf{r}(t)$ e $\dot{\mathbf{r}}(t)$ si ricavano gli elementi kepleriani nel caso $e < 1$:

1. si calcolano gli integrali primi $\widehat{\mathbf{j}}$, $\widehat{\mathbf{e}}$ ed E , da cui poi si possono determinare a ed e (e di conseguenza anche n e p);
2. si calcola $u(0)$ tramite (1.17) e (1.18), e quindi grazie all'equazione di Keplero si determina t_P , tempo di passaggio al pericentro;
3. si calcolano i seguenti angoli: l'inclinazione i , angolo tra $\widehat{\mathbf{j}}$ e Ox visto da $\widehat{\Omega}$ (quest'ultimo con la (1.19)), la longitudine del nodo ascendente Ω , angolo tra $\widehat{\Omega}$ e Ox visto da Ox , e infine l'argomento del pericentro ω , angolo tra $\widehat{\mathbf{e}}$ e $\widehat{\Omega}$ visto da $\widehat{\mathbf{j}}$.

Adesso vogliamo capire come si passa dal riferimento iniziale $Oxyz$ a quello orbitale; nei paragrafi iniziali abbiamo anche utilizzato un sistema di riferimento intermedio, ricordiamoli tutti:

- il sistema di riferimento iniziale $Oxyz$;
- il sistema di riferimento del centro di massa, con origine nel centro di massa O' e assi paralleli ai precedenti;
- il sistema di riferimento orbitale, centrato sempre in O' , ma con assi coordinati \hat{e} , \hat{e}_\perp e \hat{j} (nell'ordine scritto).

Notiamo che il sistema di riferimento $O'xyz$ del centro di massa è un riferimento inerziale parallelo a quello in cui sono state date le condizioni iniziali: infatti è solo traslato rispetto a $Oxyz$ affinché il centro di massa sia fisso, e quindi è traslato in modo rettilineo uniforme. Inoltre in $O'xyz$ avevamo considerato il moto relativo di μ rispetto a $M = m_1 + m_2$, che è fissa nell'origine O' .

Una volta trovate le coordinate al tempo $t_1 > 0$ nel piano dell'orbita dobbiamo ruotare dal riferimento orbitale al riferimento del centro di massa $O'xyz$. Questo si fa compiendo tre rotazioni: una rotazione di $-\omega$ intorno a \hat{j} in modo da portare \hat{e} a coincidere con $\hat{\Omega}$, una rotazione di $-i$ intorno a $\hat{\Omega}$ così che \hat{j} coincide con Ox e infine una rotazione di $-\Omega$ intorno a Ox così che $\hat{\Omega}$ coincide con Ox . Ognuna di queste tre rotazioni è espressa da una matrice ortogonale, e la matrice prodotto delle tre (nell'ordine giusto) è la matrice R che porta da riferimento orbitale a $O'xyz$. Calcoliamo adesso la matrice R come $R = R_3 R_2 R_1$, dove

$$R_1 = \begin{pmatrix} \cos(-\omega) & \sin(-\omega) & 0 \\ -\sin(-\omega) & \cos(-\omega) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e analogamente

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad R_3 = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cosa significa applicare la matrice R ? Se moltiplichiamo R per le coordinate del vettore posizione $\mathbf{r}(t_1)$ nel riferimento orbitale otteniamo le coordinate dello stesso vettore nel riferimento $O'xyz$. A questo punto i vettori posizione \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 di m_1 e m_2 in $O'xyz$ sono semplicemente

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{M}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{M}\mathbf{r} \end{cases},$$

da cui, nel riferimento iniziale si ha finalmente

$$\begin{cases} \rho_1 = \underline{R} - \frac{m_2}{M} \underline{r} \\ \rho_2 = \underline{R} + \frac{m_1}{M} \underline{r} \end{cases},$$

con \underline{R} raggio vettore in $Oxyz$ del centro di massa.

Capitolo 2

Problema dei tre corpi ristretto circolare

Nel precedente capitolo abbiamo studiato nei dettagli il problema dei due corpi: abbiamo dimostrato che è integrabile e abbiamo visto come calcolarne la legge oraria per via analitica. Non appena si cerca di modificare il problema, magari aggiungendo un terzo corpo, perdiamo l'integrabilità: i gradi di libertà diventano nove, ma non abbiamo altrettanti integrali primi. Il problema è, dunque, ben più complicato.

In questo capitolo tratteremo il problema dei tre corpi in un caso semplificato: faremo due ipotesi che renderanno lo studio del problema più agevole, ma che ci permetteranno di dire ancora qualcosa di interessante. In particolare, troveremo un nuovo integrale primo e riusciremo a definire un criterio di stabilità.

2.1 Formulazione del problema

Il *problema dei tre corpi ristretto circolare* consiste nello studio del moto di tre corpi in \mathbb{R}^3 soggetti esclusivamente alla mutua attrazione gravitazionale, con le seguenti ipotesi aggiuntive.

- Il problema si dice *ristretto* quando uno dei tre corpi ha massa trascurabile rispetto a quelle degli altri due, che a seconda delle loro masse chiameremo *primario* e *secondario*, e quindi non influisce sulle loro orbite, che saranno quelle di un classico problema dei due corpi. Diremo che il primario e il secondario formano una *binaria*.¹

¹per avere un'idea, si può pensare al caso in cui la binaria è formata da Sole (il primario)

- Il problema si dice *circolare* se le orbite del primario e del secondario sono circolari.

Supporremo, inoltre, che l'asteroide si trovi nel piano delle orbite della binaria. Questa ipotesi, però, non è restrittiva: giungeremmo agli stessi risultati anche nel caso più generale.

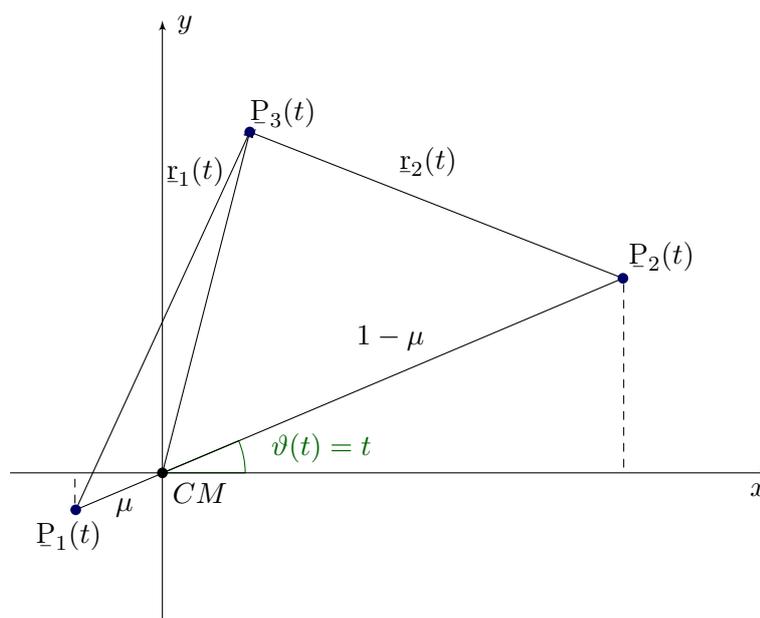


Figura 2.1: Problema dei tre corpi ristretto circolare, riferimento sidereo.

Vediamo il setting del problema. Consideriamo un sistema di riferimento inerziale Oxy , che chiameremo *sidereo*, in cui l'origine è il centro di massa della binaria, l'asse x è dato dalla direzione al tempo iniziale del vettore di posizione relativa dei corpi della binaria e l'asse y è ad esso perpendicolare. Supponiamo che il primario e il secondario abbiano rispettivamente masse m_1, m_2 e denotiamo con $\underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3$ rispettivamente le posizioni del primario, del secondario e del terzo corpo. Per l'ipotesi di orbite circolari, la velocità angolare della binaria è costante ed è pari alla velocità angolare media n : l'angolo $\vartheta(t)$ (vedi figura 2.1) assume quindi valore nt . Facciamo, inoltre, le seguenti semplificazioni:

$$G = 1, \quad m_1 + m_2 = 1 \quad \text{e} \quad d = |\underline{P}_2 - \underline{P}_1| = 1.$$

e Giove (il secondario) e il terzo corpo è un asteroide – in virtù di questo esempio, spesso nel seguito chiameremo il terzo corpo “l'asteroide”.

Dalla terza legge di Keplero per la binaria otteniamo:

$$n^2 d^3 = GM_{\text{tot}} = 1 \quad \implies \quad n = 1.$$

Quello che dobbiamo tenere ben presente è che, se non ci fosse il secondario, il terzo corpo si muoverebbe attorno al primario come abbiamo studiato nel capitolo precedente. In un certo senso, l'aggiunta del secondo corpo corrisponde ad una *perturbazione* del problema dello studio del moto del sistema primario–terzo corpo. Con la prossima definizione vogliamo dare una misura di questa perturbazione.

Definizione 2.1. Il *parametro perturbativo* è la seguente quantità adimensionale:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Osservazione 2.1. Notiamo che il parametro perturbativo è tanto più grande quanto più è massivo il secondo corpo. Inoltre nelle nostre convenzioni $\mu = m_2$ e $m_1 = 1 - \mu$.

2.2 L'equazione del moto per il terzo corpo

Naturalmente, per le ipotesi che abbiamo fatto, il moto della binaria è perfettamente noto. Dobbiamo preoccuparci di studiare solo il moto del terzo corpo: cominciamo scrivendone l'equazione.

Innanzitutto, poniamo

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{P}_3(t) - \mathbf{P}_1(t) \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{P}_3(t) - \mathbf{P}_2(t),$$

e osserviamo che, per la relazione tra masse e raggi vettori $m_1 \mathbf{P}_1(t) = -m_2 \mathbf{P}_2(t)$, vale

$$|\mathbf{P}_2(t)| = 1 - \mu \quad \text{e} \quad |\mathbf{P}_1(t)| = \mu.$$

Inoltre

$$\mathbf{P}_1(t) = (-\mu \cos t, -\mu \sin t) \quad \text{e} \quad \mathbf{P}_2(t) = ((1 - \mu) \cos t, (1 - \mu) \sin t),$$

da cui

$$\begin{aligned} r_1(t) &= \sqrt{(x + \mu \cos t)^2 + (y + \mu \sin t)^2} \\ r_2(t) &= \sqrt{(x - (1 - \mu) \cos t)^2 + (y - (1 - \mu) \sin t)^2}. \end{aligned}$$

Scriviamo il potenziale per unità di massa dell'asteroide, che indicheremo con V , nel punto in cui si trova il terzo corpo.² Ne faremo il gradiente e otterremo la forza che agisce sull'asteroide. Abbiamo che

$$V(x, y, t) = -\frac{Gm_2}{|\mathbb{P}_3(t) - \mathbb{P}_2(t)|} - \frac{Gm_1}{|\mathbb{P}_3(t) - \mathbb{P}_1(t)|} = -\frac{\mu}{r_2(t)} - \frac{1-\mu}{r_1(t)}.$$

La forza per unità di massa è $\mathbb{F} = -\nabla V$, per cui l'equazione del moto (in componenti) è

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} \\ \ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y}. \end{cases}$$

Usando il fatto che $\nabla r = \mathbf{r}/r$, otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\mu}{r_2^3}(x - (1-\mu)\cos t) - \frac{1-\mu}{r_1^3}(x + \mu\cos t) \\ \ddot{y} = -\frac{\mu}{r_2^3}(y - (1-\mu)\sin t) - \frac{1-\mu}{r_1^3}(y + \mu\sin t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Vorremmo eliminare la dipendenza esplicita dal tempo; per far ciò, dobbiamo cambiare sistema di riferimento e scrivere le equazioni nel sistema di riferimento rotante $O\tilde{x}\tilde{y}$, detto *riferimento sinodico* (figura 2.2).

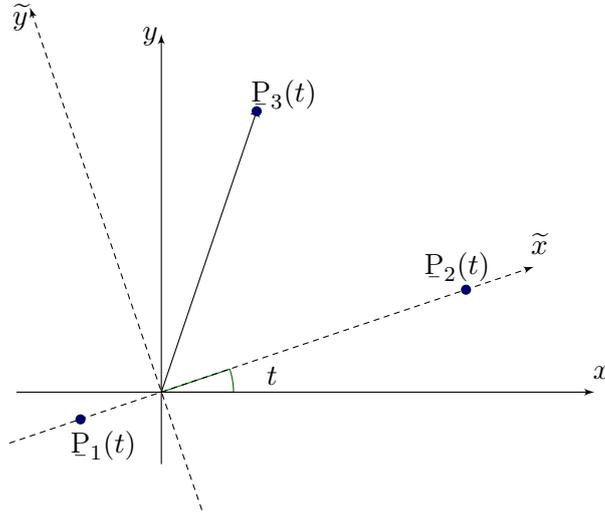


Figura 2.2: Problema dei tre corpi ristretto circolare, rif. sidereo e sinodico.

²Poiché la binaria si muove, ci aspettiamo che tale potenziale dipenda esplicitamente dal tempo.

Osserviamo che tale sistema di riferimento ha velocità angolare \underline{n} di modulo 1 e diretta lungo la semiretta perpendicolare uscente dal foglio.

La trasformazione che esprime le coordinate del sistema di riferimento inerziale rispetto alle coordinate del sistema rotante è la seguente:

$$\begin{cases} x = \tilde{x} \cos t - \tilde{y} \sin t \\ y = \tilde{x} \sin t + \tilde{y} \cos t \end{cases} \quad (2.2)$$

Deriviamo le precedenti rispetto al tempo per ottenere espressioni di $\dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}$ in funzione di \tilde{x}, \tilde{y} e delle loro derivate; si ottengono:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\tilde{x} \sin t + \dot{\tilde{x}} \cos t - \tilde{y} \cos t - \dot{\tilde{y}} \sin t \\ \dot{y} = \tilde{x} \cos t + \dot{\tilde{x}} \sin t - \tilde{y} \sin t + \dot{\tilde{y}} \cos t \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\tilde{x} \cos t - 2\dot{\tilde{x}} \sin t + \ddot{\tilde{x}} \cos t + \tilde{y} \sin t - 2\dot{\tilde{y}} \cos t - \ddot{\tilde{y}} \sin t \\ \ddot{y} = -\tilde{x} \sin t + 2\dot{\tilde{x}} \cos t + \ddot{\tilde{x}} \sin t - \tilde{y} \cos t - 2\dot{\tilde{y}} \sin t + \ddot{\tilde{y}} \cos t \end{cases} \quad (2.3)$$

Omettiamo la riscrittura delle (2.1) nelle nuove coordinate, perché poco interessanti, e ci concentriamo su una loro manipolazione. Moltiplicando la prima equazione per $\cos t$ e la seconda per $\sin t$ e sommandole, si ottiene la seguente equazione:

$$\ddot{\tilde{x}} = 2\dot{\tilde{y}} + \tilde{x} - \frac{\mu}{r_2^3}(\tilde{x} - 1 + \mu) - \frac{1 - \mu}{r_1^3}(\tilde{x} + \mu). \quad (2.4)$$

Al secondo membro, individuiamo i seguenti contributi:

- il primo addendo è dovuto alla forza di Coriolis: ci dovrebbe essere un n a causa della derivazione, ma manca poiché l'abbiamo posto uguale a 1;
- il secondo addendo è dovuto alla forza centrifuga: stavolta dovrebbe esserci un n^2 , ma, come prima, manca perché vale 1;
- il terzo addendo è dovuto all'attrazione del primario;
- il quarto addendo è dovuto all'attrazione del secondario.

Analogamente, moltiplicando la prima equazione per $-\sin t$ e la seconda per $\cos t$ e sommandole, si ottiene l'equazione

$$\ddot{\tilde{y}} = -2\dot{\tilde{x}} + \tilde{y} - \frac{\mu}{r_2^3}\tilde{y} - \frac{1 - \mu}{r_1^3}\tilde{y}. \quad (2.5)$$

La (2.4) e la (2.5) danno le equazioni del moto dell'asteroide nel sistema di riferimento sinodico.

2.3 L'integrale di Jacobi

Ci apprestiamo ad individuare un nuovo integrale primo del moto, il quale ci darà informazioni sulle regioni dello spazio, a seconda delle condizioni iniziali, in cui il terzo corpo può orbitare.

2.3.1 Un nuovo integrale primo

Nel prossimo teorema vediamo come ottenere un nuovo integrale primo a partire dalle equazioni del moto.

Teorema 2.1. *Nelle coordinate del sistema di riferimento sinodico, la funzione*

$$C(\tilde{x}, \tilde{y}, \dot{\tilde{x}}, \dot{\tilde{y}}) = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) - \frac{1}{2}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1-\mu}{r_1} \quad (2.6)$$

è un integrale primo del moto del terzo corpo.

Dimostrazione. Moltiplichiamo l'equazione (2.4) per $\dot{\tilde{x}}$ e la (2.5) per $\dot{\tilde{y}}$. Sommando le equazioni così ottenute e portando tutto a primo membro, si ottiene esattamente l'equazione

$$\dot{C} = 0,$$

questo è sufficiente. \square

Definizione 2.2. Chiameremo *integrale di Jacobi* la funzione $\mathcal{J} = -C$.

D'ora in poi porremo

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2}(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2) + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1-\mu}{r_1},$$

così il nuovo integrale diventa

$$C = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) - \Omega(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

È abbastanza chiaro che C ha le dimensioni di un'energia per unità di massa, ma vogliamo capire meglio cosa rappresenta il contributo dato da Ω . Per far ciò, scriveremo C nelle coordinate del sistema di riferimento sidereo.

Proposizione 2.1. *Nel sistema di riferimento sidereo, l'integrale C assume l'espressione*

$$C_{\text{sid}} = E - \underline{j} \cdot \underline{n},$$

dove E è l'energia del terzo corpo per unità di massa, \underline{j} è il momento angolare per unità di massa del terzo corpo e \underline{n} è il vettore velocità angolare del riferimento sinodico rispetto al sidereo.

Dimostrazione. La trasformazione inversa della (2.2) è data dalle seguenti:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x \cos t + y \sin t \\ \tilde{y} = -x \sin t + y \cos t. \end{cases} \quad (2.7)$$

Derivandole, si ottiene

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \dot{x} \cos t + \dot{y} \sin t - x \sin t + y \cos t \\ \dot{\tilde{y}} = -\dot{x} \sin t + \dot{y} \cos t - x \cos t - y \sin t. \end{cases} \quad (2.8)$$

Facendo i dovuti conti, si ottiene che $\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + x^2 + y^2 + 2\dot{x}y - 2x\dot{y}$, e quindi $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = x^2 + y^2$. Sostituendo nell'espressione di C_{sid} , si ottiene

$$C_{\text{sid}} = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1-\mu}{r_1} + \dot{x}y - x\dot{y} = E + \dot{x}y - x\dot{y}.$$

Per concludere basta osservare che la quantità $\dot{x}y - y\dot{x}$ rappresenta la terza componente del vettore momento angolare per unità di massa del terzo corpo; essendo quest'ultimo parallelo a \underline{n} , allora è proprio $\underline{j} \cdot \underline{n}$. \square

Osservazione 2.2. La proposizione appena dimostrata vale, più in generale, se l'asteroide non si muovesse nello stesso piano della binaria, ma fosse libero di muoversi in \mathbb{R}^3 . In questo caso, il momento angolare non è, in generale, parallelo al vettore momento angolare, ma l'espressione che si ottiene è sempre

$$C_{\text{sid}} = E - \underline{j} \cdot \underline{n},$$

ma il numero $\underline{j} \cdot \underline{n}$ non è solo la terza componente di \underline{j} , come era in precedenza.

2.3.2 Regioni ammissibili di moto

In questa sezione vedremo come è possibile ricavare informazioni sul moto dell'asteroide a partire dal valore di C . Lavoreremo esclusivamente nel sistema di riferimento sinodico.

Una considerazione fondamentale è la seguente: dall'espressione di C_{sin} abbiamo che

$$C_{\text{sin}} + \Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{1}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + \dot{\tilde{y}}^2) \geq 0,$$

per cui, essendo C una costante del moto, abbiamo che deve essere soddisfatta per ogni tempo la seguente condizione:

$$\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) \geq \mathcal{I}. \quad (2.9)$$

La precedente condizione (2.9) ci dà un criterio per stabilire quali sono, nel riferimento sinodico, le zone in cui il moto è ammissibile: a partire dalle condizioni iniziali si calcola il valore di \mathcal{S} e si disegna, nel piano \tilde{x}, \tilde{y} la curva $\{(\tilde{x}, \tilde{y}) \mid \Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathcal{S}\}$. Se, ad esempio, questa fosse una curva chiusa, dividerebbe il piano in due zone distinte: una in cui il valore di Ω è maggiore strettamente di \mathcal{S} e una in cui è minore strettamente di \mathcal{S} : il moto sarebbe costretto ad avvenire nella prima delle due zone.

È importante osservare che le curve di livello della funzione Ω *non sono orbite* dell'asteroide. In particolare, la curva $\{\Omega(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathcal{S}\}$ rappresenta il luogo dei punti del riferimento sinodico in cui l'asteroide ha velocità nulla *rispetto al riferimento rotante*.³ È per questo che sono anche chiamate *curve a velocità zero*. Cerchiamo adesso di capire come sono fatte tali curve per diversi valori di \mathcal{S} . Una prima osservazione che facciamo è che la funzione Ω assume valori arbitrariamente grandi in tre casi:

- se $r_1 \rightarrow 0$, cioè se l'asteroide si avvicina arbitrariamente al primario;
- se $r_2 \rightarrow 0$, cioè se l'asteroide si avvicina arbitrariamente al secondario;
- se $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \rightarrow \infty$, cioè se l'asteroide si allontana arbitrariamente dalla binaria, tanto che essa può essere considerata, dovuta la distanza, un unico corpo.

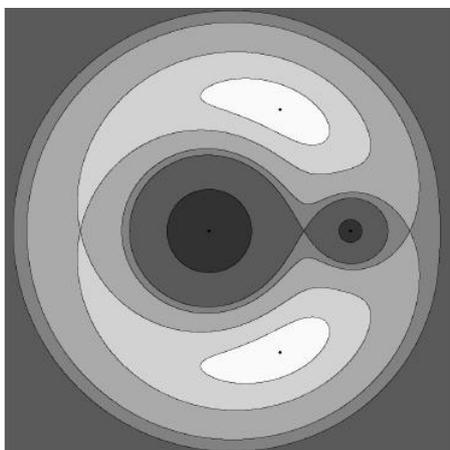


Figura 2.3: Curve di livello della funzione Ω , con $m_1/m_2 = 4$.

Detto questo, distinguiamo tre casi (si osservi la figura 2.3 per maggior chiarezza):

³è come se fosse un bambino fermo su una giostra: per noi osservatori esterni, il bimbo possiede una velocità non nulla, ovviamente.

1. Consideriamo il caso in cui $\mathcal{S}_I = \mathcal{S} > 0$ è molto grande, prossimo all'infinito. La curva a velocità zero è $\Omega = \mathcal{S}_I$, per cui anche Ω sarà prossimo all'infinito. Ciò avviene in uno dei tre casi discussi precedentemente, cioè può essere che:

- $(1 - \mu)/r_1 \simeq \mathcal{S}_I$, che ci dà una circonferenza di centro il primario e raggio $(1 - \mu)/\mathcal{S}_I$;
- $\mu/r_2 \simeq \mathcal{S}_I$, che ci dà una circonferenza di centro il secondario e raggio μ/\mathcal{S}_I (si osservi che questo valore è più piccolo del valore $(1 - \mu)/\mathcal{S}_I$);
- $(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)/2 \simeq \mathcal{S}_I$, che ci dà una circonferenza di centro l'origine e raggio $2\mathcal{S}_I$.

Queste curve dividono il piano in quattro componenti connesse: due sono i dischi delimitati dalle prime due circonferenze, una è l'aperto illimitato che ha per bordo la terza circonferenza, e la quarta è la restante. Poiché il valore di Ω si vede facilmente essere maggiore di \mathcal{S}_I nelle prime tre componenti connesse, allora il moto può avvenire solo in uno dei primi tre aperti.

Esempio 2.1. Supponiamo di avere un asteroide le cui condizioni iniziali (posizione e velocità) diano luogo ad un valore dell'integrale di Jacobi pari a \mathcal{S}_I . Supponiamo, inoltre, che la sua posizione iniziale sia all'interno della circonferenza attorno al secondario, sia cioè un *satellite* del secondario; grazie al discorso precedente, l'asteroide è vincolato a restare in quella regione di spazio e resterà un satellite del secondario per tutti i tempi.

2. Consideriamo il caso di $0 < \mathcal{S}_{II} = \mathcal{S} < \mathcal{S}_I$, ma comunque grande. La situazione è topologicamente la stessa di prima: le curve a velocità zero sono ancora tre circonferenze, con la differenza che i raggi delle prime due sono più grandi dei raggi di quelle ottenute al livello \mathcal{S}_I , mentre il raggio della terza è più piccolo.⁴ Le conclusioni sono le stesse.

3. A mano a mano che diminuiamo il valore di \mathcal{S} , le circonferenze attorno al primario e al secondario si allargano. È ragionevole pensare che esista un certo valore di \mathcal{S} , diciamo $\overline{\mathcal{S}}$, che dia una situazione limite in cui queste circonferenze si toccano in un punto, dando origine ad una curva a forma di "8". Effettivamente tale punto esiste, ed è un punto a forza zero, che chiameremo *primo punto di Lagrange* e che indicheremo con L_1 .⁵

⁴i raggi sono più grandi perché se $\mathcal{S}_I > \mathcal{S}_{II}$ allora $(1 - \mu)/\mathcal{S}_I < (1 - \mu)/\mathcal{S}_{II}$.

⁵ci occuperemo del calcolo di L_1 e di $\overline{\mathcal{S}}$ nella prossima sezione.

Per valori dell'integrale di Jacobi minori di $\overline{\mathcal{I}}$, la topologia delle curve di livello è molto varia; descriviamo alcuni di questi casi:

- incontriamo dapprima una curva semplice chiusa attorno alla binaria; in questo caso il terzo corpo può essere sia un satellite del primario, sia uno del secondario, sia entrambi e non possiamo stabilire a priori – senza metodi di integrazione numerica – quale sia la sua condizione;
- diminuendo il valore di \mathcal{I} , la curva appena descritta si aprirà in un punto L_2 che si trova oltre il secondario; in questo caso il moto è possibile sia attorno alla binaria che arbitrariamente lontano;
- per valori ancora minori di \mathcal{I} , esiste un punto L_3 , oltre il primario, in cui la curva si spezza in due curve semplici chiuse attorno a due punti, L_4 e L_5 , tali che $m_1 m_2 L_4$ e $m_1 m_2 L_5$ siano triangoli equilateri: il moto si svolge all'interno di queste curve.

Osservazione 2.3. Vale la pena sottolineare che, sebbene abbiamo fatto un discorso puramente bidimensionale, in realtà il ragionamento è identico nel caso in cui il terzo corpo possa muoversi in \mathbb{R}^3 . In questo caso, le circonferenze attorno al primario e al secondario saranno sfere che delimitano le regioni ammissibili di moto per l'asteroide.

Per intuire quali sono le curve di livello della funzione Ω si può osservare la figura 2.4, che riporta il grafico nel piano $\tilde{x}\tilde{z}$ della funzione $-\Omega(\tilde{x}, 0)$. È evidente che i punti L_1, L_2, L_3 sono punti in cui il numero di curve di livello cambia: per valori molto piccoli di $-\mathcal{I}$ ci sono tre curve, a mano a mano che aumenta le curve passano a due (in corrispondenza di L_1), poi a una (in corrispondenza di L_2 e L_3).

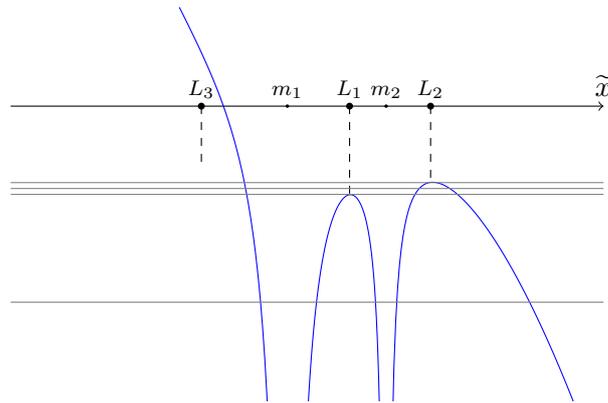


Figura 2.4: Grafico della funzione $-\Omega(\tilde{x}, 0)$ e livelli corrispondenti a curve topologicamente distinte.

2.4 Calcolo del primo punto di Lagrange

Il punto L_1 è un punto di equilibrio nel sistema rotante: rappresenta, dunque, il punto in cui la risultante delle forze in gioco è nulla. Ponendo, in L_1 , un punto massa con velocità iniziale nulla, questo resterebbe in L_1 poiché non è soggetto ad alcuna forza.

È fondamentale osservare che, poiché siamo in un riferimento non inerziale, non abbiamo soltanto le forze di attrazione gravitazionale del primario e del secondario, ma anche la forza centrifuga dovuta alla rotazione del riferimento. Prima di calcolare la posizione di L_1 , è conveniente chiarire il concetto di forze mareali.

2.4.1 Forze mareali

In questa sezione diamo una prima esposizione del concetto di forze di marea, che verrà ripresa più approfonditamente nell'apposito capitolo. In particolare, tratteremo qui solo il caso di due corpi di masse M e m posti a distanza D l'uno dall'altro e soggetti alla mutua forza d'attrazione gravitazionale. Supporremo anche che $M \gg m$, cosicché il centro di massa del sistema coincida con il centro di massa del corpo più massivo, e che m abbia orbita circolare attorno a M (con velocità angolare n). Lavoriamo nel sistema di riferimento non inerziale con origine nel centro di massa e solidale al corpo orbitante.

Definizione 2.3. Sia P un punto del corpo m che si trova sulla congiungente tra M e m . Definiamo la *forza di marea del corpo M sul punto P di m* la somma vettoriale tra la forza d'attrazione gravitazionale di M in P e la forza centrifuga in P dovuta alla rotazione di m attorno a M .

Calcoliamo le forze di marea di M su alcuni punti di m in due casi particolari. Supponiamo, in prima approssimazione, che il corpo di massa m sia puntiforme. La terza legge di Keplero risulta essere

$$n^2 D^3 = GM,$$

da cui otteniamo

$$n^2 D = \frac{GM}{D^2},$$

cioè la forza d'attrazione gravitazionale di M su m e la forza centrifuga dovuta alla rotazione attorno a M si bilanciano esattamente in m : la forza mareale, in questo caso, è nulla.

Consideriamo, più in generale, il caso in cui m abbia una certa estensione, diciamo sferica di raggio $d \ll D$, e che ruoti attorno a M in modo che ogni punto descriva una circonferenza centrata in M e di raggio la sua distanza da M .⁶

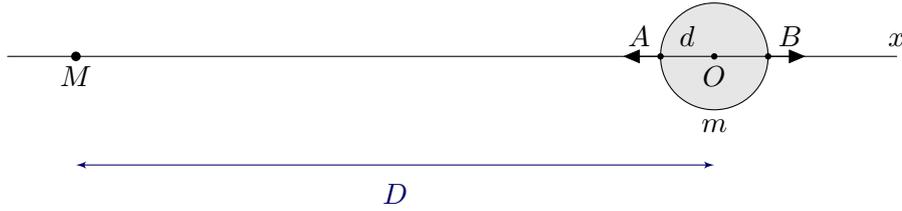


Figura 2.5: Forze mareali del corpo M sui punti A, O, B di m .

Indichiamo con O il centro di massa di m e con A e B rispettivamente il punto più vicino e più lontano a M sulla congiungente tra M e O (figura 2.5). Calcoliamo l'accelerazione mareale di M su m in A, B, O : in O abbiamo ancora una volta

$$a_{\text{tide},O} = -\frac{GM}{D^2}\hat{x} + n^2D\hat{x} = 0,$$

in A l'attrazione gravitazionale è maggiore e vale

$$a_{\text{tide},A} = -\frac{GM}{(D-d)^2}\hat{x} + n^2(D-d)\hat{x}$$

infine in B è la forza centrifuga ad essere maggiore e si ha

$$a_{\text{tide},B} = -\frac{GM}{(D+d)^2}\hat{x} + n^2(D+d)\hat{x}.$$

La prossima proposizione ci mostra un risultato sorprendente:

Proposizione 2.2. *Gli sviluppi al prim'ordine delle accelerazioni mareali nei punti A e B sono uguali in modulo e pari a*

$$a_{\text{tide}} = 3\frac{GM}{D^3}d. \quad (2.10)$$

⁶è questo il caso che ci interessa perché vogliamo calcolare la forza di marea esclusivamente nei punti sulla congiungente dei centri di massa.

Dimostrazione. Sfruttiamo l'ipotesi $d/D \ll 1$. Sviluppiamo dapprima $a_{\text{tide},A}$:

$$\begin{aligned} -\frac{GM}{(D-d)^2} + n^2(D-d) &= -\frac{GM}{D^2 \left(1 - \frac{d}{D}\right)^2} + n^2D \left(1 - \frac{d}{D}\right) = \\ &= -\frac{GM}{D^2} \left(1 + 2\frac{d}{D}\right) + n^2D \left(1 - \frac{d}{D}\right) = \\ &= -\frac{GM}{D^2} - 2\frac{GMd}{D^3} + \frac{GM}{D^2} \left(1 - \frac{d}{D}\right) = \\ &= -3\frac{GM}{D^3}d, \end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo utilizzato la terza legge di Keplero. Lo sviluppo di $a_{\text{tide},B}$ è analogo e dà luogo allo stesso risultato in modulo. \square

2.4.2 Raggio d'influenza

Siamo finalmente pronti per calcolare la posizione di L_1 . Innanzitutto, esso si trova sulla congiungente primario–secondario, per cui si tratta semplicemente di stabilire quale sia la sua distanza dal primario o, il che è chiaramente equivalente, dal secondario. Poniamo d_1 la distanza di L_1 dal centro del secondario e supponiamo $m_1 \gg m_2$, così il centro di massa risulta essere il corpo m_1 .

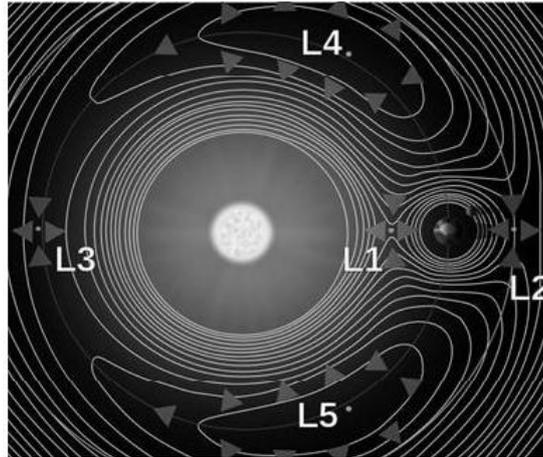


Figura 2.6: I punti di Lagrange nel sistema Sole–Terra.

Teorema 2.2. *La distanza del punto L_1 dal centro di massa del secondario soddisfa*

$$d_1 \simeq \left(\frac{m_2}{3m_1} \right)^{\frac{1}{3}} d. \quad (2.11)$$

Dimostrazione. Per definizione, il punto L_1 è un punto a forza zero, dunque un punto in cui l'accelerazione mareale dovuta al primario e l'accelerazione gravitazionale dovuta al secondario si bilanciano. Imponendo questa condizione, ricordando la (2.10), si ottiene

$$3 \frac{Gm_1}{d^3} d_1 \simeq \frac{Gm_2}{d_1^2},$$

dove il simbolo \simeq è dovuto all'approssimazione al prim'ordine. La tesi segue facilmente. \square

Definizione 2.4. Lo scalare d_1 è chiamato *raggio della sfera d'influenza* del secondario o *raggio di Hill* del secondario.

Osservazione 2.4. Nelle nostre convenzioni, poiché $m_2/m_1 \simeq \mu$, si ha

$$d_1 \simeq \left(\frac{\mu}{3} \right)^{\frac{1}{3}} d. \quad (2.12)$$

Esempio 2.2. Nel problema dei tre corpi ristretto circolare in cui il primario è il Sole e il secondario è Giove, si calcoli il raggio di Hill di Giove. Facciamo i calcoli con le convenzioni adottate fin dall'inizio; supponiamo, cioè, che

$$m_{\odot} + m_{\mathcal{J}} = 1 \quad \text{e} \quad d_{\odot\mathcal{J}} = 1.$$

La massa di Giove è circa un millesimo di quella del Sole, per cui possiamo porre $m_{\mathcal{J}} = 10^{-3}$ e $m_{\odot} = 1$. Per la (2.12), abbiamo:

$$d_1 \simeq \left(\frac{m_{\mathcal{J}}}{3} \right)^{\frac{1}{3}} = 0.069,$$

cioè il punto di Lagrange L_1 si trova a distanza $0.93d_{\odot\mathcal{J}}$ dal Sole.

2.5 Criterio di stabilità di Hill

Le informazioni che abbiamo ricavato nelle precedenti sezioni possono essere messe insieme per ottenere un utile criterio di stabilità.

Si supponga di avere un problema dei tre corpi ristretto circolare; abbiamo già calcolato la posizione del primo punto di Lagrange ed è semplice ricavare, come vedremo in un esempio, il valore dell'integrale di Jacobi $\overline{\mathcal{J}}$ che dà origine alla curva a forma di "8".

Teorema 2.3 (criterio di stabilità di Hill). *Consideriamo un problema dei tre corpi ristretto circolare, con primario e secondario di masse m_1, m_2 . Siano $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ e $(\dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0)$ le condizioni iniziali del terzo corpo. Se*

$$C_{\text{sin}}(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0, \dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0) \leq -\overline{\mathcal{F}}, \quad (2.13)$$

allora vale una ed una sola delle seguenti:

- se il terzo corpo è satellite di m_1 per $t = 0$, lo sarà per tutti i tempi;
- se il terzo corpo è satellite di m_2 per $t = 0$, lo sarà per tutti i tempi;
- se il terzo corpo è lontano dalla binaria per $t = 0$, lo sarà per tutti i tempi.

Dimostrazione. La condizione (2.13) dice che il valore dell'integrale di Jacobi per il terzo corpo è maggiore o uguale al valore critico in cui le sfere attorno a m_1 e m_2 si toccano. Per quanto visto nella sezione 2.3.2, il moto del terzo corpo è confinato o all'interno di una sfera attorno a m_1 , o all'interno di una sfera attorno a m_2 o al di fuori di una sfera attorno all'intera binaria. A seconda del valore di $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$, si ottiene una delle alternative. Chiaramente, per continuità del moto, non è possibile che ne valgano due contemporaneamente. \square

Esempio 2.3. Calcolare il valore dell'integrale di Jacobi corrispondente alla curva passante per L_1 nel problema dei tre corpi ristretto circolare Sole–Giove–asteroide. È sufficiente calcolare il valore dell'integrale di Jacobi per un asteroide che si trovi all'istante iniziale in L_1 e che abbia velocità nulla nel riferimento sinodico.

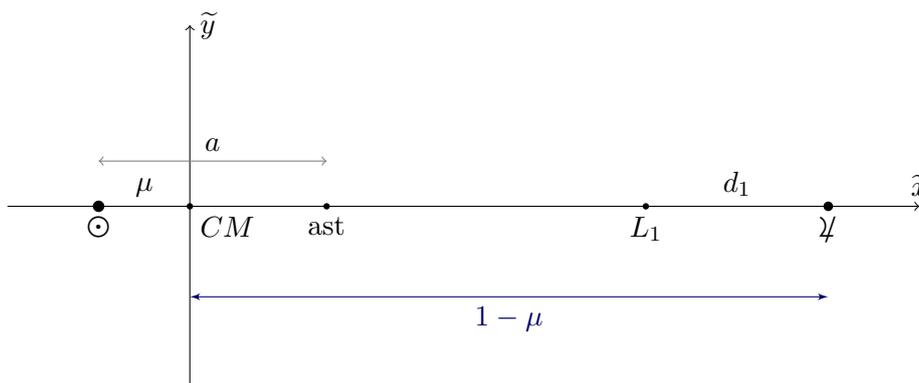


Figura 2.7: Sole, Giove, primo punto di Lagrange.

Come si vede facilmente dalla figura 2.7, abbiamo che $L_1 = (1 - \mu - d_1, 0)$; conseguentemente, ricordando che $\mu = m_J = 10^{-3}$, abbiamo che

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}} = -\overline{C} &= \frac{1}{2}(1 - \mu - d_1)^2 + \frac{\mu}{d_1} + \frac{1 - \mu}{1 - d_1} = \\ &= 0.432 + 1.44 \cdot 10^{-2} + 1.07 = 1.52.\end{aligned}$$

Osserviamo che il contributo più importante per il valore di $\overline{\mathcal{F}}$ è dato dal potenziale gravitazionale del Sole, poi dal potenziale centrifugo e, in ultima istanza, dal potenziale gravitazionale di Giove.

Vediamo adesso un'applicazione del criterio di stabilità di Hill, che presenteremo sotto forma di esempio:

Esempio 2.4. Si consideri, nel problema ristretto circolare Sole–Giove, un asteroide che, all'istante iniziale, è in rotazione attorno al Sole con orbita circolare di raggio a . Si determinino i possibili valori di a per cui, nel futuro, l'asteroide resta sotto l'influenza del Sole.

In prima istanza, si potrebbe pensare che sono ammessi valori di a fino a distanza $1 - d_1$, cioè fino a che non si entra nella sfera d'influenza di Giove; vedremo che non è così. Scriveremo la posizione e la velocità dell'asteroide nel riferimento sidereo, come se Giove non esistesse; introdurremo l'influenza di Giove e scriveremo posizione e velocità nel riferimento sinodico, che assumiamo coincidente con il sidereo all'istante iniziale; calcoleremo il valore dell'integrale di Jacobi per l'asteroide e useremo il criterio di stabilità di Hill per concludere.

In assenza di Giove, l'asteroide si muove in orbita kepleriana attorno al Sole, quindi le condizioni iniziali nel riferimento sinodico sono (figura 2.7)

$$(x_0, y_0) = (a - \mu, 0) \quad \text{e} \quad (\dot{x}_0, \dot{y}_0) = \left(0, \sqrt{\frac{Gm_\odot}{a}}\right) = \left(0, \frac{(1 - \mu)^{1/2}}{a^{1/2}}\right).$$

Consideriamo adesso l'influenza di Giove: la posizione iniziale è $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = (a - \mu, 0)$; per quanto riguarda la velocità iniziale $(\dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0)$, dobbiamo tener conto della rotazione del riferimento sinodico con velocità angolare $n = 1$ attorno al centro di massa e del fatto che l'asteroide ruota comunque attorno al Sole. A causa della prima dobbiamo sottrarre $n(a - \mu)$ alla componente verticale e per la seconda dobbiamo sottrarre un ulteriore $n\mu$ (la velocità con cui ruota il Sole attorno al centro di massa del sistema Sole–Giove). In definitiva, abbiamo che

$$(\dot{\tilde{x}}_0, \dot{\tilde{y}}_0) = \left(0, \frac{(1 - \mu)^{1/2}}{a^{1/2}} - (a - \mu) - \mu\right) = \left(0, \frac{(1 - \mu)^{1/2}}{a^{1/2}} - a\right).$$

Il valore dell'integrale di Jacobi risulta essere:

$$\mathcal{J}(a) = \frac{1-\mu}{2a} + \frac{\mu}{1-a} + \sqrt{(1-\mu)a} - a\mu.$$

Per il criterio di stabilità di Hill, si sa che se $\mathcal{J}(a) > \overline{\mathcal{J}} = 1.52$, allora l'asteroide resta sotto l'influenza del Sole.

a	$\mathcal{J}(a)$
0.30	2.214
0.40	1.882
0.50	1.707
0.60	1.609
0.62	1.595
0.80	1.523
0.81	1.521
0.85	1.515

Come si vede dalla tabella, che riporta per diversi valori di a i corrispondenti valori dell'integrale di Jacobi, l'ultimo valore ammissibile è $a = 0.81$. Tale dato ha un riscontro sperimentale: è noto che l'ultimo asteroide della fascia degli asteroidi tra Marte e Giove si trova esattamente a distanza $0.81d_{\odot\gamma}$ dal Sole, ed è l'asteroide denominato Thule.

Esempio 2.5. Si calcoli il raggio della sfera d'influenza della Terra nel sistema a tre corpi Sole–Terra–Luna e lo si confronti con la distanza Terra–Luna. Indichiamo con $R_{\text{si}\oplus}$ il raggio della sfera d'influenza della Terra. Per la (2.11) abbiamo

$$R_{\text{si}\oplus} \simeq d_{\odot\oplus} \left(\frac{m_{\oplus}}{3m_{\odot}} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.5 \cdot 10^{11} \cdot \left(\frac{2.9 \cdot 10^{-6}}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \simeq 1.5 \cdot 10^9 \text{ m.}$$

Pertanto,

$$\frac{d_{\oplus\text{C}}}{R_{\text{si}\oplus}} \simeq 0.26.$$

Concludiamo che la Luna si trova molto vicino alla Terra rispetto alla sua sfera d'influenza: ciò è tipico dei satelliti naturali di tutti i pianeti.

Capitolo 3

Maree

In questo capitolo discuteremo delle forze di marea, fondamentali nella descrizione dei fenomeni di meccanica celeste.

3.1 Potenziale mareale

Scopo di questa sezione è definire rigorosamente il concetto di potenziale mareale. In generale, il potenziale mareale è originato da una non uniformità del potenziale gravitazionale e del potenziale centrifugo: differenze di potenziale gravitazionale o differenze di potenziale centrifugo danno luogo ad un potenziale mareale non banale. Nel seguito cominceremo col descrivere il potenziale mareale nel caso di un corpo rotante con assetto fisso, in cui il potenziale centrifugo non interviene. Seguirà una discussione sul caso corotante, in cui anche il potenziale centrifugo darà un contributo non banale.

3.1.1 Caso di assetto fisso

Iniziamo da una definizione

Definizione 3.1. Un corpo sferico di raggio r , posto a distanza R da un corpo puntiforme attorno al quale ruota con orbita circolare si dice che ha un *assetto fisso* (space-fixed) se ogni punto $P = O + \underline{r}_P$ della sua superficie compie un'orbita circolare di raggio R attorno al punto $M + \underline{r}_P$.

Adesso ci proponiamo di calcolare il potenziale mareale esercitato da un corpo di massa M puntiforme su di un corpo di dimensioni non nulle che orbita attorno al primo corpo, mantenendo un assetto fisso nello spazio (ossia rispetto alle stelle fisse). Come effetto dell'ipotesi di assetto fisso, abbiamo che

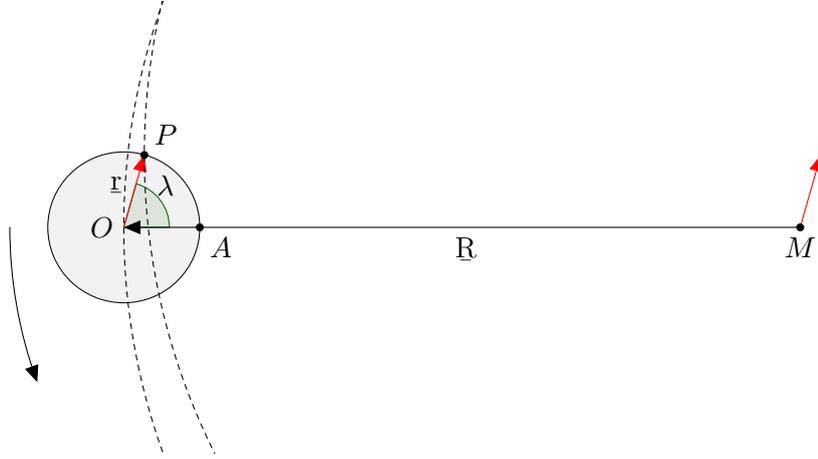


Figura 3.1: Il corpo esteso m ruota attorno a M con assetto fisso.

la differenza di potenziale centrifugo tra due punti antipodali della superficie di m è nulla. Questo porterà a non far intervenire il potenziale centrifugo nel potenziale mareale di M su m . Le forze di marea sul corpo esteso sono quindi dovute soltanto alla differenza di potenziale gravitazionale. Ciò implica peraltro che la velocità angolare di rotazione attorno all'asse del corpo esteso è nulla.

Teorema 3.1. *Il potenziale mareale su un corpo in assetto fisso nello spazio è, approssimando tutti i termini di ordine superiore al secondo,*

$$\varphi_{\text{tide}}(r, \lambda) \simeq -\frac{GM}{R} \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2}. \quad (3.1)$$

Dimostrazione. Con riferimento alla figura 3.1, indichiamo con O il centro di massa del corpo esteso, che è l'unico punto del corpo soggetto ad una forza totale nulla. Per quanto detto ci limitiamo a calcolare la differenza di potenziale gravitazionale, dunque, indicando con $\varphi_{\text{tide}}(P)$ il potenziale mareale nel punto P del corpo esteso, si ha

$$\varphi_{\text{tide}}(P) = \varphi_G(P) - \varphi_G(O).$$

Detto λ l'angolo misurato tra la congiungente O ad M e P , detto Q il simmetrico di P rispetto al centro di massa, esso avrà angolo pari a $\lambda + \pi$. Indichiamo infine con r la distanza di P (e dunque anche quella di Q) da O . Guardiamo la figura seguente:

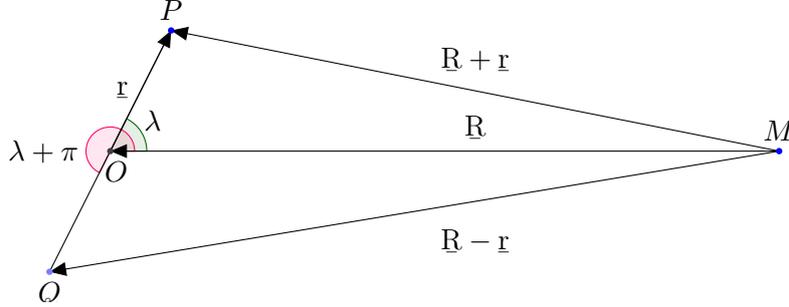


Figura 3.2: Situazione semplificata di massa concentrata in O .

Si ha allora

$$\varphi_G(P) = -\frac{GM}{|\mathbb{R} + \mathbb{r}|}, \quad \varphi_G(Q) = -\frac{GM}{|\mathbb{R} - \mathbb{r}|} \quad \text{e} \quad \varphi_G(O) = -\frac{GM}{R}.$$

Vogliamo però adesso dare un'approssimazione al secondo ordine delle quantità appena scritte. Osserviamo intanto che

$$\frac{1}{|\mathbb{R} + \mathbb{r}|} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} + 2\frac{\mathbb{R} \cdot \mathbb{r}}{R^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r \cos \lambda}{R} \right)^{-\frac{1}{2}};$$

posto $t = \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{r \cos \lambda}{R}$, per la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned} (1+t)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + O(t^3) = \\ &= 1 + \frac{r}{R} \cos \lambda + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} (3 \cos^2 \lambda - 1) + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right). \end{aligned}$$

Grazie a queste approssimazioni:

$$\begin{aligned} \varphi_G(P) &= -\frac{GM}{R} \left(1 + \frac{r}{R} \cos \lambda + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} (3 \cos^2 \lambda - 1) + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right) \right) \\ \varphi_G(Q) &= -\frac{GM}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \cos \lambda + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} (3 \cos^2 \lambda - 1) + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right) \right), \\ \varphi_G(O) &= -\frac{GM}{R} \end{aligned}$$

e quindi la differenza di potenziale tra i punti P e Q e il centro di massa O sarà pari a

$$\begin{aligned} \varphi_G(P) - \varphi_G(O) &= -\frac{GM}{R} \left(\frac{r}{R} \cos \lambda + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} (3 \cos^2 \lambda - 1) + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right) \right) \\ \varphi_G(Q) - \varphi_G(O) &= -\frac{GM}{R} \left(-\frac{r}{R} \cos \lambda + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} (3 \cos^2 \lambda - 1) + O\left(\frac{r^3}{R^3}\right) \right). \end{aligned}$$

In realtà, il termine di monopolo $\frac{r}{R} \cos \lambda$ non dà contributo nel potenziale mareale gravitazionale. Per meglio capire ciò, calcoliamo le accelerazioni mareali in due punti antipodali: osserveremo che la differenza dei contributi dati dai termini di monopolo è nulla, per cui non ci possono essere effetti mareali sul corpo. Per effettuare il calcolo, usiamo coordinate polari e calcoliamo le componenti radiali e trasverse derivando il termine di monopolo del potenziale mareale rispetto a r e rispetto a λ (introduciamo l'apice "m" per ricordare che stiamo considerando solo i termini di monopolo).

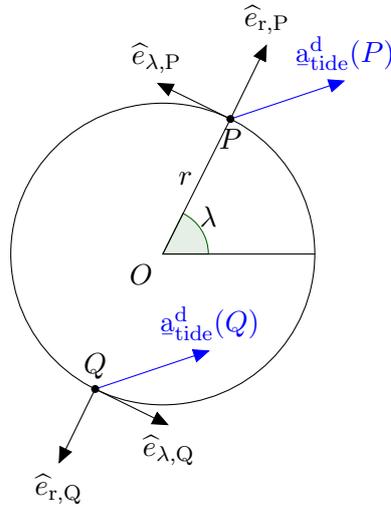


Figura 3.3: I contributi dati alle accelerazioni mareali dai termini di monopolo.

In P abbiamo le due componenti

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_r^m(P) &= -\frac{\partial \varphi^m}{\partial r}(r, \lambda) = \frac{GM}{R^2} \cos \lambda \\ \mathfrak{a}_t^m(P) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^m}{\partial \lambda}(r, \lambda) = -\frac{GM}{R^2} \sin \lambda, \end{aligned}$$

mentre in Q si ha

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_r^m(Q) &= -\frac{\partial \varphi^m}{\partial r}(r, \lambda + \pi) = -\frac{GM}{R^2} \cos \lambda \\ \mathfrak{a}_t^m(Q) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi^m}{\partial \lambda}(r, \lambda + \pi) = \frac{GM}{R^2} \sin \lambda. \end{aligned}$$

Rispetto ai riferimenti di coordinate polari in P e in Q , le componenti dell'accelerazione di marea così calcolate sono uguali in modulo e concordi nella direzione, dunque la loro differenza è nulla. \square

Osservazione 3.1. Osserviamo che il potenziale mareale determina, all'interno del corpo, le forze differenziali tra qualunque punto P e il suo opposto rispetto al centro di massa. Ciò implica che il ragionamento che facciamo per un corpo sferico si può estendere ad un corpo non a simmetria sferica, considerandone il centro di massa.

3.1.2 Caso corotante

Consideriamo adesso il caso in cui il corpo esteso sia *corotante* con il corpo che produce la marea M . Supponiamo, cioè, che la velocità angolare media di rotazione attorno a M , indicata con n_{orb} , sia uguale in modulo, direzione e verso alla velocità angolare di rotazione di m attorno all'asse perpendicolare al piano di rotazione e passante per O , indicata con ω_{spin} . In altre parole, supponiamo che m volga sempre la stessa faccia a M .

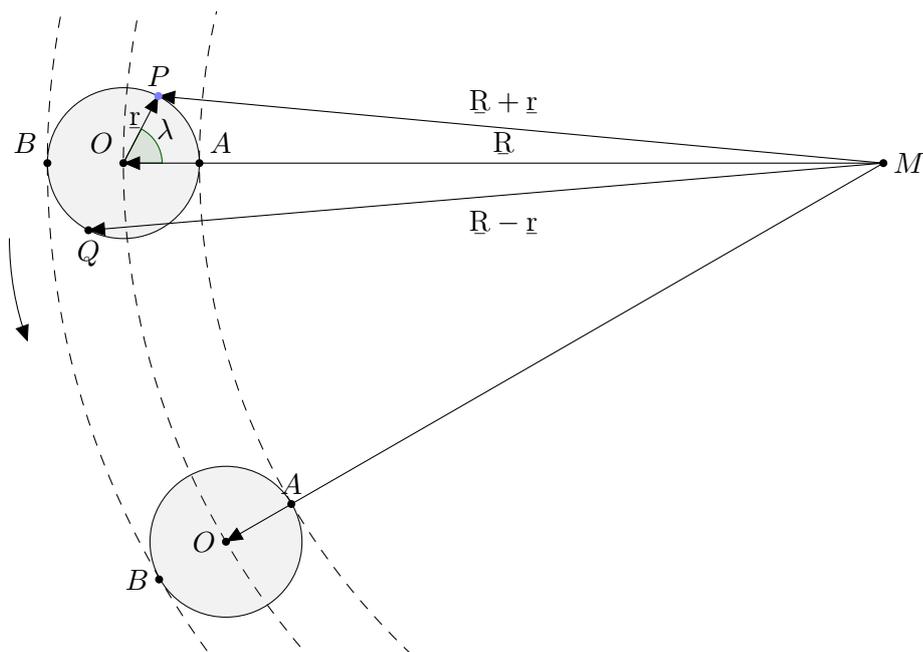


Figura 3.4: Il corpo m è corotante con M .

Appare chiaro che in questa situazione due diversi punti del corpo esteso percorrono attorno ad M orbite di ampiezza diversa, perciò avranno anche diverso potenziale centrifugo.

Teorema 3.2. *Il potenziale mareale totale (dato sia dal contributo gravitazionale che da quello centrifugo) nel caso di un corpo corotante è*

$$\varphi_{\text{tide}}(r, \lambda) \simeq -\frac{GM}{R} \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \lambda}{2}.$$

Dimostrazione. Si avrà

$$\begin{aligned}\varphi_C(P) &= -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^2 = -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2 (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \lambda) \\ \varphi_C(Q) &= -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2|\mathbf{R} - \mathbf{r}|^2 = -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2 (R^2 + r^2 + 2Rr \cos \lambda), \\ \varphi_C(O) &= -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2 R^2\end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned}\varphi_C(P) - \varphi_C(O) &= -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2 (r^2 - 2Rr \cos \lambda) \\ \varphi_C(Q) - \varphi_C(O) &= -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2 (r^2 + 2Rr \cos \lambda)\end{aligned}$$

Come nel caso della differenza di potenziale gravitazionale calcolata prima, il termine in r non darà nessuna differenza di forza tra P e Q . L'unica differenza di forza (mareale) sarà data dal termine quadratico in r ; precisamente

$$\varphi_C(r, \lambda) = -\frac{1}{2}n_{\text{orb}}^2 r^2 = -\frac{1}{2} \frac{GM}{R^3} r^2 = -\frac{1}{2} \frac{GM}{R} \frac{r^2}{R^2},$$

in quanto per la terza legge di Keplero $n_{\text{orb}}^2 R^3 = GM$. \square

3.2 Calcolo del campo delle forze mareali

Grazie a quanto trovato nel precedente paragrafo per il potenziale mareale, possiamo ora calcolare il campo delle forze mareali (per unità di massa) in ogni punto del corpo esteso; detta a l'accelerazione mareale con componenti radiale a_r e tangenziale a_t , si ha

$$\begin{cases} a_r = -\frac{\partial \varphi_{\text{tide}}}{\partial r}(r, \lambda) \\ a_t = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{\text{tide}}}{\partial \lambda}(r, \lambda) \end{cases}.$$

Discutiamo separatamente i due casi.

3.2.1 Caso di assetto fisso

Vale il seguente risultato:

Proposizione 3.1. *La componente radiale dell'accelerazione mareale nel caso del corpo esteso con assetto fisso nello spazio è data da*

$$a_r(r, \lambda) \simeq \frac{2GMr}{R^3} \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2}$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal sistema scritto ad inizio paragrafo e dal calcolo del potenziale mareale già effettuato nel caso del corpo in assetto fisso. \square

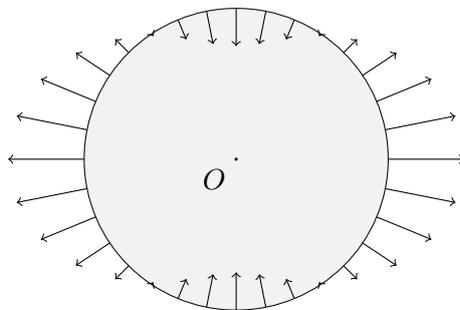


Figura 3.5: Componente radiale dell'accelerazione di marea sul piano equatoriale, caso ad assetto fisso.

Consideriamo la funzione $f(\lambda) = \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2}$, vista come funzione periodica di periodo π . Questa è positiva (e al più 1) per

$$\lambda \leq \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 55^\circ \quad \text{o} \quad 125^\circ \simeq \pi - \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \lambda \leq \pi.$$

Dunque le forze mareali radiali si annullano nei punti corrispondenti a $\lambda = \pm 55^\circ$ e $\lambda = \pm 125^\circ$ e hanno l'andamento qualitativo mostrato in figura 3.5. In particolare esse assumono valore massimo per $\lambda = k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), pari a

$$a_r^{\max} = \frac{2GMr}{R^3},$$

e minimo per $\lambda = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), pari a

$$a_r^{\min} = \frac{GMr}{R^3}.$$

Osservazione 3.2. In ogni punto del corpo esteso la forza mareale indicata (per unità di massa) si somma alla locale accelerazione di gravità del corpo esteso, variandone quindi leggermente il valore. Cioè, un osservatore sulla superficie del corpo peserà leggermente di più o di meno a seconda di dove si trovi. La variazione di peso di modulo massimo (comunque negativa) si avrà per $\lambda = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), e sarà esattamente pari a

$$\left. \frac{a_r}{g} \right|_{\lambda=k\pi} \simeq \frac{\frac{GM}{R^2}}{\frac{Gm}{r^2}} \cdot 2 \frac{r}{R} = 2 \frac{M}{m} \frac{r^3}{R^3}.$$

Nel caso specifico della Terra, l'influsso mareale della Luna e del Sole non è molto evidente. Dunque non saranno queste forze mareali a generare fenomeni macroscopici come le ondate di marea sulla Terra, come mostra il seguente esempio:

Esempio 3.1. Valutiamo, nel caso delle maree prodotte dalla Luna sulla Terra e nel caso delle maree prodotte dal Sole sulla Terra, il rapporto tra componente radiale dell'accelerazione mareale e accelerazione gravitazionale in prossimità della superficie terrestre.

Nel primo caso, si tratta di valutare la quantità

$$\frac{\frac{2Gm_{\zeta}R_{\oplus}}{d_{\oplus\zeta}^3}}{\frac{Gm_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}} = 2 \frac{m_{\zeta}}{m_{\oplus}} \frac{R_{\oplus}^3}{d_{\oplus\zeta}^3}.$$

Prima di effettuare il calcolo, osserviamo che tale rapporto cresce proporzionalmente con la massa del corpo che genera la marea (la Luna, in questo caso) e diminuisce al crescere della distanza reciproca tra i due corpi. Sostituendo i dati che conosciamo, otteniamo il valore $1.2 \cdot 10^{-7}$. Ne segue che, quando la Luna si trova allo zenit, pesiamo un decimilionesimo in meno rispetto al nostro peso reale.

Nel secondo caso, dobbiamo calcolare

$$\frac{\frac{2Gm_{\odot}R_{\oplus}}{d_{\oplus\odot}^3}}{\frac{Gm_{\oplus}}{R_{\oplus}^2}} = 2 \frac{m_{\odot}}{m_{\oplus}} \frac{R_{\oplus}^3}{d_{\oplus\odot}^3} \simeq 5.4 \cdot 10^{-8}.$$

È facile, a questo punto, controllare il rapporto tra le componenti radiali delle accelerazioni mareali lunare e solare: si tratta del numero

$$\frac{1.2 \cdot 10^{-7}}{5.4 \cdot 10^{-8}} \simeq 2.2.$$

Passiamo adesso all'analisi della componente trasversale dell'accelerazione mareale:

Proposizione 3.2. *La componente trasversa dell'accelerazione mareale nel caso del corpo in assetto fisso è data da*

$$a_t(r, \lambda) \simeq -3 \frac{GMr}{R^3} \cos \lambda \sin \lambda = -\frac{3}{2} \frac{GMr}{R^3} \sin 2\lambda.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal sistema scritto ad inizio paragrafo e dal calcolo del potenziale mareale già effettuato. \square

Dunque nel piano equatoriale del corpo esteso, in funzione della longitudine λ , l'andamento della componente trasversa della forza di marea è quella della funzione $\sin 2\lambda$, che si annulla per $\lambda = k\frac{\pi}{2}$ (con $k \in \mathbb{Z}$), mentre è massima in modulo per $\lambda = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ (con $k \in \mathbb{Z}$), con modulo

$$a_t^{\max} = \frac{3}{2} \frac{GMr}{R^3}.$$

Appare evidente che la componente trasversa della forza mareale è quella che causa la formazioni di rigonfiamenti (*bulges*) mareali lungo la congiungente tra i due corpi, sia a longitudine $\lambda = 0$ (dunque verso lo *zenit*), sia a longitudine $\lambda = \pi$ (ossia verso il *nadir*).

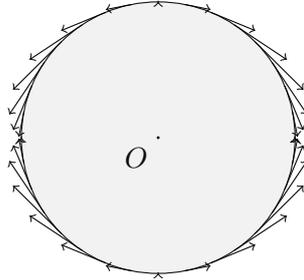


Figura 3.6: Componente trasversa dell'accelerazione di marea sul piano equatoriale, caso di assetto fisso.

Osservazione 3.3. Il fatto che le funzioni di λ coinvolte siano (nell'approssimazione al terzo ordine) sempre periodiche di periodo π , significa che la marea risultante avrà un periodo pari alla metà del *periodo sinodico* del corpo (ossia all'intervallo di tempo dopo il quale un osservatore sul corpo esteso si ritrova nella stessa posizione rispetto al corpo M che genera la marea); questo accade in quanto λ è la longitudine misurata rispetto alla congiungente tra i centri di massa dei due corpi.

Nel piano perpendicolare all'asse di rotazione del corpo esteso (ad esempio la Terra), la marea ha un periodo pari alla metà del periodo di rotazione sinodica del corpo generatore della marea.

3.2.2 Caso corotante

Adesso calcoliamo la componente radiale e trasversale dell'accelerazione mareale nel caso in cui il corpo esteso è corotante con l'altro.

Proposizione 3.3. *La componente radiale dell'accelerazione mareale nel caso del corpo esteso corotante col primario è data da*

$$a_r(r, \lambda) \simeq \frac{3GMr}{R^3} \cos^2 \lambda$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal sistema scritto ad inizio paragrafo e dal calcolo del potenziale mareale già effettuato nel caso del corpo corotante col primario. \square

In tal caso l'andamento di a_r è dato da quello di $\cos^2 \lambda$: questa funzione è sempre positiva eccetto che per $\lambda = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ e l'accelerazione mareale radiale non è mai negativa (figura 3.7). Anche in tal caso ovviamente la diminuzione di peso prodotta dalla componente radiale della forza di marea è trascurabile.

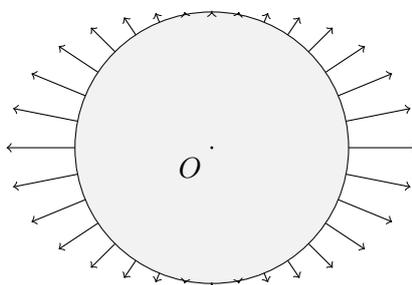


Figura 3.7: Componente radiale dell'accelerazione di marea sul piano equatoriale, caso corotante.

Come prima, uno studio della funzione $g(\lambda) = \cos^2 \lambda$ ci dà informazioni sul modulo della componente radiale. Tale modulo è massimo e vale

$$a_r^{\max} = \frac{3GMr}{R^3}$$

se $\lambda = 0, \pi$; è minimo e nullo se $\lambda = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$. Per quanto riguarda la componente trasversale, ci limitiamo a osservare che ha lo stesso andamento del caso ad assetto fisso.

3.3 Calcolo dell'altezza della marea

Ci dedichiamo ora allo studio di uno dei principali effetti delle forze mareali: lo spostamento delle acque. Lo studieremo sia nel caso ad assetto fisso, sia nel caso corotante, combinando i due otterremo il caso della Terra. Supporremo che la Terra sia un corpo solido ricoperto totalmente da un sottile strato di acqua, e che quest'ultima si comporti come un *fluido perfetto* capace di rispondere istantaneamente alla forza di marea. Per effetto delle forze mareali, ogni punto massa di questo fluido si sposterà fino a raggiungere una certa posizione di equilibrio.

3.3.1 Caso di assetto fisso

Teorema 3.3. *Sotto le ipotesi fatte, detta g l'accelerazione locale di gravità, l'altezza della marea è data da*

$$h_{\text{tide}}(r, \lambda) = \frac{1}{g} \frac{GM r^2}{R^3} \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2}. \quad (3.2)$$

Dimostrazione. Dal fatto che il potenziale mareale è dato da

$$\varphi_{\text{tide}}(r, \lambda) \simeq -\frac{GM}{R} \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2}$$

segue immediatamente che l'altezza della marea è data dall'espressione

$$h_{\text{tide}}(r, \lambda) = -\frac{1}{g} \varphi_{\text{tide}}(r, \lambda),$$

da cui la tesi. \square

Dunque l'andamento dell'altezza della marea sarà determinato dalla solita funzione $f(\lambda) = \frac{3 \cos^2 \lambda - 1}{2}$. In particolare si può osservare che, rispetto alla "crosta terrestre" l'altezza dell'alta marea sarà doppia rispetto a quella della bassa marea.

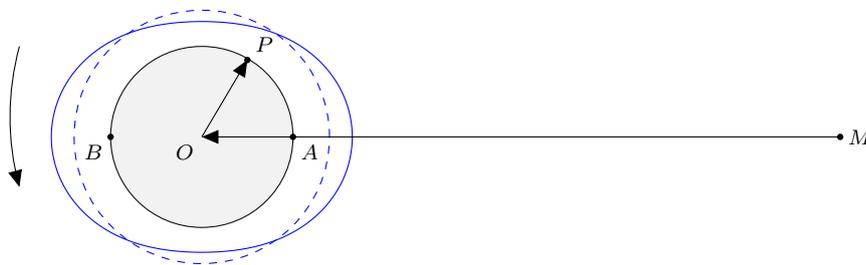


Figura 3.8: Superficie equipotenziale nel caso di assetto fisso.

Osservazione 3.4. Supponiamo che il corpo esteso abbia anche una certa rotazione attorno ad un asse perpendicolare al piano orbitale; è evidente che ogni suo punto all'equatore completa il ciclo della marea in un tempo pari alla metà del periodo di rotazione sinodica rispetto alla massa puntiforme M : infatti il periodo della funzione $f(\lambda)$ è pari a π .

Se invece non ci fosse rotazione propria, ossia se il corpo fosse in assetto fisso, allora ogni punto dell'oggetto subirebbe una sollecitazione mareale con un periodo pari alla metà del periodo di rivoluzione orbitale attorno ad M . Dunque se il corpo fosse dotato di una certa elasticità si deformerebbe con questo periodo. Al contrario, se il punto considerato del corpo fosse libero di muoversi al suo interno, allora si muoverebbe facendo un giro in un intero periodo orbitale.

3.3.2 Caso corotante

Analizziamo, adesso, il caso corotante. Con un ragionamento analogo a quello fatto precedentemente si ottiene l'altezza di marea:

Teorema 3.4. *Sotto le stesse ipotesi, l'altezza della marea è data da*

$$h_{\text{tide}}(r, \lambda) = -\frac{1}{g} \varphi_{\text{tide}}(r, \lambda) = \frac{1}{g} \frac{GM r^2}{R^3} \frac{3 \cos^2 \lambda}{2}$$

Dimostrazione. Nel caso del corpo rigido corotante, come già trovato in precedenza, il potenziale mareale è

$$\varphi_{\text{tide}}(r, \lambda) \simeq -\frac{GM}{R} \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \lambda}{2}.$$

Si conclude come nel precedente teorema. \square

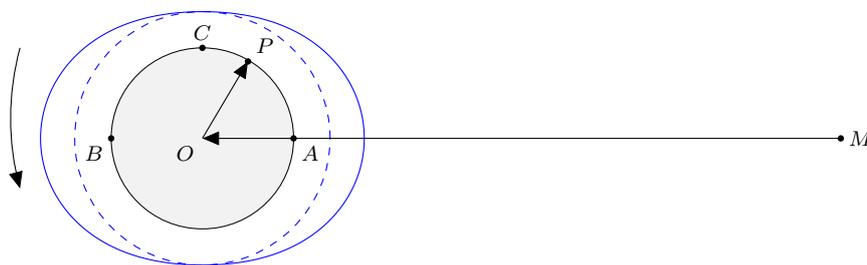


Figura 3.9: Superficie equipotenziale nel caso corotante.

In questo caso, l'altezza cambia come la funzione $g(\lambda) = \cos^2 \lambda$. Si osservi che, durante l'orbita, i punti A e B (vedere figura 3.9) restano sulla congiungente OM , per cui per loro si ha sempre il massimo della marea; analogamente, l'altezza di marea è sempre minima in C .

Osservazione 3.5. Degno di nota è il fatto che su ogni punto della superficie del corpo l'altezza della marea è sempre costante.

3.3.3 Il caso della Terra

Vogliamo studiare gli effetti mareali del Sole e della Luna sulla Terra, supponendo che quest'ultima sia ricoperta di un fluido perfetto che risponde istantaneamente alla forza di marea. In linea di principio questo non rientra in nessuno dei casi precedenti, in quanto la Terra ruota attorno a se stessa con una velocità angolare ω_{spin} non nulla e diversa dalle velocità angolari medie di rotazione $n_{\text{orb},\oplus\ominus}$ e $n_{\text{orb},\oplus\odot}$.

Possiamo sfruttare il fatto che la velocità di rotazione della Terra attorno al proprio asse è molto maggiore delle velocità angolari medie degli altri due corpi: si può pensare che in 24 ore la Terra sia fissa rispetto a questi due corpi e quindi possiamo immaginare che il loro effetto mareale sulla Terra sia come quello nel caso ad assetto fisso, cioè con potenziale dato dalla (3.1). A questo punto, teniamo conto della rotazione della Terra attorno al proprio asse per ottenere la periodicità con cui si verificano i fenomeni mareali (figura 3.10):

- nel caso Terra–Sole ogni punto compie un ciclo completo di marea in 12 ore, in quanto il giorno solare è di 24 ore;
- nel caso Terra–Luna ogni punto compie un ciclo completo di marea in 12 ore e 25 minuti, in quanto il giorno sinodico lunare è di 24 ore e 50 minuti.

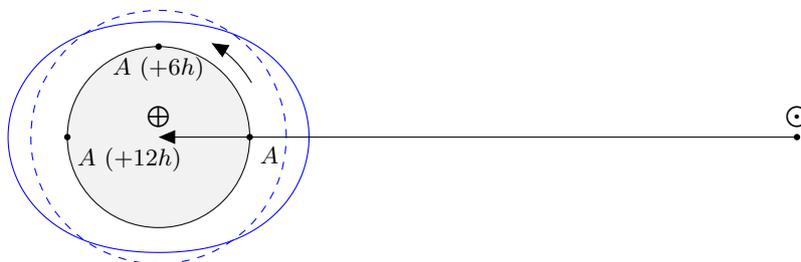


Figura 3.10: Effetti mareali nel caso Terra–Sole.

Calcoliamo, adesso, le ampiezze delle maree del Sole e della Luna sulla Terra. Abbiamo già osservato che

$$\frac{\varphi_{\text{tide}\mathcal{C}}}{\varphi_{\text{tide}\odot}} \simeq 2.2.$$

Per gli effetti della marea solare si ha

$$h_{\text{max},\odot} = \frac{1}{g} \frac{GM_{\odot} R_{\oplus}^2}{d_{\oplus\odot}^3} \simeq 16.3 \text{ cm}$$

$$|h_{\text{min},\odot}| = \frac{1}{2} h_{\text{max},\odot} \simeq 8.2 \text{ cm},$$

mentre per quella lunare

$$h_{\text{max},\mathcal{C}} = \frac{1}{g} \frac{GM_{\mathcal{C}} R_{\oplus}^2}{d_{\odot\mathcal{C}}^3} \simeq 36 \text{ cm}$$

$$|h_{\text{min},\mathcal{C}}| = \frac{1}{2} |h_{\text{min},\odot}| \simeq 18 \text{ cm}.$$

Otteniamo i seguenti valori per le ampiezze di marea:

$$A_{\odot} \simeq 24.5 \text{ cm} \quad \text{e} \quad A_{\mathcal{C}} \simeq 54 \text{ cm}.$$

Naturalmente, tali effetti mareali interagiscono tra di loro:

1. nelle fasi di Luna Piena e Luna Nuova (in cui, rispettivamente, la Terra si trova tra Sole e Luna e la Luna si trova tra Terra e Sole, figura 3.11) gli effetti mareali si sommano e l'ampiezza di marea può raggiungere, a mezzanotte e a mezzogiorno, in mare aperto e in fondali di profondità non variabile, il valore

$$A_{\odot} + A_{\mathcal{C}} \simeq 78 \text{ cm}.$$

Questo è in effetti il valore che si ha in mare aperto o su grandi distese di acqua e in presenza di fondali a profondità non variabile;

2. al contrario, nelle fasi lunari di primo e ultimo quarto (fasi di *quadratura*) Terra, Sole e Luna formano un triangolo rettangolo. Quindi all'alba e al tramonto si ha la massima marea lunare e la minima marea solare; analogamente, a mezzogiorno e a mezzanotte delle stesse fasi lunari si ha la minima marea lunare e la massima marea solare. È evidente che in tali due casi la marea totale sulla Terra sarà minima.

Osserviamo, per concludere, che si possono riscontrare maree di entità maggiori vicino alle coste o in prossimità di fondali molto irregolari.

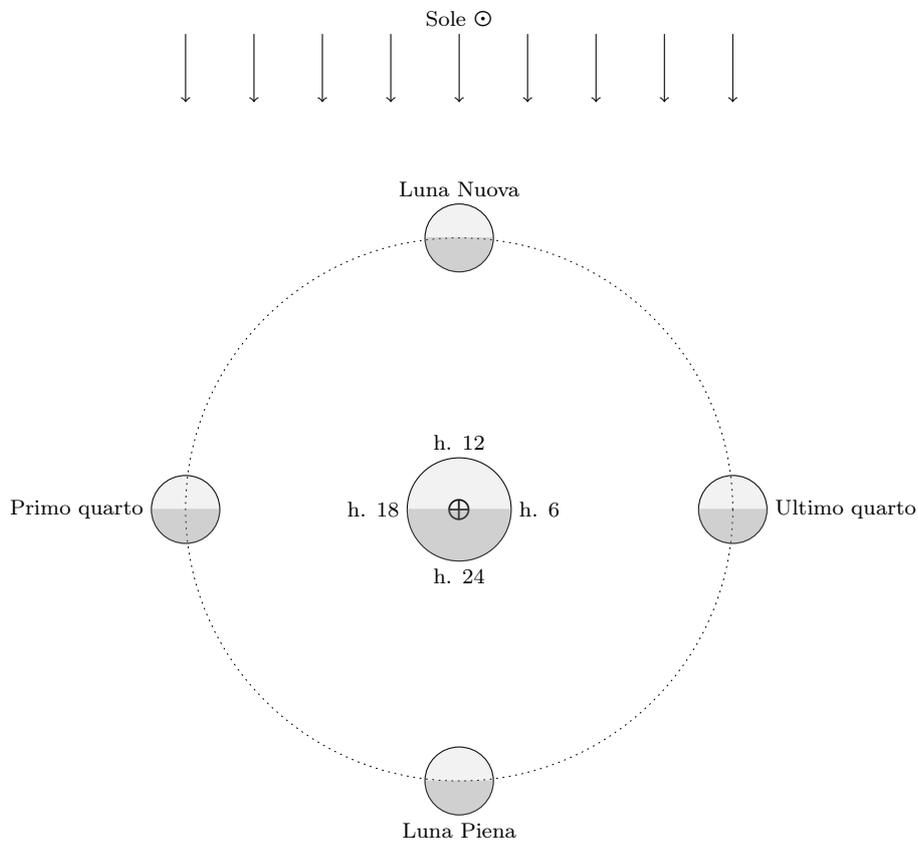


Figura 3.11: Le fasi lunari. Sono rappresentati i punti della Terra in cui è alba, mezzogiorno, tramonto, mezzanotte.

3.3.4 Maree sulla Terra in tre dimensioni

Consideriamo il piano individuato dal vettore \mathbf{R} (che congiunge il corpo puntiforme M che genera la marea con il centro della Terra) e dall'asse di rotazione della Terra. Consideriamo il meridiano terrestre individuato da questo piano. Detta φ la latitudine di un punto su tale meridiano, possiamo ivi calcolare il potenziale mareale in funzione del raggio terrestre e di φ .

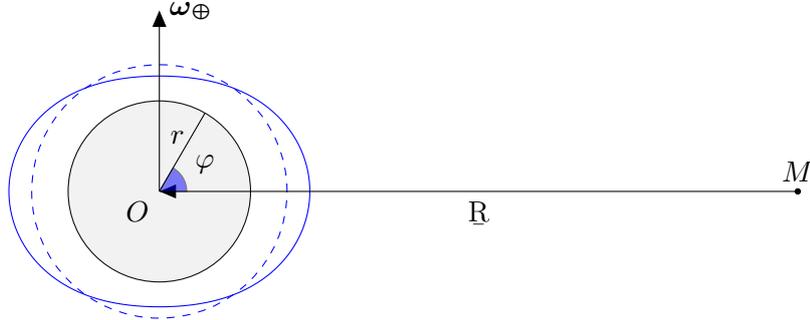


Figura 3.12: Superficie equipotenziale in un meridiano terrestre.

Possiamo considerare prima il caso dell'assetto fisso nello spazio e, una volta calcolato tale potenziale, teniamo conto della rotazione propria della Terra rispetto al corpo generatore della marea per ricavare il periodo della marea su ogni punto della superficie terrestre. Sotto queste ipotesi, sempre ferdandoci nei calcoli al termine di secondo grado in $\frac{r^2}{R^2}$, abbiamo un risultato perfettamente analogo a quello già ottenuto in precedenza, solo che in questo caso l'angolo è la latitudine φ (a partire dalla congiungente i centri di massa) invece che la longitudine λ : $\varphi_{\text{tide}}(r, \varphi) \simeq -\frac{GM}{R} \frac{r^2}{R^2} \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2}$, che darà luogo, lungo il meridiano considerato, ad un'altezza mareale pari a

$$h_{\text{tide}}(r, \varphi) = -\frac{1}{g} \varphi_{\text{tide}}(r, \varphi) = \frac{1}{g} \frac{GM}{R^3} \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2}$$

e quindi ad una superficie equipotenziale del tipo indicato in figura 3.12. A questo punto possiamo renderci conto della situazione mareale in tre dimensioni sulla Terra, come mostra la figura 3.13.

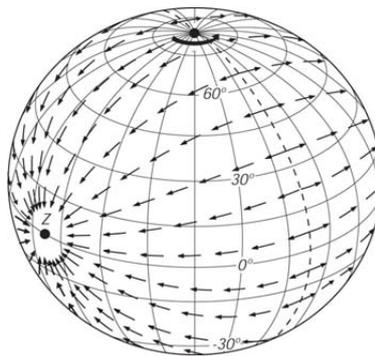


Figura 3.13: Componente trasversa dell'accelerazione mareale sulla Terra.

3.4 Attrito delle maree

In questo paragrafo analizzeremo, in maniera quasi esclusivamente qualitativa, l'effetto dell'attrito tra la crosta terrestre solida e lo strato soprastante di acqua sottoposto alle forze mareali. Le quantità fisiche rilevanti saranno la velocità angolare di rotazione propria del pianeta $\omega_{\text{spin,pian}}$ e la velocità angolare orbitale del corpo puntiforme, vista come corpo puntiforme; poniamo che questi vettori siano paralleli e dello stesso verso.

3.4.1 Caso della rotazione lenta

Consideriamo il caso in cui il corpo su cui studiamo la marea ha una velocità di rotazione propria molto minore della rotazione attorno al corpo generatore di marea: $\omega_{\text{spin}} \ll n_{\text{orb}}$. A causa dell'attrito, i lobi mareali resteranno indietro rispetto alla congiungente dei centri dei due corpi (figura 3.14).

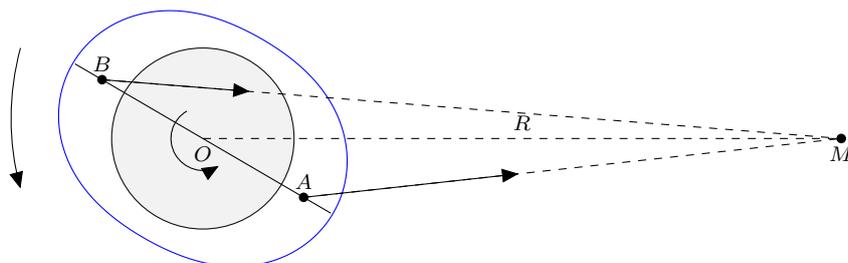


Figura 3.14: Attrito delle maree: caso di rotazione lenta.

A causa della diversa distanza dal corpo M , questi lobi saranno allora soggetti a forze di attrazione gravitazionali da parte di M diverse in modulo e direzione. Si creerà, quindi, un momento non nullo \underline{N} , del cui modulo possiamo stabilire una relazione di proporzionalità.

Proposizione 3.4. *Per il modulo del momento \underline{N} vale la seguente relazione di proporzionalità:*

$$N \propto \frac{r^5}{R^6}.$$

Dimostrazione. Schematizziamo le due forze come agenti su punti di applicazione opposti rispetto ad O . Avremo allora che il momento \underline{N} risultante sarà dato dal prodotto vettoriale tra il braccio e la differenza delle forze agenti sui due lobi:

$$\underline{N} = \underline{r} \times (\underline{F}_1 - \underline{F}_2).$$

La forza $\underline{F}_1 - \underline{F}_2$ risulta una forza mareale ed è data dal prodotto tra l'accelerazione mareale e la massa dei lobi sollevata dalla marea. Ricapitolando, il modulo del momento \underline{N} sarà dato dal prodotto di:

- braccio del momento, uguale ad r ;
- accelerazione mareale presente tra i due lobi, proporzionale a r/R^3 ;
- massa dei *bulges*.

Per ottenere la tesi, resta solo da verificare che la massa dei *bulges* sia proporzionale a r^3/R^3 . Tale massa è chiaramente data dal prodotto del suo volume per la densità ρ del fluido (che supponiamo essere uguale alla densità del corpo). Approssimando la forma assunta dal corpo su cui agisce la marea con un ellissoide di semiassi $(r + h_{\max}, r, r)$, dove h_{\max} è il valore dell'altezza della marea all'equatore, il volume dei lobi è dato dalla differenza tra il volume dell'ellissoide e quello della sfera:

$$\frac{4}{3}\pi r^2(r + h_{\max}) - \frac{4}{3}\pi r^3 \propto r^2 h_{\max}.$$

Ne segue che $m_{\text{bulges}} \propto \rho \cdot r^2 h_{\max}$. Osservando che $\rho \propto 1/r^3$ e che $h_{\max} \propto r^4/R^3$ (vedi la (3.2), ricordando che $g \propto 1/r^2$), concludiamo che

$$m_{\text{bulges}} \propto \frac{1}{r^3} \cdot r^2 \cdot \frac{r^4}{R^3} = \frac{r^3}{R^3},$$

e abbiamo concluso. \square

L'effetto del momento meccanico \mathbb{N} sarà dunque quello di aumentare la velocità di rotazione propria della Terra. Ricordiamo che il momento angolare totale del sistema, dato dalla somma di una componente dovuta alla rotazione propria del corpo m e da una componente dovuta alla rotazione attorno a M , deve conservarsi. Come abbiamo appena visto, la prima componente aumenta in modulo, quindi l'altra dovrà diminuire: come conseguenza la distanza orbitale dovrà diminuire a sua volta.¹ Al calare di quest'ultima, l'intensità di \mathbb{N} aumenterà ulteriormente, portando ad una diminuzione ancora più significativa della distanza orbitale. Questo processo si ripeterà finché le forze mareali (radiali) sul corpo diventeranno così grandi da superare quelle gravitazionali e/o di stato solido, e quindi tali da spaccarlo.

Osservazione 3.6. Poiché le considerazioni fatte fin qui valgono anche quando si considera la marea sollevata dal pianeta (stavolta assunto puntiforme) sul satellite, si deduce che nessun pianeta può avere un satellite tanto vicino da indurre degli effetti mareali non trascurabili, che abbia un periodo di rotazione propria più lungo del suo periodo orbitale attorno al pianeta stesso. Tale satellite infatti sarebbe destinato ad essere distrutto in base al meccanismo appena descritto.

¹ricordiamo che $j^2 = G(M + m)a(1 - e^2)$.

3.4.2 Caso della rotazione veloce

Analizziamo il caso in cui il corpo esteso su cui agisce la marea ruoti molto più lentamente attorno al corpo generatore della marea di quanto non lo faccia attorno a se stesso e che queste rotazioni avvengano nello stesso piano. Supponiamo, cioè, che $\omega_{\text{spin}} \gg n_{\text{orb}}$ e che questi vettori siano paralleli e con stesso verso. È evidente che i lobi mareali saranno trascinati in avanti, rispetto alla congiungente dei centri di massa, dalla rotazione del corpo attorno a se stesso (figura 3.15).

Anche stavolta si produrrà un momento meccanico che soddisfa la stessa relazione di proporzionalità data nel precedente paragrafo.

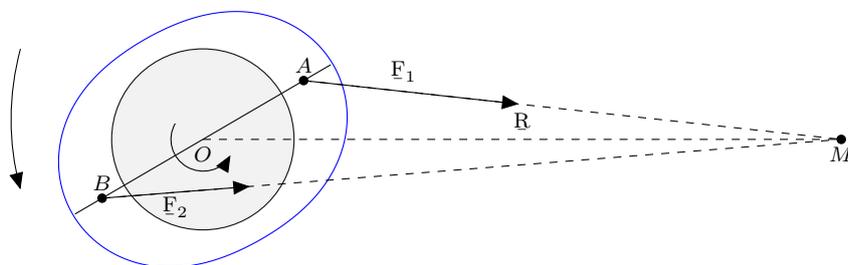


Figura 3.15: Attrito delle maree: caso di rotazione veloce.

Una prima immediata conseguenza dell'attrito delle maree è l'allungamento del giorno nel corpo rotante. Ciò è dovuto alla presenza del momento \mathbb{N} , che causa una diminuzione della velocità angolare di rotazione ω_{spin} . Per la conservazione del momento angolare, l'altra componente del momento angolare dovrà aumentare, e come conseguenza la distanza orbitale dovrà aumentare a sua volta: pertanto, i due corpi tenderanno ad allontanarsi. Tutto ciò avverrà fino al raggiungimento della condizione $\omega_{\text{spin}} = n_{\text{orb}}$, ossia fino al raggiungimento dello stato di corotazione del corpo esteso rispetto al corpo che genera la marea.

Questo è il ragionamento che vale in generale, vediamo adesso come si specifica nel caso di un pianeta con il proprio satellite. Dapprima si considerano le forze mareali esercitate dal pianeta (supposto dunque puntiforme) sul satellite, vediamo un esempio:

Esempio 3.2. Ad oggi la Luna è in stato di corotazione con la Terra. Non conosciamo quali fossero le velocità di rotazione propria $\omega_{\text{spin},\mathcal{C}}$, velocità orbitale n_{orb} e distanza R della Luna dalla Terra al momento della sua formazione, ma, per quanto visto nei paragrafi precedenti, possiamo escludere che fosse $\omega_{\text{spin},\mathcal{C}} < n_{\text{orb}}$, altrimenti la Luna sarebbe andata distrutta. Doveva dunque essere $\omega_{\text{spin},\mathcal{C}} > n_{\text{orb}}$.

Per quanto visto subito prima dell'osservazione, si è attivato un processo evolutivo del sistema Terra–Luna in cui le due si sono allontanate sempre più e la Luna ha diminuito la sua velocità di rotazione propria fino a che non si è avuto $\omega_{\text{spin},\mathcal{C}} = n_{\text{orb}}$, che è la situazione di corotazione attuale. Ovviamente il ragionamento fatto è valido in generale.

Quindi nel caso di rotazione veloce del satellite si arriverà allo stato di corotazione del satellite. Dopo ciò bisogna considerare la marea sollevata dal satellite (stavolta supposto puntiforme) sul pianeta, e l'effetto dell'attrito di questa marea. Di nuovo si possono avere i due casi di rotazione lenta o rotazione veloce del pianeta:

- nel primo caso, ossia nel caso $\omega_{\text{spin, pian}} < n_{\text{orb}}$, l'attrito della marea sollevata dal satellite sul pianeta tenderà ad aumentare la velocità angolare di rotazione del pianeta attorno al proprio asse e a diminuire la distanza mutua dei due corpi, e quindi ad aumentare la velocità angolare orbitale (come segue dalla terza legge di Keplero). Questo a sua volta modifica lo stato di corotazione del satellite, portando il satellite nella condizione di rotazione lenta. L'effetto complessivo è un avvicinamento sempre più rapido del satellite fino alla sua distruzione, come già descritto in precedenza. Nel Sistema Solare un esempio di tale evoluzione è dato dal sistema Marte–Phobos.
- invece nel caso della rotazione veloce, l'attrito della marea indotta dal satellite sul pianeta avrà per effetto quello di rallentare la rotazione propria del pianeta e di aumentare la distanza pianeta-satellite. Il sistema tende ad uno stato finale di equilibrio in cui

$$\omega_{\text{spin,pian}} = \omega_{\text{spin,sat}} = n_{\text{orb}}.$$

Un tale sistema si dice *sincrono*, ossia pianeta e satellite si rivolgono mutualmente sempre la stessa faccia. L'unico esempio di tale sistema noto nel Sistema Solare è quello del pianeta Plutone e del suo satellite Caronte.

Osservazione 3.7. Il sistema Terra–Luna rientra nel caso di rotazione veloce quando si considera la Terra come corpo esteso: infatti $\omega_{\text{spin},\oplus} \simeq 29n_{\text{orb},\oplus}$. Però l'evoluzione del sistema Terra–Luna non si sposta verso lo stato sincrono perché il Sole è ancora abbastanza vicino alla Terra.

3.4.3 La marea del sole nel Sistema Solare

Le maree dovute al Sole hanno un effetto rilevante solo sul pianeta più vicino, Mercurio. La sua orbita è molto eccentrica, $e_{\text{☿}} \simeq 0.2$, e questo porta ad avere

$$\frac{\omega_{\text{spin},\text{☿}}}{n_{\text{orb},\text{☿}\odot}} \simeq \frac{3}{2},$$

con una rotazione propria molto lenta. Tuttavia Mercurio non rivolge sempre la stessa faccia al Sole, e questo è dovuto proprio anche alla grande eccentricità della sua orbita; infatti il momento \mathbb{N} dipende fortemente dalla distanza, perciò Mercurio volge la stessa faccia al Sole in prossimità del perielio ma non dell'afelio. Questo è possibile con una velocità angolare di rotazione una volta e mezzo più grande di quella orbitale.

Le maree solari hanno contribuito all'assenza di satelliti per i pianeti Mercurio e Venere. Se Mercurio avesse avuto un satellite con $\omega_{\text{spin},\text{sat}} > n_{\text{orb},\text{sat}\text{☿}}$ (altrimenti sarebbe andato distrutto), questo sarebbe arrivato alla corotazione. Nell'evoluzione successiva, per non avere distruzione del satellite, si sarebbe dovuto avere $\omega_{\text{spin},\text{☿}} > n_{\text{orb},\text{sat}\text{☿}}$, ma questo non è possibile per la lentezza di Mercurio.²

²si può calcolare esplicitamente quale dovrebbe essere la velocità di rotazione di un satellite attorno a Mercurio: basta calcolare il raggio di Hill di Mercurio e poi usare l'equazione $v^2 = GM_{\text{tot}} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$.

Capitolo 4

La Terra come sferoide oblato

Finora abbiamo studiato fenomeni astronomici in cui non interveniva la particolare forma dei corpi celesti. Anzi, abbiamo sempre supposto che questi fossero puntiformi o, se estesi, a simmetria sferica. Quando parliamo dei fenomeni che interessano la Terra, però, non possiamo più trascurare il fatto che questa è ben lontana dall'essere perfettamente sferica: le correzioni apportate al potenziale gravitazionale terrestre che tengono conto di ciò sono anche dell'ordine del millesimo, quindi non ignorabili.

In questo capitolo studieremo la forma effettiva della Terra, analizzando le cause della sua non sfericità, e vedremo a quali fenomeni dà origine.

4.1 Il potenziale di uno sferoide oblato

Come giustificheremo nel seguito, la Terra è approssimabile ad uno *sferoide oblato*, il solido ottenuto ruotando un'ellisse di semiassi a, b con $a > b$ attorno al suo semiasse minore. A tal proposito, sarà fondamentale avere a disposizione la forma del potenziale gravitazionale generato da un tale oggetto. Quello che faremo in questa sezione è procurarci uno sviluppo in serie di tale potenziale troncato ad un opportuno termine.

Si consideri, dunque, in \mathbb{R}^3 uno sferoide oblato di semiassi a e b e massa M , con il centro di massa posto nell'origine di un sistema di riferimento di assi xyz . Sia $P = (x, y, z)$ il generico punto in cui vogliamo calcolare il potenziale e \underline{r} il suo vettore posizione; sia $\underline{\rho}$ il vettore posizione del generico punto dello sferoide (figura 4.1). Supporremo $\rho/r \ll 1$, e trascureremo termini di ordine superiore a ρ^2/r^2 .

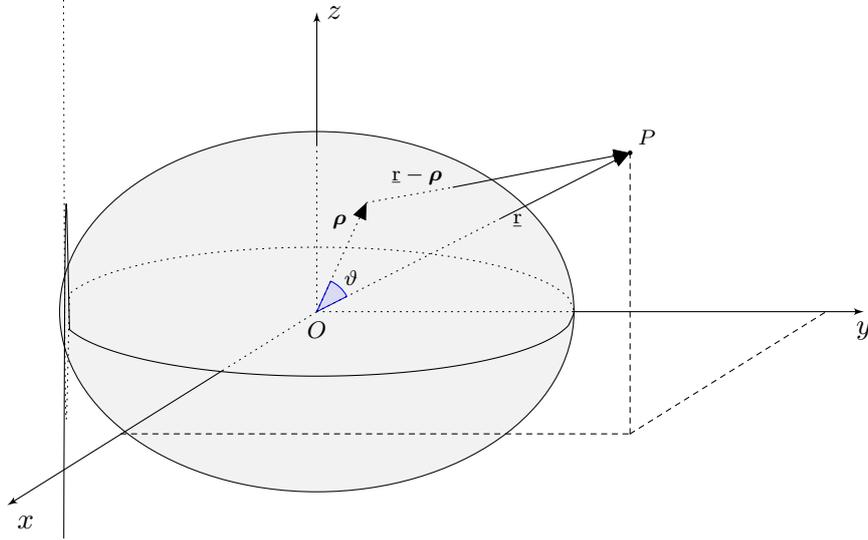


Figura 4.1: Uno sferoide oblato.

Teorema 4.1. *Con le notazioni appena esplicitate, il potenziale gravitazionale di un corpo a simmetria assiale è*

$$U = -\frac{G}{r} \int dm - \frac{G}{r} \int \frac{\rho}{r} \cos \vartheta dm - \frac{G}{r} \int \frac{\rho^2}{r^2} \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2} dm + o\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

Dimostrazione. Il potenziale dello sferoide nel punto P ha la forma

$$U(x, y, z) = -G \int \frac{dm}{|\underline{r} - \underline{\rho}|}. \quad (4.1)$$

Per sviluppare usiamo la seguente espressione:

$$|\underline{r} - \underline{\rho}| = (r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \vartheta)^{\frac{1}{2}},$$

dove ϑ è l'angolo compreso tra i vettori \underline{r} e $\underline{\rho}$. Sostituendo nella (4.1) e mettendo in evidenza un fattore r , otteniamo:

$$U(x, y, z) = -G \int \frac{dm}{r \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \vartheta\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

A questo punto utilizziamo lo sviluppo

$$\frac{1}{(1 + \varepsilon)^{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

con $\varepsilon = \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \vartheta$; otteniamo che

$$\left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} - 2\frac{\rho}{r} \cos \vartheta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\rho}{r} \cos \vartheta + \frac{3 \cos^2 \vartheta - 1}{2} \frac{\rho^2}{r^2} + o\left(\frac{\rho^2}{r^2}\right).$$

Sostituendo nell'espressione del potenziale, otteniamo la tesi. \square

Analizziamo i singoli addendi.

- Il primo termine, U_0 , è il termine di *monopolo* e vale, naturalmente,

$$U_0 = \frac{GM}{r}.$$

- L'addendo U_1 è il termine di *dipolo* e ci aspettiamo che sia nullo. Dimostriamolo: se $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta, \zeta)$, allora

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{G}{r} \int \frac{\rho}{r} \cos \vartheta \, dm = \frac{G}{r^3} \int \boldsymbol{\rho} \cdot \underline{\mathbf{r}} \, dm = \\ &= \frac{G}{r^3} \left(x \int \xi \, dm + y \int \eta \, dm + z \int \zeta \, dm \right) = 0, \end{aligned}$$

perché $(x \int \xi \, dm, y \int \eta \, dm, z \int \zeta \, dm)$ sono le coordinate del centro di massa dello sferoide, che noi abbiamo posto nell'origine.

- L'ultimo termine è detto di *quadrupolo* e vorremmo riscriverlo in modo da comprendere con esattezza da quali grandezze dipende. Per fare ciò, consideriamo un sistema di riferimento di assi XYZ in cui l'asse X coincide con la direzione del vettore $\underline{\mathbf{r}}$. In questo sistema di riferimento abbiamo che, se $\boldsymbol{\rho} = (X, Y, Z)$, allora $X = \rho \cos \vartheta$.

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{G}{2r^3} \int \rho^2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) \, dm = \\ &= \frac{G}{2r^3} \left(\int 3X^2 \, dm - \int \rho^2 \, dm \right) = \\ &= \frac{G}{2r^3} \left(\int 3(X^2 - \rho^2) \, dm + 2 \int \rho^2 \, dm \right) = \\ &= \frac{G}{2r^3} \left(-3 \int (Y^2 + Z^2) \, dm + 2 \int \rho^2 \, dm \right) = \\ &= \frac{G}{2r^3} \int (2\rho^2 - 3(Y^2 + Z^2)) \, dm. \end{aligned} \tag{4.2}$$

A questo punto, poniamo

$$I = \int (Y^2 + Z^2) \, dm,$$

e osserviamo che corrisponde al momento di inerzia dello sferoide nella direzione X . Inoltre, siano A, B, C i momenti di inerzia dello sferoide rispetto agli assi x, y, z , che ci siamo premurati di scegliere come assi principali di inerzia per lo sferoide. In queste notazioni, la (4.2) diventa

$$U_2 = \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3I).$$

L'espressione appena ottenuta non è ancora soddisfacente. In effetti, la simmetria del corpo ci fa aspettare che il potenziale non dipenda dalla longitudine del punto P , ma solo dalla sua inclinazione rispetto all'equatore. Vorremmo rendere evidente questo fatto ed è essenziale usare coordinate polari (r, λ, φ) . In queste coordinate abbiamo che

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Usando che

$$I = \int (Y^2 + Z^2) dm = \int \rho^2 \sin^2 \vartheta d\rho d\vartheta = \frac{1}{r^2} \int |\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{r}|^2 dm,$$

calcoliamo un'espressione di I in coordinate polari. Abbiamo che

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{r})_x &= \eta r \sin \varphi - \zeta r \cos \varphi \sin \lambda \\ (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{r})_y &= \zeta r \cos \varphi \cos \lambda - \xi r \sin \varphi \\ (\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{r})_z &= \xi r \cos \varphi \sin \lambda - \eta r \cos \varphi \cos \lambda, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} I &= \sin^2 \varphi \int (\eta^2 + \xi^2) dm + \cos^2 \varphi \int \zeta^2 dm + \\ &\quad + \cos^2 \varphi \int (\xi^2 \sin^2 \lambda + \eta^2 \cos^2 \lambda) dm; \end{aligned}$$

si osservi che gli integrali $\int \eta \zeta dm$, $\int \eta \xi dm$ e $\int \xi \zeta dm$ sono nulli, in quanto la terna di assi xyz è fatta di assi principali d'inerzia per lo sferoide. Sostituendo $\sin^2 \lambda = 1 - \cos^2 \lambda$, otteniamo l'espressione

$$\begin{aligned} I &= \sin^2 \varphi \int (\eta^2 + \xi^2) dm + \cos^2 \varphi \int (\zeta^2 + \xi^2) dm + \\ &\quad + \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda \int (\eta^2 - \xi^2) dm = \\ &= C \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi + (A - B) \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda. \end{aligned}$$

Il termine di quadrupolo diventa

$$U_2 = \frac{G}{2r^3}(A + B + C - 3C \sin^2 \varphi - 3B \cos^2 \varphi - 3(A - B) \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda),$$

e ricordando che $\cos^2 \lambda = (1 + \cos 2\lambda)/2$ si ottiene finalmente,

$$U_2(r, \varphi, \lambda) = \frac{G}{r^3} \left[\left(\frac{A + B}{2} - C \right) P_2(\sin \varphi) - \frac{3}{4}(A - B) \cos^2 \varphi \cos 2\lambda \right],$$

dove $P_2(t)$ è il polinomio ortogonale di Legendre di grado 2:

$$P_2(t) = \frac{3t^2 - 1}{2}.$$

Grazie alla simmetria dello sferoide oblato, abbiamo che $A = B$; il termine di quadrupolo diventa

$$U_2(r, \varphi) = -\frac{G}{r^3}(C - A) P_2(\sin \varphi),$$

che non dipende dalla longitudine λ del punto.

Riscrivendo la precedente espressione come

$$U_2(r, \varphi) = -\frac{GM}{r} \frac{(C - A) a^2}{Ma^2} \frac{1}{r^2} P_2(\sin \varphi),$$

otteniamo l'espressione del potenziale di uno sferoide oblato a meno di termini di ordine $o(\rho^2/r^2)$:

$$U(r, \varphi) \simeq -\frac{GM}{r} \left(1 - \frac{C - A}{Ma^2} \frac{a^2}{r^2} P_2(\sin \varphi) \right). \quad (4.3)$$

Definizione 4.1. In uno sferoide oblato di semiasse maggiore a , massa M e momenti d'inerzia rispetto agli assi di simmetria A, B, C , il *momento di quadrupolo* è la quantità

$$J_2 = \frac{C - A}{Ma^2}.$$

Osservazione 4.1. In uno sferoide oblato il potenziale dipende dallo schiacciamento polare, dalla distanza e dall'inclinazione rispetto all'equatore.

Osservazione 4.2. In generale, il potenziale gravitazionale per un corpo a simmetria assiale è della forma

$$U(r, \varphi) = -\frac{GM}{r} \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} J_k \left(\frac{a}{r} \right)^k P_k(\sin \varphi) \right),$$

per opportune costanti J_k e dove P_k è il k -esimo polinomio ortogonale di Legendre, definito dalla *formula di Rodrigues*

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^k.$$

4.2 La Terra come sferoide oblato

Newton dimostrò nei *Principia* (Libro III, Proposizioni XVIII-XX) che, a causa della sua rotazione, la Terra deve essere uno sferoide oblato. In questa sezione definiremo alcuni parametri che misurano l'entità dello schiacciamento della Terra e stabiliremo delle relazioni tra di loro, prima assumendo che la densità della Terra sia costante, poi nel caso più generale di densità non costante.

Da adesso in poi penseremo alla Terra come ad uno sferoide oblato ottenuto facendo ruotare un'ellisse di semiasse maggiore a (raggio equatoriale) e semiasse minore b (raggio polare) attorno a quest'ultimo. Indicheremo con M la massa della Terra e con ω_{\oplus} la velocità angolare media di rotazione della Terra attorno al proprio asse. Considereremo un sistema di riferimento di assi xyz , con origine nel centro dell'ellisse.

Il primo parametro che definiamo misura l'entità della causa che produce lo schiacciamento. Viene naturale, quindi, definirlo come rapporto delle accelerazioni presenti sulla superficie terrestre:

$$m = \frac{\text{acc. centrifuga all'Equatore}}{\text{acc. locale di gravità all'Equatore}} = \frac{\omega_{\oplus}^2 a}{\frac{GM}{a^2}}. \quad (4.4)$$

Il secondo parametro che definiamo vogliamo che sia un indicatore della geometria dello sferoide e quindi vogliamo che misuri l'entità dello schiacciamento. Chiameremo, quindi, *schiacciamento* o *flattening* della Terra il numero

$$\varepsilon = \frac{a - b}{a}. \quad (4.5)$$

Il terzo parametro che definiamo è stato già definito nella sezione precedente e si tratta del momento di quadrupolo J_2 .

Quello di cui ci occuperemo adesso sarà di trovare relazioni tra i tre parametri precedentemente definiti. Studieremo prima il caso a densità costante, nella trattazione data dallo stesso Newton. In seguito, tratteremo il caso più generale.

4.2.1 Densità costante

L'idea è quella di considerare la Terra come un fluido perfetto e di densità costante, e due colonne di fluido lungo un raggio polare e uno equatoriale (figura 4.2). Queste colonne dovranno essere in equilibrio, dunque i loro pesi dovranno essere uguali. Calcoleremo i pesi di queste colonne e li uguaglieremo, ottenendo la relazione cercata.

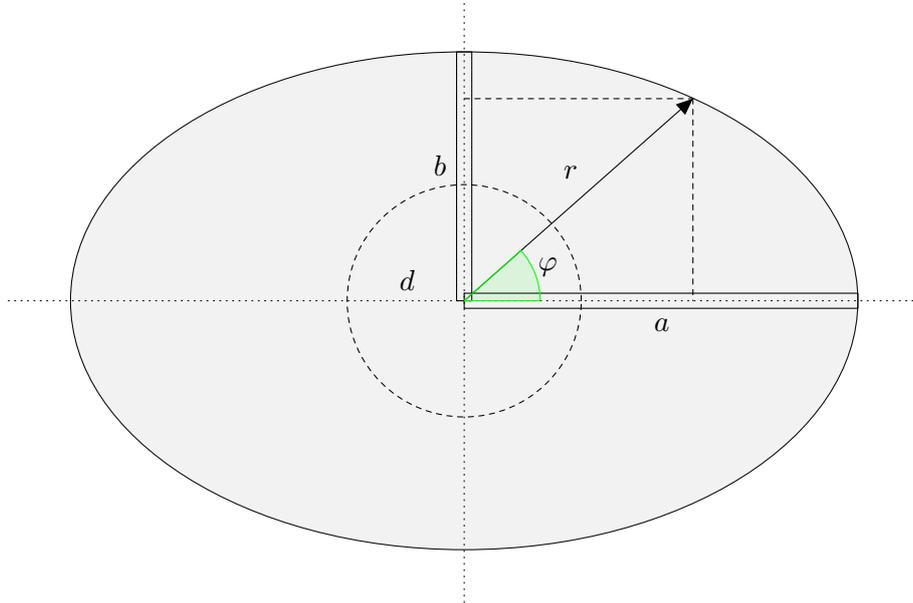


Figura 4.2: Sezione laterale dello sferoide oblato; sono evidenziate le colonne di fluido.

Iniziamo con l'osservare che i pesi delle due colonne sono proporzionali alle accelerazioni presenti: in particolare, il peso della colonna equatoriale sarà proporzionale all'accelerazione di gravità con una correzione centrifuga, mentre la colonna polare avrà peso proporzionale esclusivamente all'accelerazione di gravità. Poiché, a distanza $d < b$ dal centro della Terra vale:

$$|a_c(d)| \propto \omega_{\oplus}^2 d$$

$$|a_g(d)| = \frac{GM(d)}{d^2} = \frac{G}{d^2} \frac{4}{3} \pi d^3 \rho_{\oplus} = \left(\frac{4}{3} \pi G \rho_{\oplus} \right) d$$

allora sono entrambe proporzionali a d , per cui il fattore di diminuzione dell'accelerazione di gravità è sempre lo stesso. Poiché a noi interessa il rapporto delle accelerazioni, possiamo calcolare il valore delle accelerazioni sulla superficie della Terra, per cui:

$$\text{peso colonna equatoriale} \propto a(g_{\text{eq}} - \omega_{\oplus}^2 a) = ag_{\text{eq}}(1 - m)$$

$$\text{peso colonna polare} \propto bg_{\text{pol}}.$$

Uguagliando i due pesi, otteniamo

$$\frac{g_{\text{pol}}}{g_{\text{eq}}} = \frac{a}{b}(1 - m). \quad (4.6)$$

Poiché $\varepsilon = (a-b)/a$, allora $b/a = 1 - \varepsilon$ e, visto che $\varepsilon \ll 1$, $a/b \simeq 1 + \varepsilon$. D'ora in poi, quando compare ε , considereremo sempre sviluppi al primo ordine. Sostituendo nella (4.6), otteniamo:

$$\frac{g_{\text{pol}}}{g_{\text{eq}}} \simeq (1 - m)(1 + \varepsilon). \quad (4.7)$$

A questo punto si tratta di valutare il rapporto $g_{\text{pol}}/g_{\text{eq}}$. Riprendiamo l'espressione del potenziale di uno sferoide oblato (4.3): abbiamo che

$$g(r, \varphi) = -\frac{\partial U}{\partial r}(r, \varphi) = -\frac{GM}{r^2} + \frac{3GM}{r^4} a^2 J_2 P_2(\sin \varphi). \quad (4.8)$$

In caso di uno sferoide oblato di densità costante, abbiamo

$$A = B = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2), \quad C = \frac{2}{5}Ma^2,$$

dunque

$$J_2 = \frac{1}{5} \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{1}{5} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{1}{5}(1 - (1 - \varepsilon)^2) \simeq \frac{1}{5}(1 - (1 - 2\varepsilon)) = \frac{2}{5}\varepsilon.$$

Sostituendo nella (4.8) otteniamo

$$g(r, \varphi) \simeq -\frac{GM}{r^2} + \frac{3GM}{r^4} a^2 \frac{2}{5} \varepsilon \frac{3 \sin^2 \varphi - 1}{2}.$$

Calcoliamo le accelerazioni sulla superficie, rispettivamente all'equatore e al polo:

$$\begin{aligned} g_{\text{eq}} = g(a, 0) &\simeq -\frac{GM}{a^2} \left(1 + \frac{3}{5}\varepsilon\right) \\ g_{\text{pol}} = g(b, \pi/2) &\simeq -\frac{GM}{b^2} + \frac{3GM}{b^4} a^2 \frac{2}{5} \varepsilon \simeq \\ &\simeq -\frac{GM}{b^2} \left(1 - 3(1 + \varepsilon)^2 \frac{2}{5} \varepsilon\right) \simeq \\ &\simeq -\frac{GM}{b^2} \left(1 - \frac{6}{5}\varepsilon - \frac{12}{5}\varepsilon^2\right) \simeq \\ &\simeq -\frac{GM}{b^2} \left(1 - \frac{6}{5}\varepsilon\right). \end{aligned}$$

Grazie alle precedenti, otteniamo

$$\frac{g_{\text{pol}}}{g_{\text{eq}}} \simeq \frac{a^2}{b^2} \left(1 - \frac{6}{5}\varepsilon\right) \left(1 - \frac{3}{5}\varepsilon\right) \simeq (1 + 2\varepsilon) \left(1 - \frac{6}{5}\varepsilon\right) \left(1 - \frac{3}{5}\varepsilon\right) \simeq 1 + \frac{1}{5}\varepsilon.$$

Sostituendo nella (4.7), abbiamo

$$(1 - m)(1 + \varepsilon) \simeq 1 + \frac{1}{5}\varepsilon,$$

da cui

$$1 - m \simeq \left(1 + \frac{1}{5}\varepsilon\right)(1 - \varepsilon) \simeq 1 - \varepsilon + \frac{1}{5}\varepsilon = 1 - \frac{4}{5}\varepsilon.$$

In definitiva,

$$\varepsilon = \frac{5}{4}m. \quad (4.9)$$

4.2.2 Densità non costante

La Terra, però, non ha densità costante. In questo caso, assumiamo che la superficie della Terra sia equipotenziale rispetto al potenziale gravitazionale e al potenziale centrifugo; perciò, sulla superficie della Terra

$$-U(r, \varphi) + \frac{1}{2}\omega_{\oplus}^2 r^2 \cos^2 \varphi = \frac{GM}{r} - \frac{G(C - A)}{2r^3}(3 \sin^2 \varphi - 1) + \frac{1}{2}\omega_{\oplus}^2 r^2 \cos^2 \varphi \quad (4.10)$$

è costante. Vogliamo far comparire, nell'equazione appena scritta, il parametro di schiacciamento ε . Per far ciò, scriveremo l'equazione polare dell'ellisse che genera lo sferoide e la sostituiremo nella precedente. Partendo dall'equazione cartesiana dell'ellisse

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

poiché possiamo parametrizzarla come $y = r \cos \varphi$ e $z = r \sin \varphi$ (figura 4.2), otteniamo

$$r^2 = \frac{b^2}{\sin^2 \varphi + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 \varphi} = \frac{a^2(1 - e^2)}{\sin^2 \varphi + (1 - e^2) \cos^2 \varphi}.$$

È fondamentale osservare che

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2} = (1 - \varepsilon)^2,$$

perciò

$$\begin{aligned} r &= \frac{a(1 - \varepsilon)}{\sqrt{\sin^2 \varphi + (1 - \varepsilon)^2 \cos^2 \varphi}} = \\ &= a(1 - \varepsilon)(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi - 2\varepsilon \cos^2 \varphi + \varepsilon^2 \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \simeq \\ &\simeq a(1 - \varepsilon)(1 - 2\varepsilon \cos^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} \simeq a(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon \cos^2 \varphi) \simeq \\ &\simeq a(1 - \varepsilon(1 - \cos^2 \varphi)) = a(1 - \varepsilon \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Definiamo $\eta = \varepsilon \sin^2 \varphi$, per cui

$$r = a(1 - \eta).$$

Nel sostituire quest'ultima equazione nella (4.10), trascureremo i termini dell'ordine di η^2 , ma anche i termini in cui η moltiplica il potenziale centrifugo e $C - A$, essendo queste quantità molto piccole; inoltre, i termini costanti li portiamo a secondo membro. Procediamo:

$$\begin{aligned} \frac{GM}{a(1-\eta)} - \frac{G(C-A)}{2a^3(1-\eta)^3} (3\sin^2 \varphi - 1) + \frac{1}{2}\omega_{\oplus}^2 a^2 (1-\eta)^2 \cos^2 \varphi &= \text{cost} \\ \frac{GM}{a}(1+\eta) - \frac{G(C-A)}{2a^3}(1+3\eta)(3\sin^2 \varphi - 1) + \frac{1}{2}\omega_{\oplus}^2 a^2 (1-2\eta) \cos^2 \varphi &= \text{cost} \\ \frac{GM}{a}(1+\eta) - \frac{G(C-A)}{2a^3} (3\sin^2 \varphi - 1 + \underbrace{9\eta \sin^2 \varphi}_{\text{trasc}} - \underbrace{3\eta}_{\text{trasc}}) + \\ + \frac{1}{2}\omega_{\oplus}^2 a^2 (1 - \underbrace{2\eta}_{\text{trasc}}) \cos^2 \varphi &= \text{cost} \\ \frac{GM}{a}\eta - \frac{3}{2}\frac{G(C-A)}{a^3} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2}\omega_{\oplus}^2 a^2 \sin^2 \varphi &= 0. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo posto la costante del potenziale uguale a 0: ciò è legittimo perché il potenziale è definito a meno di costanti. Dalla (4.11), otteniamo

$$\eta = \left(\frac{3(C-A)}{2Ma^2} + \frac{\omega_{\oplus}^2 a^3}{2GM} \right) \sin^2 \varphi,$$

da cui, ricordando la definizione di η , J_2 e m ,

$$\varepsilon = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}m. \quad (4.12)$$

Osservazione 4.3. Se ρ_{\oplus} è costante, la precedente si riconduce alla (4.9): infatti, in quel caso

$$J_2 = \frac{2}{5}\varepsilon,$$

da cui

$$\varepsilon = \frac{3}{5}\varepsilon + \frac{m}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{5}{4}m.$$

4.2.3 Dati numerici

Nel caso della Terra, è possibile misurare i parametri che abbiamo definito.

parametro	valore per la Terra
ε	$1/298.2$
m	$3.46 \cdot 10^{-3}$
J_2	$1.08 \cdot 10^{-3}$

I valori presenti nella tabella si riferiscono ad un raggio equatoriale $a = 6.378 \cdot 10^6$ m. È anche possibile misurare $\frac{C-A}{A} \simeq 3.27 \cdot 10^{-3}$.

4.3 Moti della Terra come corpo rigido

In questo paragrafo descriveremo due importanti moti di precessione che interessano la Terra: il primo è il moto di precessione libera, che non tiene conto dell'interazione gravitazionale con altri corpi celesti; il secondo è il moto di precessione lunisolare che, al contrario del primo, è causato dalla presenza del Sole e della Luna. Avremo prima bisogno di scrivere le equazioni di Eulero per un corpo rigido con un punto fisso.

4.3.1 Equazioni di Eulero

In questo paragrafo daremo per buone le nozioni di corpo rigido e di sistema di riferimento solidale al corpo rigido.

Siano Σ, Σ' due sistemi di riferimento, sia $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ . Vale la seguente relazione per ogni $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$:

$$\left. \frac{d\underline{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\underline{\mathbf{u}}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times \underline{\mathbf{u}}. \quad (4.13)$$

Supponiamo adesso di avere un corpo rigido \mathcal{C} e che Σ sia un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro di massa di \mathcal{C} , mentre Σ' sia solidale a \mathcal{C} .

Proposizione 4.1. *Esiste una matrice \mathcal{I} tale che il momento angolare \underline{L} del corpo rigido soddisfa la seguente relazione:*

$$\underline{L} = \mathcal{I}\boldsymbol{\omega}, \quad (4.14)$$

dove $\boldsymbol{\omega}$ è la velocità angolare del corpo rigido.

Dimostrazione. Supponiamo che il corpo rigido sia formato da N punti materiali P_1, \dots, P_N di masse m_1, \dots, m_N , posizioni $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ e velocità $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_N$. Il momento angolare totale risulta

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)) = \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i) \mathbf{r}_i).$$

In componenti, abbiamo:

$$\begin{aligned} L_x &= \omega_x \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - x_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ L_y &= -\omega_x \sum_{i=1}^N m_i x_i y_i + \omega_y \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - y_i^2) - \omega_z \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ L_z &= -\omega_x \sum_{i=1}^N m_i x_i z_i - \omega_y \sum_{i=1}^N m_i y_i z_i + \omega_z \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - z_i^2). \end{aligned}$$

È evidente che le precedenti sono relazioni lineari in $\boldsymbol{\omega}$, per cui è possibile definire una matrice \mathcal{I} tale che $\mathbf{L} = \mathcal{I}\boldsymbol{\omega}$. \square

Precisamente

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - x_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - y_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^N m_i (r_i^2 - z_i^2) \end{pmatrix}$$

Osservazione 4.4. La precedente proposizione vale anche nel caso di un corpo rigido continuo: basta sostituire le somme con integrali.

Definizione 4.2. La matrice \mathcal{I} è detta *tensore di inerzia* del corpo rigido ed è evidentemente simmetrica.

Si può dimostrare che \mathcal{I} è anche definita positiva nel caso in cui esistano almeno tre punti del corpo rigido non allineati. Ciò ci garantisce che esiste un sistema di riferimento ortonormale in cui la matrice \mathcal{I} è diagonale.

Definizione 4.3. Un tale sistema di riferimento viene detto *riferimento principale d'inerzia*; i corrispondenti autovalori sono i *momenti principali d'inerzia*.

Siamo pronti a scrivere le equazioni di Eulero per un corpo rigido con un punto fisso. Indichiamo con \mathbf{N}^e il momento delle forze esterne che agiscono su \mathcal{C} .

Proposizione 4.2 (equazioni di Eulero). *Sia Σ' un sistema di riferimento principale d'inerzia per il corpo rigido \mathcal{C} solidale ad esso e supponiamo che in tale riferimento i vettori $\boldsymbol{\omega}$ e \mathbb{N}^e abbiano rispettivamente componenti $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ e N_x^e, N_y^e, N_z^e ; siano I_1, I_2, I_3 i momenti principali d'inerzia in Σ' . Valgono le seguenti equazioni:*

$$\begin{aligned} N_x^e &= I_1 \dot{\omega}_x - (I_2 - I_3) \omega_y \omega_z \\ N_y^e &= I_2 \dot{\omega}_y - (I_3 - I_1) \omega_x \omega_z \\ N_z^e &= I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dimostrazione. Sia Σ un sistema di riferimento inerziale con origine nel centro di massa del corpo rigido. In Σ vale l'equazione cardinale

$$\left. \frac{d\mathbb{L}}{dt} \right|_{\Sigma} = \mathbb{N}^e.$$

Inoltre, dalla (4.14),

$$\left. \frac{d\mathbb{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \mathcal{I} \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'}.$$

Scriviamo la (4.13) con $\mathbf{u} = \mathbb{L}$:

$$\mathbb{N}^e = \left. \frac{d\mathbb{L}}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\mathbb{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{L} = \mathcal{I} \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbb{L} = \mathcal{I} \left. \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathcal{I}\boldsymbol{\omega}.$$

La precedente, scritta in componenti, dà esattamente le (4.15). \square

4.3.2 Precessione libera della Terra rigida

Per la descrizione del moto di precessione libera supporremo che la Terra sia un corpo rigido della forma di uno sferoide oblato non soggetto a forze esterne.

Osserviamo che un qualsiasi sistema di riferimento solidale alla Terra

$$\Sigma' = \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$$

con origine nel centro di massa e in cui \hat{e}_x, \hat{e}_y sono nel piano equatoriale, è un sistema di riferimento principale d'inerzia. Se I_1, I_2, I_3 sono i momenti principali d'inerzia rispetto agli assi x, y, z , allora abbiamo che $I_1 = I_2 < I_3$. Supponiamo che la Terra ruoti con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\oplus}$ non parallela all'asse z e siano $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ le componenti di $\boldsymbol{\omega}_{\oplus}$ rispetto al riferimento Σ' .

Proposizione 4.3. *Il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_\oplus$ descrive, nel riferimento Σ' , un cono attorno all'asse z .*

Dimostrazione. Scriviamo le equazioni di Eulero per la Terra in questo caso. Poiché la Terra non è soggetta a forze esterne, allora $\mathbb{N}^e = \mathbf{0}$:

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_x = \omega_y \omega_z (I_1 - I_3) \\ I_1 \dot{\omega}_y = \omega_x \omega_z (I_1 - I_3) \\ I_3 \dot{\omega}_z = 0. \end{cases}$$

La terza equazione ci dice che ω_z è costante, per cui possiamo porre $\Omega = \omega_z(I_1 - I_3)/I_1$, ottenendo

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = \Omega \omega_y \\ \dot{\omega}_y = -\Omega \omega_x. \end{cases}$$

Le precedenti possono essere disaccoppiate ottenendo le equazioni di due oscillatori armonici di soluzione

$$\begin{cases} \omega_x = A \sin \Omega t \\ \omega_y = A \cos \Omega t \\ \omega_z = B \end{cases}$$

con A, B costanti che dipendono dalle condizioni iniziali. Si conclude osservando che le precedenti sono equazioni parametriche per un cono di asse coincidente con z . \square

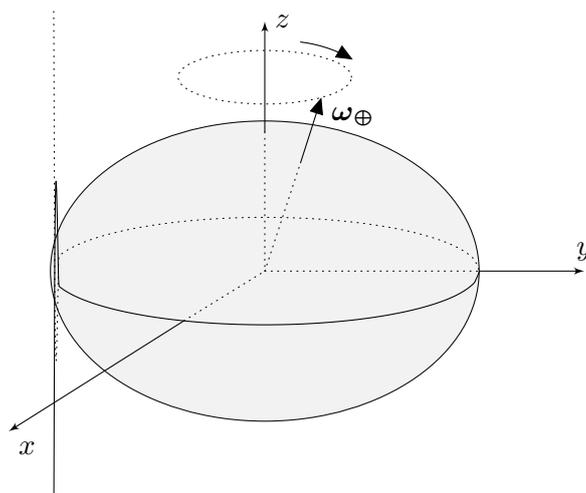


Figura 4.3: Precessione libera della Terra rigida.

La quantità Ω è chiamata *velocità angolare di precessione* ed è la frequenza con cui gira ω_{\oplus} . Osserviamo che $\Omega < 0$, per cui il moto di precessione avviene in verso opposto alla rotazione della Terra.

Osservazione 4.5. Per la Terra abbiamo che $(I_1 - I_3)/I_1 \simeq 3.3 \cdot 10^{-3}$, da cui ricaviamo che il periodo di precessione libera è di circa 300 giorni. In realtà si osserva che il periodo effettivo è di circa 427 giorni; la differenza è dovuta all'elasticità della Terra.

Osservazione 4.6. Il fenomeno che si osserva in un riferimento inerziale è il cosiddetto "Chandler wobble", dal nome dello scienziato che per primo ne misurò il periodo. Un problema aperto è quello di determinare la ragione per cui non si verifica uno smorzamento della precessione libera.

4.3.3 Precessione lunisolare dell'asse di rotazione della Terra

Il Sole non si trova sul piano equatoriale della Terra, ma su un piano, detto *piano dell'eclittica*, inclinato rispetto a questo di un angolo $\varepsilon = 23.5^\circ$. Se la Terra non avesse una rotazione propria, l'attrazione gravitazionale del Sole tenderebbe a spostare la Terra, fino a far coincidere il piano equatoriale con quello dell'eclittica. Poiché la Terra ruota, l'attrazione gravitazionale del Sole riesce solo a fare in modo che l'asse di rotazione terrestre descriva un cono attorno alla perpendicolare al piano dell'eclittica, causando cioè la cosiddetta *precessione lunisolare*. In questo paragrafo descriveremo quantitativamente questo fenomeno.

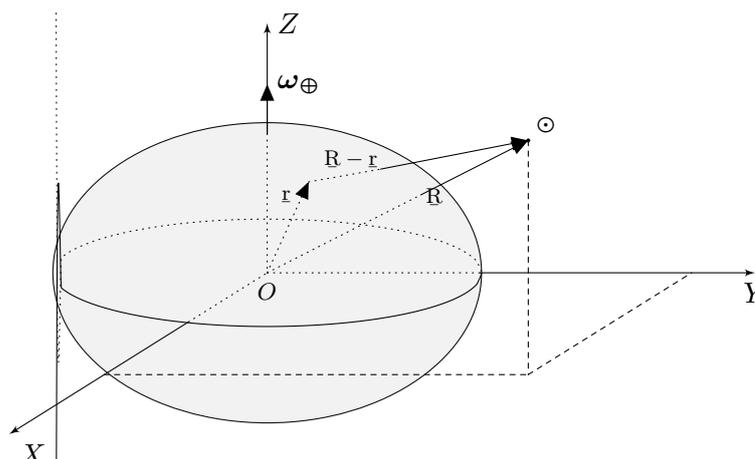


Figura 4.4: Riferimento inerziale della Terra.

Consideriamo un sistema di riferimento inerziale Σ con origine nel centro di massa della Terra e di assi XYZ , con Z asse di simmetria della Terra.² Sia \underline{R} la posizione del Sole, di coordinate (X, Y, Z) (figura 4.4). Supponiamo che la Terra ruoti attorno all'asse Z con velocità angolare ω_{\oplus} , trascurando così il moto di precessione libera. Su ogni elemento di massa dm della Terra agisce una forza elementare esercitata dal Sole di intensità

$$d\mathbf{F} = \frac{GM(\underline{R} - \underline{r})}{|\underline{R} - \underline{r}|^3} dm.$$

Osserviamo che nel calcolo di questa forza possiamo trascurare la rotazione della Terra, grazie alla simmetria dello sferoide oblato. Al solito, supponiamo che $R \gg r$, per cui, sviluppando e trascurando termini di ordine superiore a r/R :

$$\begin{aligned} |\underline{R} - \underline{r}|^{-3} &= (R^2 + r^2 - 2\underline{R} \cdot \underline{r})^{-\frac{3}{2}} = R^{-3} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} - 2\frac{\underline{R} \cdot \underline{r}}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \simeq \\ &\simeq R^{-3} \left(1 - 2\frac{\underline{R} \cdot \underline{r}}{R^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \simeq R^{-3} \left(1 + 3\frac{\underline{R} \cdot \underline{r}}{R^2} \right). \end{aligned}$$

La forza, quindi, diventa:

$$d\mathbf{F} = \frac{GM dm}{R^3} \left(1 + 3\frac{\underline{R} \cdot \underline{r}}{R^2} \right) (\underline{R} - \underline{r}).$$

Calcoliamo, adesso, il momento della forza esercitata dal Sole: ricaviamo prima il momento elementare della forza e poi integreremo sul corpo rigido per ottenere il momento totale. Il momento elementare è

$$d\mathbf{K} = \underline{r} \times d\mathbf{F} \simeq \frac{GM dm}{R^3} \left(1 + 3\frac{\underline{R} \cdot \underline{r}}{R^2} \right) (\underline{r} \times \underline{R}),$$

mentre il momento totale è

$$\mathbf{K} \simeq \frac{GM}{R^3} \int \left(1 + 3\frac{\underline{R} \cdot \underline{r}}{R^2} \right) (\underline{r} \times \underline{R}) dm.$$

Osserviamo che l'addendo $\int (\underline{r} \times \underline{R}) dm$ è uguale a $(\int \underline{r} dm) \times \underline{R}$ che a sua volta è nullo perché $\int \underline{r} dm$ sono le coordinate del centro di massa, che abbiamo posto nell'origine. Il momento si riduce a

$$\mathbf{K} \simeq \frac{3GM}{R^5} \int (\underline{r} \cdot \underline{R})(\underline{r} \times \underline{R}) dm.$$

²possiamo pensare al piano XY come al piano dell'equatore celeste e Z in direzione del Polo Nord Celeste.

Osserviamo adesso che il riferimento prescelto è un riferimento principale d'inerzia, con associati momenti principali d'inerzia A, B, C dati da

$$\begin{aligned} A &= \int (y^2 + z^2) dm \\ B &= \int (x^2 + z^2) dm = A \\ C &= \int (x^2 + y^2) dm. \end{aligned}$$

Esplicitiamo le componenti di \mathbf{K} : se $\mathbf{r} = (x, y, z)$, abbiamo che

$$\begin{aligned} K_X &\simeq \frac{3GM}{R^5} \int (xX + yY + zZ)(yZ - zY) dm = \\ &= \frac{3GM}{R^5} YZ \int (y^2 - z^2) dm = \frac{3GM}{R^5} (C - A)YZ. \end{aligned}$$

Un conto analogo mostra che

$$K_Y \simeq -\frac{3GM}{R^5} (C - A)XZ \quad \text{e} \quad K_Z \simeq \frac{3GM}{R^5} (B - A)XY = 0.$$

È semplice verificare che $\mathbf{K} \cdot \mathbf{R} = 0$. Questo, unito al fatto che $K_Z = 0$, ci fa concludere che \mathbf{K} è diretto lungo l'asse X , perciò tenderà a far precedere il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}_{\oplus}$, che descriverà un cono attorno all'asse perpendicolare al piano dell'eclittica.

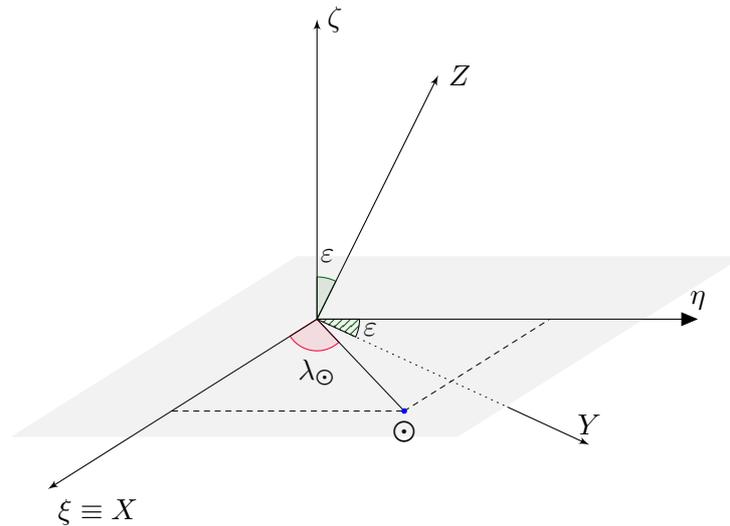


Figura 4.5: Il riferimento della Terra e dell'eclittica.

Calcoliamo, adesso, la velocità angolare di precessione. Mettiamo coordinate $\xi \equiv X, \eta$ sul piano dell'eclittica e sia ζ l'asse perpendicolare (figura 4.5). In questo riferimento, che denotiamo con Σ' , il Sole avrà coordinate

$$\mathbf{R} = (R \cos \lambda_{\odot}, R \sin \lambda_{\odot}, 0),$$

dove λ_{\odot} è la longitudine del Sole; pertanto, avremo

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & -\sin \varepsilon \\ 0 & \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \lambda_{\odot} \\ R \sin \lambda_{\odot} \cos \varepsilon \\ R \sin \lambda_{\odot} \sin \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Inoltre, il vettore \mathbf{K} avrà coordinate date da

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} K_{\xi} \\ K_{\eta} \\ K_{\zeta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_X \\ K_Y \\ K_Z \end{pmatrix} = \\ &= \frac{3GM}{R^3} (C - A) \sin \varepsilon \begin{pmatrix} \sin^2 \lambda_{\odot} \cos \varepsilon \\ -\sin \lambda_{\odot} \cos \lambda_{\odot} \cos \varepsilon \\ \sin \lambda_{\odot} \cos \lambda_{\odot} \sin \varepsilon \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il suo modulo dipende da $C - A$ e dall'inverso del cubo della distanza: l'effetto che si avrà sarà piccolo rispetto alla rotazione principale della Terra, quindi il periodo di precessione sarà lungo. Supponiamo che $T_{\text{prec}} \gg 1 \text{ yr}$ (è un'ipotesi che verificheremo a posteriori, ma è ragionevole). L'effetto che apprezziamo ha un periodo molto lungo, dunque non è scorretto pensare al Sole in una posizione media rispetto a quelle che occupa sull'eclittica durante l'anno: possiamo calcolare l'effetto di precessione *mediando* sulla posizione del Sole in un anno. In questo modo, otteniamo $\overline{K}_{\eta} = \overline{K}_{\zeta} = 0$ e

$$\overline{K}_{\xi} = \frac{3}{2} \frac{GM}{R^3} (C - A) \sin \varepsilon \cos \varepsilon.$$

Per il momento angolare $\mathbf{L} = C\boldsymbol{\omega}_{\oplus}$, vale l'equazione fondamentale

$$\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \mathbf{K}.$$

Sia Σ'' un sistema di riferimento solidale all'asse di rotazione della Terra: la sua velocità angolare rispetto a Σ' sarà la velocità con cui l'asse terrestre precede. Indichiamo tale velocità angolare con $\boldsymbol{\Omega}_{\text{prec}} = \Omega_{\text{prec}} \hat{\zeta}$ e osserviamo che soddisfa, per la (4.13):

$$\left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\Sigma'} = \left. \frac{d\mathbf{L}}{dt} \right|_{\Sigma''} + \boldsymbol{\omega}_{\text{prec}} \times \mathbf{L}.$$

Nel riferimento Σ'' il vettore \underline{L} è fermo, dunque la precedente equazione diventa, tenendo conto dell'equazione fondamentale,

$$\underline{K} = \boldsymbol{\omega}_{\text{prec}} \times \underline{L}.$$

Da questa ricaviamo:

$$\overline{K}_\xi = (\boldsymbol{\omega}_{\text{prec}} \times \underline{L})_\xi = -\Omega_{\text{prec}} L_\eta = -\Omega_{\text{prec}} L \sin \varepsilon.$$

Concludiamo che

$$\Omega_{\text{prec}} = -\frac{\overline{K}_\xi}{L \sin \varepsilon} = -\frac{3 GM}{2 R^3} \left(\frac{C - A}{C} \right) \frac{1}{\omega_\oplus} \cos \varepsilon.$$

Osservazione 4.7. Abbiamo studiato il moto di precessione nel caso della Terra e del Sole, ma nulla cambia se si considera la Terra e la Luna: difatti, gli effetti dei due corpi vanno sommati per ottenere il periodo effettivo della precessione lunisolare. Possiamo distinguere:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{prec},\odot} &= -\frac{3 GM_\odot}{2 d_{\odot\oplus}^3} \left(\frac{C - A}{C} \right) \frac{1}{\omega_\oplus} \cos \varepsilon \\ \Omega_{\text{prec},\text{C}} &= -\frac{3 GM_{\text{C}}}{2 d_{\text{C}\oplus}^3} \left(\frac{C - A}{C} \right) \frac{1}{\omega_\oplus} \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Come accade per le maree, l'effetto della Luna è più importante dell'effetto del Sole di un fattore 2.2:

$$\frac{\Omega_{\text{prec},\text{C}}}{\Omega_{\text{prec},\odot}} = \frac{M_{\text{C}}}{M_\odot} \cdot \frac{d_{\odot\oplus}^3}{d_{\text{C}\oplus}^3} \simeq 2.2.$$

Pertanto la velocità angolare di precessione lunisolare è $\Omega_{\text{lunisol}} = 3.2\Omega_{\text{prec},\odot}$. Facendo i dovuti calcoli, tenendo conto che $(C - A)/C \simeq 3.27 \cdot 10^{-3}$, si trova che il periodo della precessione lunisolare è

$$T_{\text{lunisol}} \simeq 26000 \text{ yr.}$$

Appendice **A**

Moti del Sole, della Terra e della Luna

La Terra, oltre il moto di rivoluzione attorno al Sole, ruota attorno a se stessa compiendo la cosiddetta *rotazione propria*. È fondamentale, nello studio delle maree e dei fenomeni astronomici in generale, conoscere la durata di questa rotazione propria. Spesso, però, sarà importante riferire questa rotazione non alle stelle fisse, ma al Sole o alla Luna.¹ Lo scopo di questa appendice è definire questi diversi tipi di *giorni* e calcolarne la durata.

A.1 Giorno sidereo e giorno solare

Il giorno sidereo è il periodo di rotazione propria della Terra rispetto alle stelle fisse.

Definizione A.1. Si definisce *giorno sidereo* l'intervallo di tempo che intercorre tra due passaggi successivi di un medesimo astro su un certo meridiano. Un giorno sidereo dura $23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 0.4^{\text{s}}$, cioè 86160^{s} .

Da questo otteniamo che la velocità angolare media della Terra di rotazione propria è

$$\omega_{\oplus} = \frac{2\pi}{86160^{\text{s}}}.$$

La vita di tutti i giorni è regolata dal Sole, per cui è perfettamente legittimo considerare il giorno riferito al Sole.

¹consideriamo *stelle fisse* quegli astri che, grazie alla loro grande distanza dalla Terra, non mutano la loro posizione in tempi brevi.

Definizione A.2. Il *giorno solare* è il periodo di tempo che intercorre tra due passaggi successivi del Sole su un certo meridiano.

Il giorno solare non coincide col giorno sidereo, ma è più lungo: ciò è dovuto al fatto che, durante la sua rotazione propria, la Terra si è spostata lungo la sua orbita attorno al Sole, per cui dovrà ruotare ancora un po' attorno a se stessa affinché il Sole ritorni sul medesimo meridiano (figura A.1).

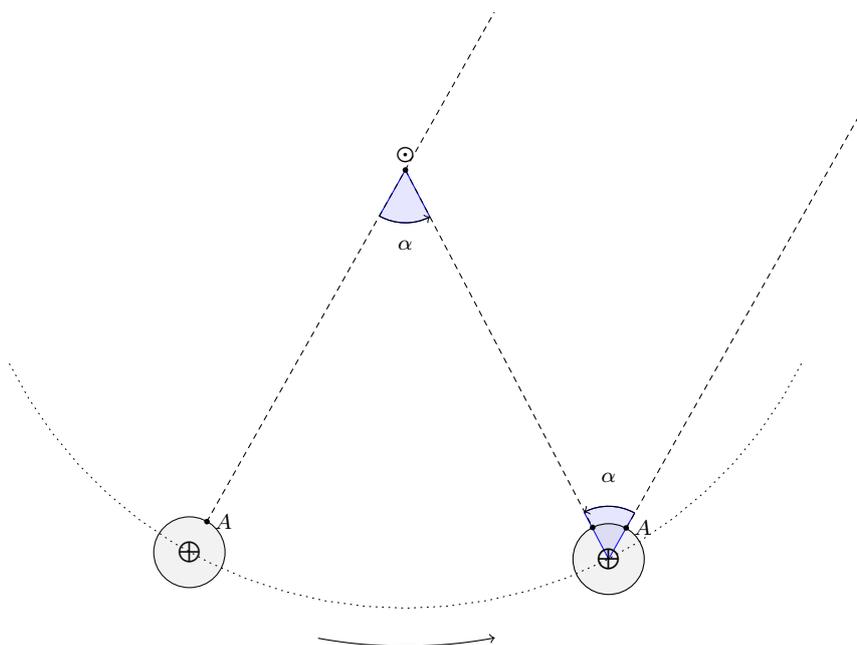


Figura A.1: Giorno solare della Terra.

Inoltre, poiché la velocità angolare di rotazione attorno al Sole non è costante, l'angolo α spazzato in un giorno sidereo non è sempre lo stesso. Sapendo, però, che in 365^{d} la Terra fa un giro completo, cioè spazza 360° , possiamo assumere che in un giorno essa spazzi 1° .

Tale angolo è lo stesso che la Terra deve spazzare nella rotazione attorno a se stessa perché il Sole torni sullo stesso meridiano (figura A.1). A questo punto è semplice calcolare qual è il tempo supplementare di rotazione della Terra: se t_α è questo tempo, si deve avere

$$t_\alpha \omega_\oplus = \frac{2\pi}{360},$$

da cui $t_\alpha = 4^{\text{m}}$. Ne consegue che un giorno solare dura circa 24^{h} .

A.2 Mese sidereo e mese sinodico della Luna

Definizione A.3. Il *mese sidereo* della Luna è il periodo di rotazione della Luna attorno alla Terra, rispetto alle stelle fisse. Esso dura 27.32166^d .

Possiamo, quindi, calcolare la velocità angolare media di rotazione della Luna attorno alla Terra $n_{\mathcal{L}}$:

$$n_{\mathcal{L}} = \frac{2\pi}{27.32166 \cdot 86400^s}$$

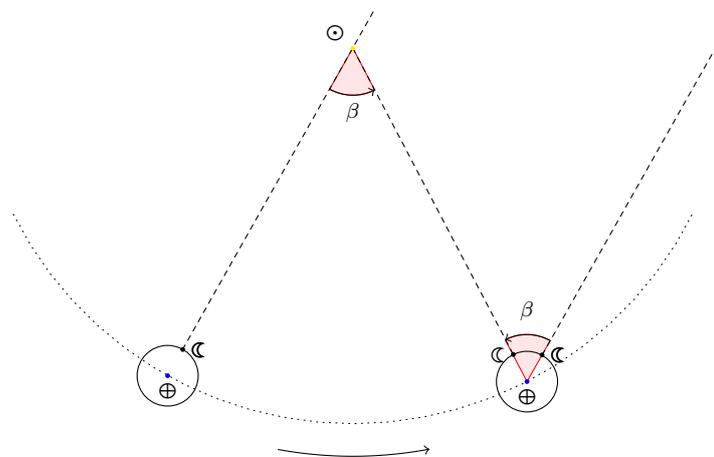


Figura A.2: Mese sinodico della Luna

Così come abbiamo fatto con la rotazione della Terra, possiamo riferire al Sole la rotazione della Luna:

Definizione A.4. Il *mese sinodico* è l'intervallo di tempo dopo il quale la Luna, nella sua rotazione attorno alla Terra, assume la stessa posizione rispetto al Sole.

Osservazione A.1. Il mese sinodico è il periodo rispetto al quale si rispettano le fasi lunari.

Analogamente a quanto accade per la Terra, il mese sinodico è più lungo del sidereo: infatti, mentre la Luna ruota attorno alla Terra, quest'ultima si sposta attorno al Sole spazzando un angolo β di circa 27° (figura A.2). Questo è lo stesso angolo che la Luna deve spazzare per ritornare nella stessa posizione rispetto al Sole, impiegando un tempo supplementare t_β tale che

$$n_{\mathcal{L}} t_\beta = 27 \cdot \frac{2\pi}{360};$$

abbiamo, quindi, $t_\beta \simeq 2^d$. Precisamente, abbiamo che il mese sinodico della Luna dura 29.53059^d .

A.3 Giorno sinodico della Luna

Per lo studio delle maree dovute alla Luna e della loro periodicità, è fondamentale considerare il giorno sinodico della Luna.

Definizione A.5. Il *giorno sinodico lunare* è il tempo che intercorre tra due passaggi consecutivi della Luna sul medesimo meridiano terrestre.

Il giorno sinodico lunare è più lungo di un giorno sidereo perché, dopo un giorno sidereo, la Luna si è mossa lungo la sua orbita attorno alla Terra: per ritrovare la Luna sullo stesso meridiano, la Terra dovrà spazzare un angolo γ attorno a se stessa pari all'angolo spazzato dalla Luna in un giorno sidereo (figura A.3). Poiché $\gamma \simeq 13^\circ$, allora il giorno sinodico lunare sarà più lungo di un giorno sidereo di un tempo t_γ pari a

$$t_\gamma \simeq \frac{86400^s}{27} \simeq 53^m.$$

Concludiamo che un giorno sinodico lunare dura $24^h 50.4^m$.

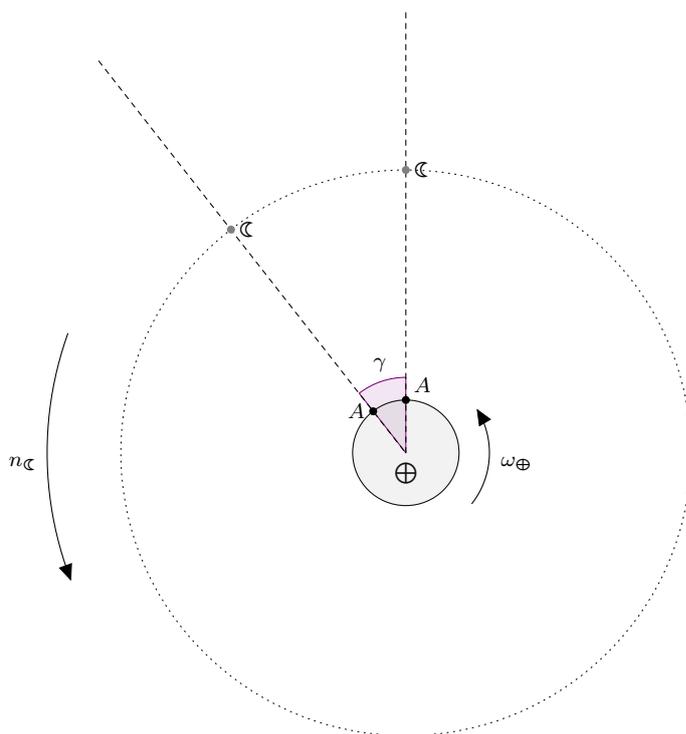


Figura A.3: Giorno sinodico lunare.