Settimana Matematica 2021
Dipartimento di Matematica

Problema dei tre corpi, caos e determinazione orbitale

Alessio Del Vigna[1]

[1]Dipartimento di Matematica, Università di Pisa

Pisa, 21-23 Aprile 2021

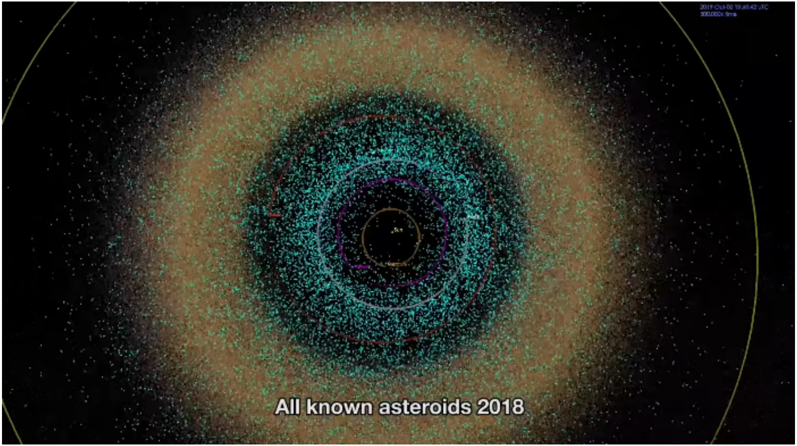
Parte I

Asteroidi e determinazione orbitale

Asteroidi: cosa sono e dove si trovano

Un *asteroide* è un corpo minore del Sistema Solare (in orbita attorno al Sole).

Ad oggi (aprile 2021) si conoscono **931796** asteroidi



Asteroidi vicini alla Terra

Un *Near-Earth Asteroid* (NEA) è un asteroide la cui orbita passa vicino o incrocia l'orbita della Terra. Più precisamente, i NEA sono caratterizzati da un perielio $q \leq 1.3$ au.

Ad oggi (aprile 2021) si conoscono **25635** NEA

Rilevamento di un asteroide

Come viene osservato un asteroide?

- Gli asteroidi vengono osservati per mezzo di telescopi sufficientemente grandi, perché possono apparire come puntini debolmente luminosi in cielo.
- Differenza rispetto a stelle fisse, galassie, nebulose: sono corpi in movimento.

Due regole per l'individuazione di un asteroide nelle sequenze di immagini dei telescopi:

- il puntino in movimento deve apparire in ogni immagine della sequenza;
- il puntino in movimento deve muoversi in linea retta.

Rilevamento di un asteroide

Come viene osservato un asteroide?

- Gli asteroidi vengono osservati per mezzo di telescopi sufficientemente grandi, perché possono apparire come puntini debolmente luminosi in cielo.
- Differenza rispetto a stelle fisse, galassie, nebulose: sono corpi in movimento.

Due regole per l'individuazione di un asteroide nelle sequenze di immagini dei telescopi:

- il puntino in movimento deve apparire in ogni immagine della sequenza;
- il puntino in movimento deve muoversi in linea retta.

Individuate gli asteroidi (sono quattro)!

Individuate gli asteroidi (sono quattro)!

Il problema della determinazione orbitale

Problema di *determinazione orbitale*: date $m \geq 3$ osservazioni di un corpo in movimento, determinare l'orbita dell'oggetto che "meglio si adatta" ad esse.

1. Cosa bisogna determinare per poter dire di aver determinato un'orbita?
2. Cosa significa "meglio si adatta"?

1. Per determinare un'orbita basta determinare le *condizioni iniziali*, ossia posizione e velocità ad un certo istante di tempo.

   Osservazione. Questo basta perché date le condizioni iniziali, le equazioni del moto hanno un'unica soluzione
2. Richiediamo che sia minima una certa funzione che quantifica quanto si discosta l'orbita da determinare rispetto alle osservazioni.

Riscaldamento: la regressione lineare

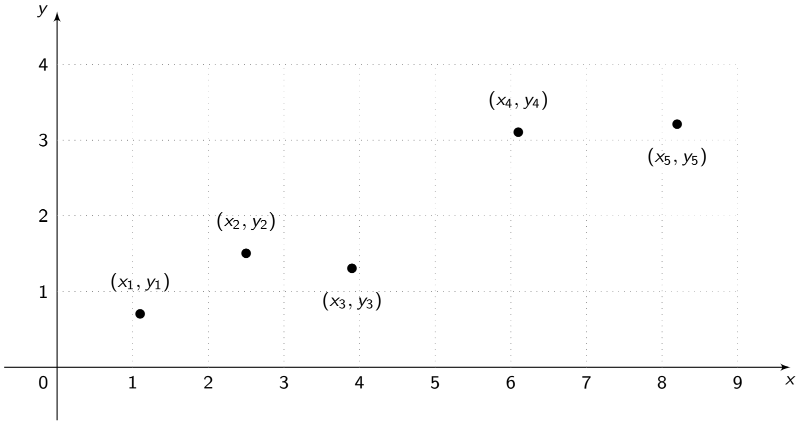
Dati $m \geq 3$ punti del piano, determinare la retta per l'origine che "meglio" li approssima.

- *Osservazioni.* Sono i punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$.
- *Modello.* Il modello è lineare $y = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ parametro da determinare.
- *Residui.* Differenza tra osservazione e predizione: $\xi_i(\lambda) = y_i - \lambda x_i$, $i = 1, \ldots, m$.

Riscaldamento: la regressione lineare

Dati $m \geq 3$ punti del piano, determinare la retta per l'origine che "meglio" li approssima.

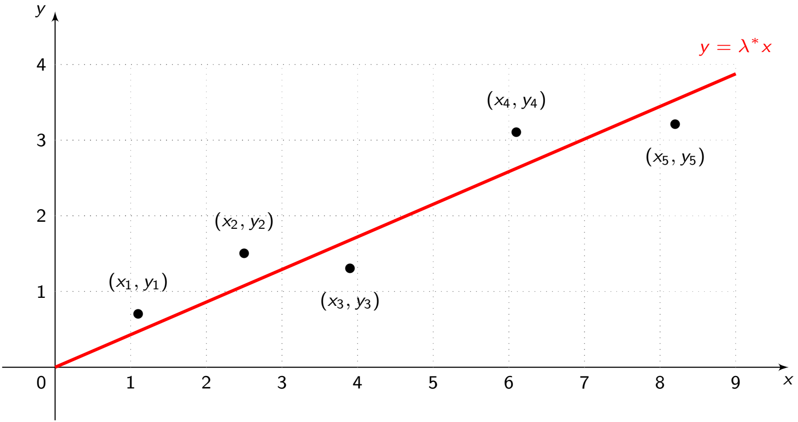
- *Osservazioni*. Sono i punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$.
- *Modello*. Il modello è lineare $y = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ parametro da determinare.
- *Residui*. Differenza tra osservazione e predizione: $\xi_i(\lambda) = y_i - \lambda x_i$, $i = 1, \ldots, m$.



Riscaldamento: la regressione lineare

Dati $m \geq 3$ punti del piano, determinare la retta per l'origine che "meglio" li approssima.

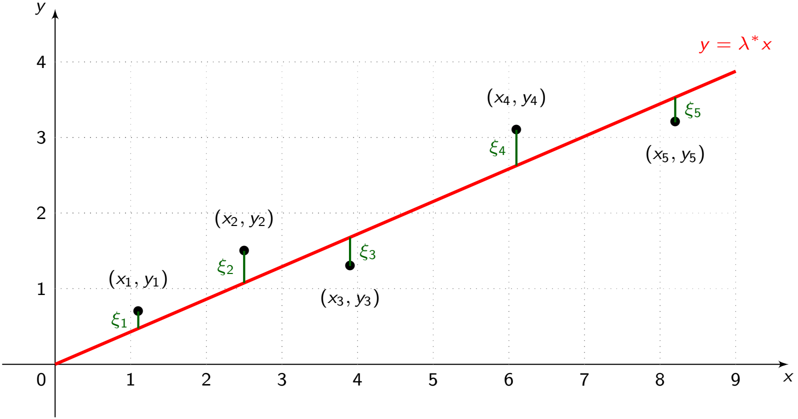
- *Osservazioni*. Sono i punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$.
- *Modello*. Il modello è lineare $y = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ parametro da determinare.
- *Residui*. Differenza tra osservazione e predizione: $\xi_i(\lambda) = y_i - \lambda x_i$, $i = 1, \ldots, m$.



Riscaldamento: la regressione lineare

Dati $m \geq 3$ punti del piano, determinare la retta per l'origine che "meglio" li approssima.

- *Osservazioni*. Sono i punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$.
- *Modello*. Il modello è lineare $y = \lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ parametro da determinare.
- *Residui*. Differenza tra osservazione e predizione: $\xi_i(\lambda) = y_i - \lambda x_i$, $i = 1, \ldots, m$.



Riscaldamento: la regressione lineare

Cosa vuol dire "retta che meglio approssima"?

Chiediamo che una certa funzione dei residui sia minima.

- *Funzione obiettivo.* La funzione di cui cerchiamo il minimo è

$$Q(\lambda) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \xi_i(\lambda)^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \lambda x_i)^2.$$

Si deve determinare λ^* tale che $Q(\lambda^*)$ è minimo locale.

Esercizio

Si provi che $\lambda^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$.

Riscaldamento: la regressione lineare

Cosa vuol dire "retta che meglio approssima"?

Chiediamo che una certa funzione dei residui sia minima.

- *Funzione obiettivo.* La funzione di cui cerchiamo il minimo è

$$Q(\lambda) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \xi_i(\lambda)^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(y_i - \lambda x_i)^2.$$

Si deve determinare λ^* tale che $Q(\lambda^*)$ è minimo locale.

Esercizio

Si provi che $\lambda^* = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{m} x_i^2}$.

Riscaldamento: la regressione lineare

Cosa vuol dire "retta che meglio approssima"?

Chiediamo che una certa funzione dei residui sia minima.

- *Funzione obiettivo.* La funzione di cui cerchiamo il minimo è

$$Q(\lambda) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \xi_i(\lambda)^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \lambda x_i)^2.$$

Si deve determinare λ^* tale che $Q(\lambda^*)$ è minimo locale.

Esercizio

Si provi che $\lambda^* = \frac{\sum_{i=1}^m x_i y_i}{\sum_{i=1}^m x_i^2}$.

La determinazione orbitale

- *Osservazioni*. Si hanno $m \geq 3$ osservazioni di un corpo celeste in movimento, $(t_1, r_1), \ldots, (t_m, r_m)$, dove r è la grandezza osservata, detta anche *osservabile*.
- *Modello*. Problema degli N corpi. La *funzione di predizione* è la funzione $r(t)$ che dato un tempo t restituisce il valore dell'osservabile a quel tempo, ottenuta partendo dall'orbita con condizione iniziale $\mathbf{y}_0$, che è da determinare.
- *Residui*. Il *residuo* rispetto alla i-esima osservazione è la differenza tra l'osservabile osservata e l'osservabile calcolata, ossia

$$\xi_i := r_i - r(t_i).$$

  I residui sono funzione di $\mathbf{y}_0$.
- *Funzione obiettivo*. Indichiamo con $\mathbf{x}$ i parametri $\mathbf{y}_0$ da determinare. La *funzione obiettivo* è

$$Q(\mathbf{x}) := \frac{1}{m}\left(\xi_1(\mathbf{x})^2 + \cdots + \xi_m(\mathbf{x})^2\right).$$

Si cercano i parametri $\mathbf{x}^*$ tali che $Q(\mathbf{x}^*)$ assume il suo valore minimo locale.

La determinazione orbitale

- *Osservazioni*. Si hanno $m \geq 3$ osservazioni di un corpo celeste in movimento, $(t_1, r_1), \ldots, (t_m, r_m)$, dove r è la grandezza osservata, detta anche *osservabile*.
- *Modello*. Problema degli N corpi. La *funzione di predizione* è la funzione $r(t)$ che dato un tempo t restituisce il valore dell'osservabile a quel tempo, ottenuta partendo dall'orbita con condizione iniziale $\mathbf{y}_0$, che è da determinare.
- *Residui*. Il *residuo* rispetto alla i-esima osservazione è la differenza tra l'osservabile osservata e l'osservabile calcolata, ossia

$$\xi_i := r_i - r(t_i).$$

  I residui sono funzione di $\mathbf{y}_0$.
- *Funzione obiettivo*. Indichiamo con $\mathbf{x}$ i parametri $\mathbf{y}_0$ da determinare. La *funzione obiettivo* è

$$Q(\mathbf{x}) := \frac{1}{m}\left(\xi_1(\mathbf{x})^2 + \cdots + \xi_m(\mathbf{x})^2\right).$$

Si cercano i parametri $\mathbf{x}^*$ tali che $Q(\mathbf{x}^*)$ assume il suo valore minimo locale.

La determinazione orbitale

- *Osservazioni*. Si hanno $m \geq 3$ osservazioni di un corpo celeste in movimento, $(t_1, r_1), \ldots, (t_m, r_m)$, dove r è la grandezza osservata, detta anche *osservabile*.
- *Modello*. Problema degli N corpi. La *funzione di predizione* è la funzione $r(t)$ che dato un tempo t restituisce il valore dell'osservabile a quel tempo, ottenuta partendo dall'orbita con condizione iniziale $\mathbf{y}_0$, che è da determinare.
- *Residui*. Il *residuo* rispetto alla i-esima osservazione è la differenza tra l'osservabile osservata e l'osservabile calcolata, ossia

$$\xi_i := r_i - r(t_i).$$

  I residui sono funzione di $\mathbf{y}_0$.

- *Funzione obiettivo*. Indichiamo con $\mathbf{x}$ i parametri $\mathbf{y}_0$ da determinare. La *funzione obiettivo* è

$$Q(\mathbf{x}) := \frac{1}{m}\left(\xi_1(\mathbf{x})^2 + \cdots + \xi_m(\mathbf{x})^2\right).$$

Si cercano i parametri $\mathbf{x}^*$ tali che $Q(\mathbf{x}^*)$ assume il suo valore minimo locale.

La determinazione orbitale

- *Osservazioni*. Si hanno $m \geq 3$ osservazioni di un corpo celeste in movimento, $(t_1, r_1), \ldots, (t_m, r_m)$, dove r è la grandezza osservata, detta anche *osservabile*.
- *Modello*. Problema degli N corpi. La *funzione di predizione* è la funzione $r(t)$ che dato un tempo t restituisce il valore dell'osservabile a quel tempo, ottenuta partendo dall'orbita con condizione iniziale $\mathbf{y}_0$, che è da determinare.
- *Residui*. Il *residuo* rispetto alla i-esima osservazione è la differenza tra l'osservabile osservata e l'osservabile calcolata, ossia
$$\xi_i := r_i - r(t_i).$$
I residui sono funzione di $\mathbf{y}_0$.
- *Funzione obiettivo*. Indichiamo con $\mathbf{x}$ i parametri $\mathbf{y}_0$ da determinare. La *funzione obiettivo* è
$$Q(\mathbf{x}) := \frac{1}{m}\left(\xi_1(\mathbf{x})^2 + \cdots + \xi_m(\mathbf{x})^2\right).$$

Si cercano i parametri $\mathbf{x}^*$ tali che $Q(\mathbf{x}^*)$ assume il suo valore minimo locale.

Un esempio

L'orbita di Apophis:

- $a = (0.922629 \pm 6.695 \times 10^{-11})$ au
- $e = (0.191521 \pm 1.545 \times 10^{-9})$
- $I = (3.337 \pm 1.738 \times 10^{-7})$ deg
- $\Omega = (204.061 \pm 8.702 \times 10^{-6})$ deg
- $\omega = (126.684 \pm 9.298 \times 10^{-6})$ deg
- $M = (215.644 \pm 1.387 \times 10^{-6})$ deg

Tutte queste informazioni sono riportate nel sito NEODyS:

`https://newton.spacedys.com/neodys/index.php?pc=0`

Un esempio

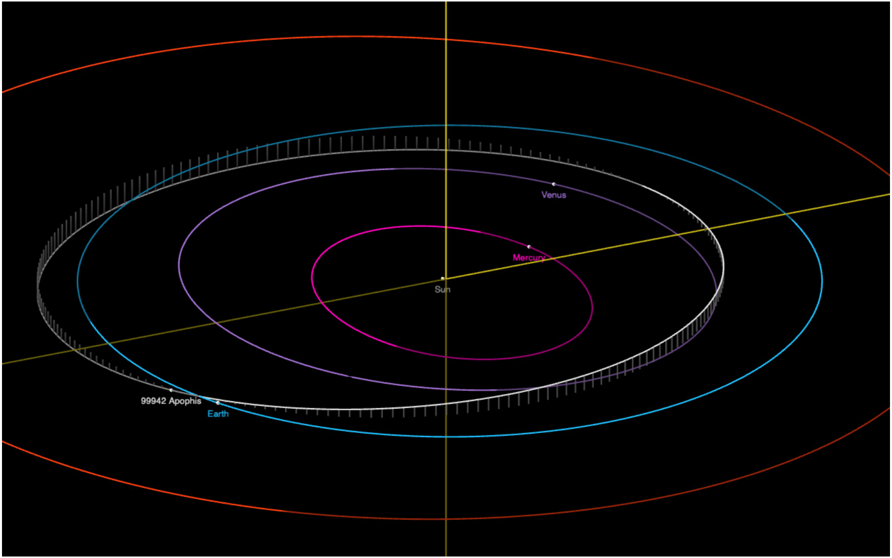
L'orbita di Apophis:

- $a = (0.922629 \pm 6.695 \times 10^{-11})$ au
- $e = (0.191521 \pm 1.545 \times 10^{-9})$
- $I = (3.337 \pm 1.738 \times 10^{-7})$ deg
- $\Omega = (204.061 \pm 8.702 \times 10^{-6})$ deg
- $\omega = (126.684 \pm 9.298 \times 10^{-6})$ deg
- $M = (215.644 \pm 1.387 \times 10^{-6})$ deg

Tutte queste informazioni sono riportate nel sito NEODyS:

`https://newton.spacedys.com/neodys/index.php?pc=0`

Un esempio



Parte II

Il problema degli N corpi e il caos

Il problema degli N corpi

Definizione

Il *problema degli N corpi* è lo studio del moto nello spazio di $N \geq 2$ masse puntiformi $m_1, \ldots, m_N$, soggette soltanto alla loro mutua interazione gravitazionale.

Equazioni del moto:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^2} \hat{\mathbf{r}}_{ij}, \quad i = 1, \ldots, N$$

dove $\mathbf{r}_{ij} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

Integrali primi e integrabilità

Definizione

Un sistema si dice *integrabile* quando esiste un cambiamento di coordinate che lo trasforma in un sistema le cui soluzioni sono determinabili in maniera essenzialmente esplicita.

Il prototipo di sistema integrabile in due dimensioni è

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = c \end{cases}, \quad \text{con } c \text{ costante.}$$

Definizione

Un *integrale primo* è una funzione che rimane costante lungo le soluzioni di un sistema.

Ad esempio, l'energia totale è un integrale primo del problema degli N corpi.

Il *teorema di Liouville-Arnold-Yost* mostra che l'esistenza di un numero di integrali primi "con buone proprietà" pari al numero di gradi di libertà del problema implica l'integrabilità del problema.

Integrali primi e integrabilità

Definizione

Un sistema si dice *integrabile* quando esiste un cambiamento di coordinate che lo trasforma in un sistema le cui soluzioni sono determinabili in maniera essenzialmente esplicita.

Il prototipo di sistema integrabile in due dimensioni è

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = c \end{cases}, \quad \text{con } c \text{ costante.}$$

Definizione

Un *integrale primo* è una funzione che rimane costante lungo le soluzioni di un sistema.

Ad esempio, l'energia totale è un integrale primo del problema degli N corpi.

Il *teorema di Liouville-Arnold-Yost* mostra che l'esistenza di un numero di integrali primi "con buone proprietà" pari al numero di gradi di libertà del problema implica l'integrabilità del problema.

Integrali primi e integrabilità

Definizione

Un sistema si dice *integrabile* quando esiste un cambiamento di coordinate che lo trasforma in un sistema le cui soluzioni sono determinabili in maniera essenzialmente esplicita.

Il prototipo di sistema integrabile in due dimensioni è

$$\begin{cases} \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = c \end{cases} , \quad \text{con } c \text{ costante.}$$

Definizione

Un *integrale primo* è una funzione che rimane costante lungo le soluzioni di un sistema.

Ad esempio, l'energia totale è un integrale primo del problema degli N corpi.

Il *teorema di Liouville-Arnold-Yost* mostra che l'esistenza di un numero di integrali primi "con buone proprietà" pari al numero di gradi di libertà del problema implica l'integrabilità del problema.

Integrabilità del problema dei due corpi

Quanti integrali primi conosciamo nel problema dei due corpi?

- La posizione iniziale e la velocità del centro di massa del sistema: 6 integrali primi.
- Il momento angolare totale del sistema: 3 integrali primi.
- L'energia totale: 1 integrale primo.

Di questi 10 integrali primi, ve ne sono più di 6 che sono "buoni" (ossia che soddisfano le ipotesi del teorema di Liouville-Arnold-Yost).

$$\Downarrow$$

Il teorema di Liouville-Arnold-Yost implica che
il problema dei due corpi è integrabile

E se i corpi sono più di due?

Cosa si sa?

1. Nel problema dei 3 corpi i gradi di libertà del problema sono 9 (in generale, il problema degli N corpi ha $3N$ gradi di libertà).
2. Esiste un complicato teorema di Poincaré che afferma la non esistenza di ulteriori integrali primi (esprimibili algebricamente in funzione della posizione e della velocità dei corpi).
3. Ci sono dimostrazioni di non integrabilità del problema in molti casi particolari.

$$\Downarrow$$

Il problema non è integrabile nel senso di Liouville

I sistemi non integrabili sono complessi da studiare perché manifestano un fenomeno chiamato *caos*.

E se i corpi sono più di due?

Cosa si sa?

1. Nel problema dei 3 corpi i gradi di libertà del problema sono 9 (in generale, il problema degli N corpi ha $3N$ gradi di libertà).
2. Esiste un complicato teorema di Poincaré che afferma la non esistenza di ulteriori integrali primi (esprimibili algebricamente in funzione della posizione e della velocità dei corpi).
3. Ci sono dimostrazioni di non integrabilità del problema in molti casi particolari.

$\Downarrow$

Il problema non è integrabile nel senso di Liouville

I sistemi non integrabili sono complessi da studiare perché manifestano un fenomeno chiamato *caos*.

Primo ingrediente: sistemi dinamici

Sistemi dinamici

$\Downarrow$

Modello per descrivere fenomeni che evolvono nel tempo

Esempi

1. Il moto dei pianeti, le oscillazioni di un pendolo, il flusso delle correnti atmosferiche, lo scorrere dell'acqua in un fiume.
2. Il numero di insetti che anno dopo anno popolano una certa regione, l'andamento giornaliero dei prezzi delle azioni nei mercati finanziari.

La legge che descrive l'evoluzione del sistema può essere di due tipi:

1. *continua*, se definita da un'equazione differenziale che ci dice lo stato del sistema ad ogni istante di tempo reale;
2. *discreta*, se l'evoluzione avviene a intervalli di tempo regolari.

Primo ingrediente: sistemi dinamici

Sistemi dinamici

$\Downarrow$

Modello per descrivere fenomeni che evolvono nel tempo

Esempi

1. Il moto dei pianeti, le oscillazioni di un pendolo, il flusso delle correnti atmosferiche, lo scorrere dell'acqua in un fiume.
2. Il numero di insetti che anno dopo anno popolano una certa regione, l'andamento giornaliero dei prezzi delle azioni nei mercati finanziari.

La legge che descrive l'evoluzione del sistema può essere di due tipi:

1. *continua*, se definita da un'equazione differenziale che ci dice lo stato del sistema ad ogni istante di tempo reale;
2. *discreta*, se l'evoluzione avviene a intervalli di tempo regolari.

Primo ingrediente: sistemi dinamici

Sistemi dinamici

$\Downarrow$

Modello per descrivere fenomeni che evolvono nel tempo

Esempi

1. Il moto dei pianeti, le oscillazioni di un pendolo, il flusso delle correnti atmosferiche, lo scorrere dell'acqua in un fiume.
2. Il numero di insetti che anno dopo anno popolano una certa regione, l'andamento giornaliero dei prezzi delle azioni nei mercati finanziari.

La legge che descrive l'evoluzione del sistema può essere di due tipi:

1. *continua*, se definita da un'equazione differenziale che ci dice lo stato del sistema ad ogni istante di tempo reale;
2. *discreta*, se l'evoluzione avviene a intervalli di tempo regolari.

Secondo ingrediente: caos

Caos deterministico

$\Downarrow$

Evoluzione imprevedibile, apparentemente casuale

1. Sistemi deterministici: sistemi privi di aleatorietà nelle equazioni che li definiscono.
2. Sistemi caotici: sistemi in grado di generare andamenti estremamente complessi e imprevedibili, tanto da risultare quasi indistinguibili da sequenze di eventi generati attraverso processi casuali.

Secondo ingrediente: caos

Caos deterministico

$\Downarrow$

Evoluzione imprevedibile, apparentemente casuale

1. Sistemi deterministici: sistemi privi di aleatorietà nelle equazioni che li definiscono.
2. Sistemi caotici: sistemi in grado di generare andamenti estremamente complessi e imprevedibili, tanto da risultare quasi indistinguibili da sequenze di eventi generati attraverso processi casuali.

Un po' più formale

Definizione

Un *sistema dinamico discreto* è una coppia (X, f), dove X è un insieme e $f : X \to X$ una funzione.

La dinamica è data dall'iterazione della mappa f:

- si parte da una *condizione iniziale* $x_0 \in X$;
- si applica f una prima volta per avere $x_1 = f(x_0) \in X$;
- si applica f una seconda volta per avere $x_2 = f(f(x_0)) \in X$;
- e così via...

Definizione

L'*orbita* di un punto $x_0 \in X$ è l'insieme $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$.

Attenzione: $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}$, le potenze non c'entrano!

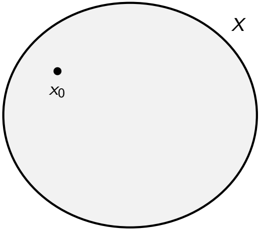
Un po' più formale

Definizione

Un *sistema dinamico discreto* è una coppia (X, f), dove X è un insieme e $f : X \to X$ una funzione.

La dinamica è data dall'iterazione della mappa f:

- si parte da una *condizione iniziale* $x_0 \in X$;
- si applica f una prima volta per avere $x_1 = f(x_0) \in X$;
- si applica f una seconda volta per avere $x_2 = f(f(x_0)) \in X$;
- e così via...



Definizione

L'*orbita* di un punto $x_0 \in X$ è l'insieme $\{f^n(x_0) \,:\, n \geq 0\}$.

Attenzione: $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}$, le potenze non c'entrano!

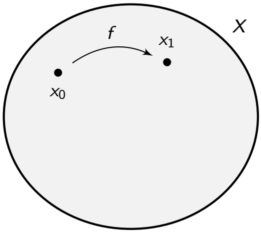
Un po' più formale

Definizione

Un *sistema dinamico discreto* è una coppia (X, f), dove X è un insieme e $f : X \to X$ una funzione.

La dinamica è data dall'iterazione della mappa f:

- si parte da una *condizione iniziale* $x_0 \in X$;
- si applica f una prima volta per avere $x_1 = f(x_0) \in X$;
- si applica f una seconda volta per avere $x_2 = f(f(x_0)) \in X$;
- e così via...



Definizione

L'*orbita* di un punto $x_0 \in X$ è l'insieme $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$.

Attenzione: $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}$, le potenze non c'entrano!

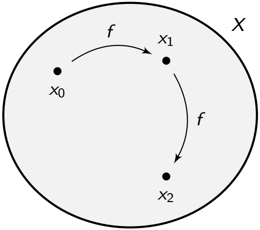
Un po' più formale

Definizione

Un *sistema dinamico discreto* è una coppia (X, f), dove X è un insieme e $f : X \to X$ una funzione.

La dinamica è data dall'iterazione della mappa f:

- si parte da una *condizione iniziale* $x_0 \in X$;
- si applica f una prima volta per avere $x_1 = f(x_0) \in X$;
- si applica f una seconda volta per avere $x_2 = f(f(x_0)) \in X$;
- e così via...



Definizione

L'*orbita* di un punto $x_0 \in X$ è l'insieme $\{f^n(x_0) \; : \; n \geq 0\}$.

Attenzione: $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}$, le potenze non c'entrano!

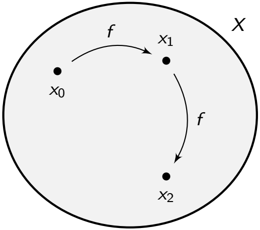
Un po' più formale

Definizione

Un *sistema dinamico discreto* è una coppia (X, f), dove X è un insieme e $f : X \to X$ una funzione.

La dinamica è data dall'iterazione della mappa f:

- si parte da una *condizione iniziale* $x_0 \in X$;
- si applica f una prima volta per avere $x_1 = f(x_0) \in X$;
- si applica f una seconda volta per avere $x_2 = f(f(x_0)) \in X$;
- e così via...



Definizione

L'*orbita* di un punto $x_0 \in X$ è l'insieme $\{f^n(x_0) \,:\, n \geq 0\}$.

Attenzione: $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ volte}}$, le potenze non c'entrano!

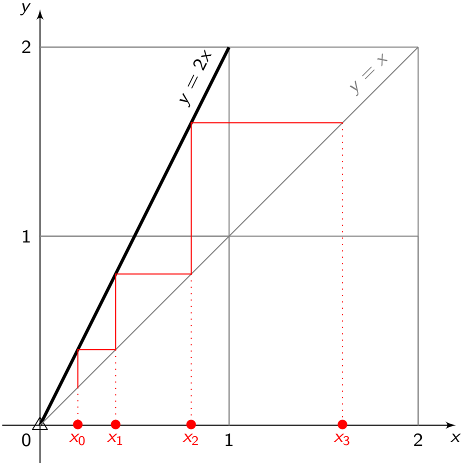
Due mappe lineari

Esempio 1: una mappa espandente

Sia $X = [0, +\infty)$ e $f : X \to X$ la mappa

$$f(x) = 2x.$$

Ogni condizione iniziale $x_0 \neq 0$ ha un'orbita che diverge all'infinito.



Esercizio

Scrivere l'espressione esplicita di $x_n = f^n(x_0)$ per un generico $x_0 \in X$ e provare che $x_n \to +\infty$ per ogni condizione iniziale $x_0 \neq 0$.

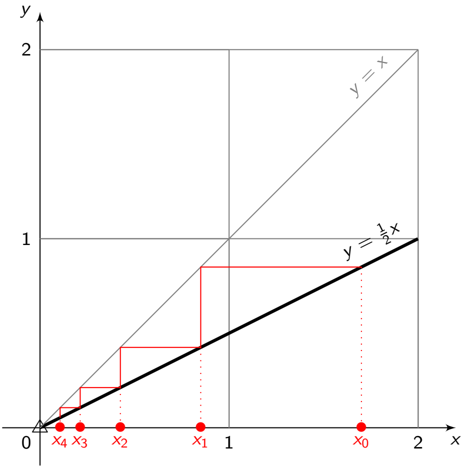
Due mappe lineari

Esempio 2

Sia $X = [0, +\infty)$ e $f : X \to X$ la mappa

$$f(x) = \frac{1}{2}x.$$

Ogni condizione iniziale x_0 ha un'orbita che converge a 0.



Esercizio

Scrivere l'espressione esplicita di $x_n = f^n(x_0)$ per un generico $x_0 \in X$ e provare che $x_n \to 0$ per ogni condizione iniziale $x_0 \in X$.

La mappa logistica

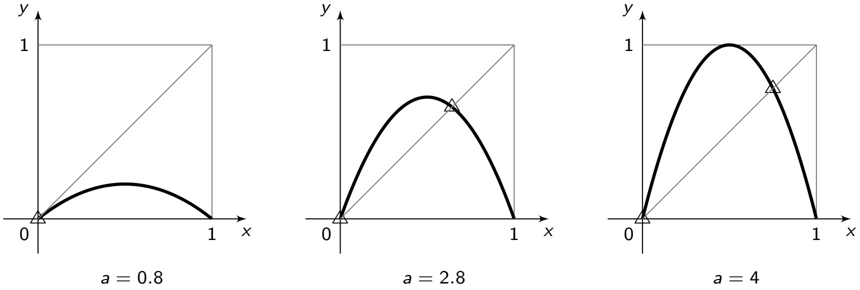
Esempio 3: la mappa logistica

La famiglia delle mappe logistiche è composta delle funzioni $f_a : [0,1] \to [0,1]$ del tipo:

$$f_a(x) = ax(1-x),$$

dove $0 < a \leq 4$.

- Per ogni valore di a, 0 è un punto fisso di f_a.
- Se $1 < a \leq 4$ si ha anche il punto fisso $p_a = 1 - \frac{1}{a}$.



La mappa logistica

Esempio 3: la mappa logistica

Sia $a < 1$ e $f_a(x) = ax(1-x)$. Per qualsiasi condizione iniziale, l'orbita converge al punto fisso 0.

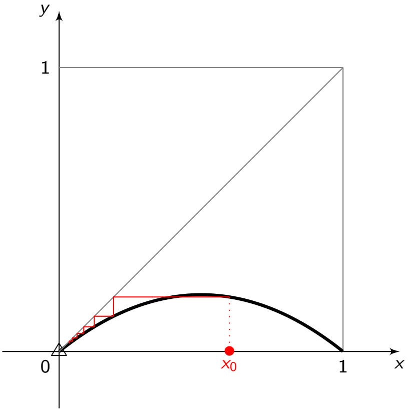


Figura: Mappa logistica per $a = 0.8$ e condizione iniziale $x_0 = 0.6$.

La mappa logistica

Esempio 3: la mappa logistica

Sia $1 < a < 3$ e $f_a(x) = ax(1-x)$. Per qualsiasi condizione iniziale $x_0 \neq 0$ e $x_0 \neq 1$ l'orbita converge al punto fisso p_a.

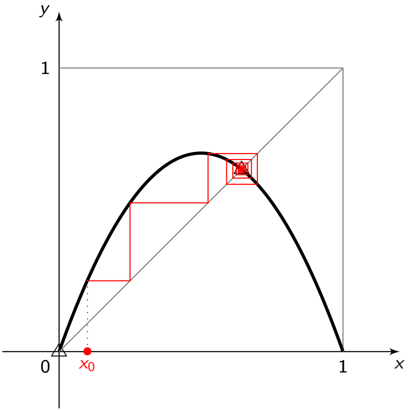
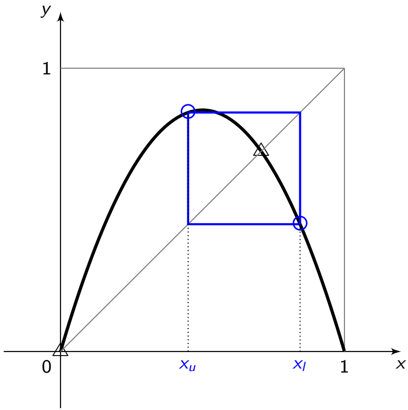


Figura: Mappa logistica per $a = 2.8$ e condizione iniziale $x_0 = 0.099$.

La mappa logistica

Esempio 3: la mappa logistica

Sia $a > 3$ e $f_a(x) = ax(1-x)$. Ci sono due punti x_u e x_l tali che $f_a(x_u) = x_l$ e $f_a(x_l) = x_u$, ossia un punto periodico di periodo 2.



Esercizio

Dimostrare che $x_{u,l} = \frac{a+1 \pm \sqrt{a^2-2a-3}}{2a}$.

La mappa logistica

Esempio 3: la mappa logistica

Si dimostra che se $3 < a < 1 + \sqrt{6}$ allora tutte le orbite che non finiscono in un punto fisso convergono all'orbita periodica $\{x_l, x_u\}$.

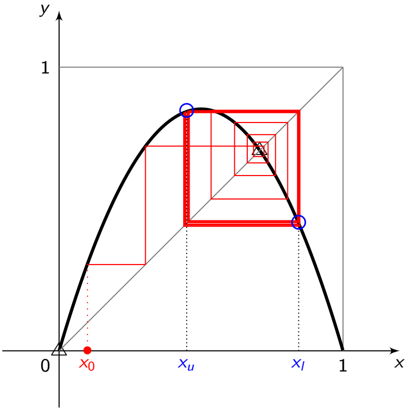


Figura: Mappa logistica per $a = 3.41 < 1 + \sqrt{6}$ e condizione iniziale $x_0 = 0.099$.

La mappa logistica

Esempio 3: la mappa logistica

Per $a = 4$ il comportamento "peggiora": le orbite convergono verso orbite periodiche o insiemi singolari.

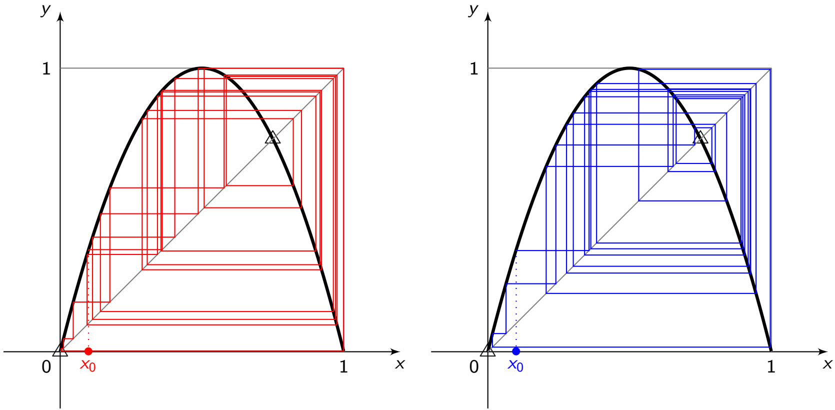


Figura: Mappa logistica per $a = 4$ e condizioni iniziali 0.1 (rossa) e 0.099 (blu).

La mappa logistica

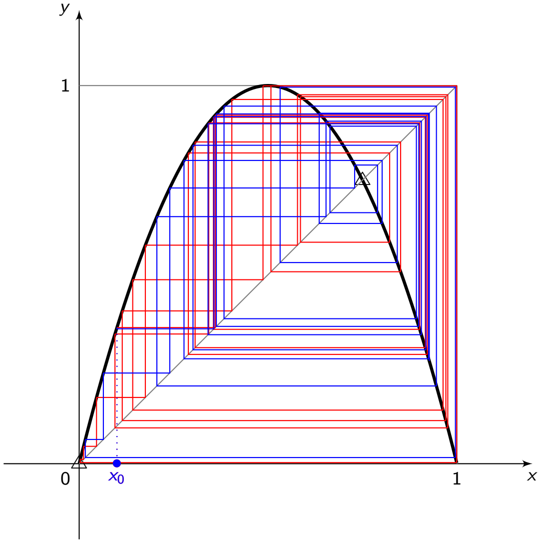
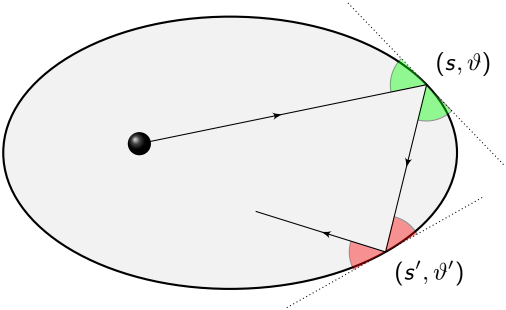


Figura: Mappa logistica per $a = 4$ e condizioni iniziali 0.1 (rossa) e 0.099 (blu).

Giochiamo a biliardo

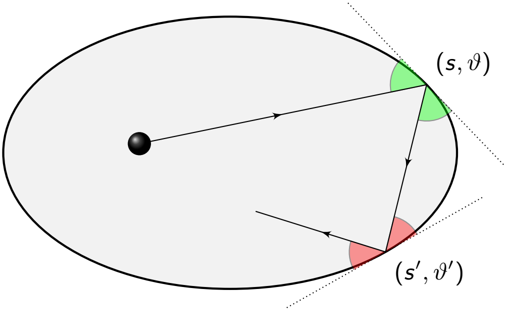
- Un *biliardo matematico* consiste in una regione chiusa del piano (il tavolo) ed un punto al suo interno (la palla) che si muove in linea retta e con velocità costante.
- Quando la palla colpisce il bordo riflette la sua traiettoria in maniera elastica.



Il biliardo circolare e quello ellittico sono integrabili e la loro dinamica è regolare. Ma basta poco e la situazione cambia...

Giochiamo a biliardo

- Un *biliardo matematico* consiste in una regione chiusa del piano (il tavolo) ed un punto al suo interno (la palla) che si muove in linea retta e con velocità costante.
- Quando la palla colpisce il bordo riflette la sua traiettoria in maniera elastica.



Il biliardo circolare e quello ellittico sono integrabili e la loro dinamica è regolare. Ma basta poco e la situazione cambia...

Il biliardo di Sinai

È un biliardo rettangolare con un ostacolo circolare.

Due tavoli rettangolari

Due tavoli rettangolari, molte palle da biliardo, e quasi identiche condizioni.

Il tratto distintivo del caos

Si dice che un sistema dinamico ha *dipendenza sensibile alle condizioni iniziali* se arbitrariamente vicino ad ogni punto se ne trova un altro la cui orbita diverge esponenzialmente da quella del primo.

$\Downarrow$

La dipendenza sensibile alle condizioni iniziali amplifica l'errore introdotto dalle approssimazioni: un'orbita calcolata divergerà dall'orbita reale

Esempi

- Problema degli N corpi ($N \geq 3$)
- Previsioni meteo e modelli climatici
- Modelli economici sull'andamento dei prezzi, modelli di evoluzione demografica, modelli biologici...

Il tratto distintivo del caos

Si dice che un sistema dinamico ha *dipendenza sensibile alle condizioni iniziali* se arbitrariamente vicino ad ogni punto se ne trova un altro la cui orbita diverge esponenzialmente da quella del primo.

$\Downarrow$

La dipendenza sensibile alle condizioni iniziali amplifica l'errore introdotto dalle approssimazioni: un'orbita calcolata divergerà dall'orbita reale

Esempi

- Problema degli N corpi ($N \geq 3$)
- Previsioni meteo e modelli climatici
- Modelli economici sull'andamento dei prezzi, modelli di evoluzione demografica, modelli biologici...

Il problema dei 3 corpi

Cosa si può dire dell'evoluzione di un sistema caotico? Dato che un sistema caotico "assomiglia" a un fenomeno casuale, usiamo gli strumenti dati dalla probabilità.

Il problema dei 3 corpi

Cosa si può dire dell'evoluzione di un sistema caotico? Dato che un sistema caotico "assomiglia" a un fenomeno casuale, usiamo gli strumenti dati dalla probabilità.

Un classico: il lancio di una moneta

- È un esperimento dall'esito casuale;
- La probabilità che esca testa è $\frac{1}{2}$ e la probabilità che esca croce è $\frac{1}{2}$;
- Supponiamo che le uscite abbiano un punteggio: $+\mathbf{1}$ per la testa e $\mathbf{0}$ per la croce.

Poniamoci delle domande:

1. Se lanciamo la moneta 100 volte e registriamo i risultati, sappiamo prevedere quale sarà la 101-esima uscita?
2. Cambia qualcosa se i lanci sono 1000, 10000, ...?
3. Se lanciamo la moneta 10 volte, si sa dire qualcosa sulla *media* dei punteggi usciti?
4. Che succede se il numero dei lanci aumenta?

Un classico: il lancio di una moneta

- È un esperimento dall'esito casuale;
- La probabilità che esca testa è $\frac{1}{2}$ e la probabilità che esca croce è $\frac{1}{2}$;
- Supponiamo che le uscite abbiano un punteggio: $+\mathbf{1}$ per la testa e $\mathbf{0}$ per la croce.

Poniamoci delle domande:

1. Se lanciamo la moneta 100 volte e registriamo i risultati, sappiamo prevedere quale sarà la 101-esima uscita?
2. Cambia qualcosa se i lanci sono 1000, 10000, . . .?
3. Se lanciamo la moneta 10 volte, si sa dire qualcosa sulla *media* dei punteggi usciti?
4. Che succede se il numero dei lanci aumenta?

Un classico: il lancio di una moneta

- È un esperimento dall'esito casuale;
- La probabilità che esca testa è $\frac{1}{2}$ e la probabilità che esca croce è $\frac{1}{2}$;
- Supponiamo che le uscite abbiano un punteggio: $+\mathbf{1}$ per la testa e $\mathbf{0}$ per la croce.

Poniamoci delle domande:

1. Se lanciamo la moneta 100 volte e registriamo i risultati, sappiamo prevedere quale sarà la 101-esima uscita?
2. Cambia qualcosa se i lanci sono 1000, 10000, ...?
3. Se lanciamo la moneta 10 volte, si sa dire qualcosa sulla *media* dei punteggi usciti?
4. Che succede se il numero dei lanci aumenta?

Un classico: il lancio di una moneta

- È un esperimento dall'esito casuale;
- La probabilità che esca testa è $\frac{1}{2}$ e la probabilità che esca croce è $\frac{1}{2}$;
- Supponiamo che le uscite abbiano un punteggio: $+\mathbf{1}$ per la testa e $\mathbf{0}$ per la croce.

Poniamoci delle domande:

1. Se lanciamo la moneta 100 volte e registriamo i risultati, sappiamo prevedere quale sarà la 101-esima uscita?
2. Cambia qualcosa se i lanci sono 1000, 10000, ...?
3. Se lanciamo la moneta 10 volte, si sa dire qualcosa sulla *media* dei punteggi usciti?
4. Che succede se il numero dei lanci aumenta?

Un classico: il lancio di una moneta

- È un esperimento dall'esito casuale;
- La probabilità che esca testa è $\frac{1}{2}$ e la probabilità che esca croce è $\frac{1}{2}$;
- Supponiamo che le uscite abbiano un punteggio: $+\mathbf{1}$ per la testa e $\mathbf{0}$ per la croce.

Poniamoci delle domande:

1. Se lanciamo la moneta 100 volte e registriamo i risultati, sappiamo prevedere quale sarà la 101-esima uscita?
2. Cambia qualcosa se i lanci sono 1000, 10000, ...?
3. Se lanciamo la moneta 10 volte, si sa dire qualcosa sulla *media* dei punteggi usciti?
4. Che succede se il numero dei lanci aumenta?

Un classico: il lancio di una moneta

- È un esperimento dall'esito casuale;
- La probabilità che esca testa è $\frac{1}{2}$ e la probabilità che esca croce è $\frac{1}{2}$;
- Supponiamo che le uscite abbiano un punteggio: $+\mathbf{1}$ per la testa e $\mathbf{0}$ per la croce.

Poniamoci delle domande:

1. Se lanciamo la moneta 100 volte e registriamo i risultati, sappiamo prevedere quale sarà la 101-esima uscita?
2. Cambia qualcosa se i lanci sono 1000, 10000, ...?
3. Se lanciamo la moneta 10 volte, si sa dire qualcosa sulla *media* dei punteggi usciti?
4. Che succede se il numero dei lanci aumenta?

   L'idea intuitiva (per ora) è che la media dei punteggi su N lanci, dove N è grande, sarà

$$\frac{\frac{N}{2} \cdot (+\mathbf{1}) + \frac{N}{2} \cdot \mathbf{0}}{N} = \frac{1}{2}.$$

Le legge dei grandi numeri

Modellizziamo il lancio della moneta:

- chiamiamo X la *variabile aleatoria* che dà gli esiti possibili del lancio, ossia $+\mathbf{1}$ e $\mathbf{0}$;
- ciascuno di questi esiti avviene con probabilità $\frac{1}{2}$, ossia $\mathbb{P}(X = +\mathbf{1}) = \frac{1}{2}$ e $\mathbb{P}(X = \mathbf{0}) = \frac{1}{2}$.

Teorema (legge dei grandi numeri)

Sia $(X_i)_{i\geq 1}$ una successione di variabili indipendenti e tutte uguali a X. Allora con probabilità 1 avviene che

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \frac{1}{2}$$

per $n \to +\infty$.

Le legge dei grandi numeri

Modellizziamo il lancio della moneta:

- chiamiamo X la *variabile aleatoria* che dà gli esiti possibili del lancio, ossia $+\mathbf{1}$ e $\mathbf{0}$;
- ciascuno di questi esiti avviene con probabilità $\frac{1}{2}$, ossia $\mathbb{P}(X = +\mathbf{1}) = \frac{1}{2}$ e $\mathbb{P}(X = \mathbf{0}) = \frac{1}{2}$.

Teorema (legge dei grandi numeri)

Sia $(X_i)_{i\geq 1}$ una successione di variabili indipendenti e tutte uguali a X. Allora con probabilità 1 avviene che

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \frac{1}{2}$$

per $n \to +\infty$.

Torniamo ai sistemi dinamici

L'idea della teoria ergodica è applicare questo tipo di ragionamenti ad un sistema caotico.

- Il comportamento di un sistema dinamico è più complesso del lancio di una moneta.
- Un analogo della legge dei grandi numeri si può dimostrare sotto ipotesi generali, che oltre al lancio delle monete comprendono molti modelli dinamici.

Teorema (teorema ergodico di Birkhoff)

È dato un sistema dinamico $f : X \to X$, dove X è un insieme che ha volume unitario (ossia $vol(X) = 1$). Sia A un sottoinsieme di X. Allora, sotto opportune ipotesi, con probabilità 1 accade che

$$\frac{\#\{f^i(x) \in A\}_{i=1,\ldots,n}}{n} = \begin{array}{c}\text{frequenza di visita ad } A \\ \text{dell'orbita di } x \text{ entro } n \text{ iterazioni}\end{array} \to vol(A)$$

per $n \to +\infty$.

Torniamo ai sistemi dinamici

L'idea della teoria ergodica è applicare questo tipo di ragionamenti ad un sistema caotico.

- Il comportamento di un sistema dinamico è più complesso del lancio di una moneta.
- Un analogo della legge dei grandi numeri si può dimostrare sotto ipotesi generali, che oltre al lancio delle monete comprendono molti modelli dinamici.

Teorema (teorema ergodico di Birkhoff)

È dato un sistema dinamico $f : X \to X$*, dove* X *è un insieme che ha volume unitario (ossia* $vol(X) = 1$*). Sia* A *un sottoinsieme di* X*. Allora, sotto opportune ipotesi, con probabilità* 1 *accade che*

$$\frac{\#\{f^i(x) \in A\}_{i=1,\,\dots,\,n}}{n} = \begin{array}{c} \textit{frequenza di visita ad } A \\ \textit{dell'orbita di } x \textit{ entro } n \textit{ iterazioni} \end{array} \to vol(A)$$

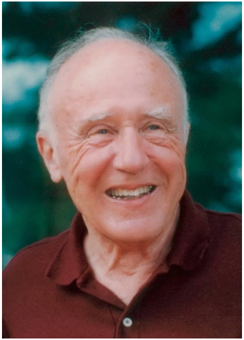
per $n \to +\infty$*.*

Un esempio di applicazione del teorema

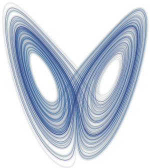
Questo sistema dinamico continuo fu introdotto da Lorenz nel 1963 come modello atmosferico

$$\begin{cases} x'(t) = \sigma(y - x) \\ y'(t) = -xz + rx - y \\ z'(t) = xy - bz \end{cases}$$

con la scelta dei parametri $\sigma = 10,\ r = 28,\ b = \frac{8}{3}$.



> *Does the flap of a butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas?*
>
> Lorenz, 1972



Dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali

Seguiamo la dinamica di due punti talmente vicini da essere quasi indistinguibili.

L'attrattore strano

Il sistema ha un attrattore frattale.

Il teorema ergodico

Vediamo cosa accade alle frequenze di visita di tre insiemi.