Fattoriale e Coefficiente binomiale

fattoriale di un numero n

Si chiama fattoriale di un numero naturale n e si indica con $\boldsymbol{n}!$ (si legge n fattoriale) il prodotto dei primi n numeri naturali:

$$\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 1}$$

$\boldsymbol{n}!$ si può anche scrivere come $\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!$ oppure come $\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{n}-\mathbf{1}) \cdot (\boldsymbol{n}-\mathbf{2})!$

esempi

• $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$	• $6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 5 \cdot 4! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!$
• $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20$	• per convenzione $0! = 1$

coefficiente binomiale

Il simbolo $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ si chiama coefficiente binomiale di n su k con n e k numeri naturali.

Il suo valore è dato da:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!} \qquad \textit{con } n \geq k$$

esempi

- $\binom{\mathbf{5}}{\mathbf{2}} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \mathbf{3}}{\mathbf{3} \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot \mathbf{4}}{\mathbf{2} \cdot 1} = 5 \cdot 2 = \mathbf{10}$
- $\binom{\mathbf{9}}{\mathbf{5}} = \frac{9!}{5! \cdot (9-5)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \frac{9 \cdot \mathbf{8} \cdot 7 \cdot 6}{\mathbf{4} \cdot 3 \cdot \mathbf{2}} = \frac{9 \cdot 7 \cdot \mathbf{6}}{\mathbf{3}} = 9 \cdot 7 \cdot 2 = \mathbf{126}$

alcune proprietà del coefficiente binomiale

$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \binom{1}{1} = \binom{0}{0} = 1$	$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$	$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

applicazioni

Una applicazione del fattoriale e del coefficiente binomiale è la verifica delle **identità** e la ricerca delle soluzioni delle **equazioni** a coefficienti binomiali. Vediamo qualche esempio.

esempi di identità a coefficienti binomiali

primo esempio

$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}$	verificare la seguente identità
$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!}$	si applica la definizione di coefficiente binomiale al primo e al secondo membro dell'identità
$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{n}+k)!}$	si individuano i termini simili e si sommano
$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$	e l'identità risulta verificata

© 2013 - www.matematika.it

Fattoriale e Coefficiente binomiale

secondo esempio	
$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k+1}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} \cdot \frac{\boldsymbol{n-k}}{\boldsymbol{k+1}}$	verificare la seguente identità
$\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)}{(k+1)}$	si applica la definizione di coefficiente binomiale al primo e al secondo membro dell'identità
$\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n!\,(n-k)}{k!\ (n-k)!\,(k+1)}$	si sviluppano i calcoli al secondo membro
$\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n!\,(n-k)}{k!\ \boldsymbol{(n-k)(n-k-1)!}\,(k+1)}$	al denominatore del secondo membro si applica la definizione di fattoriale e si sostituisce $(n-k)!$ con $(n-k)(n-k-1)$
$\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n!\,\boldsymbol{(n-k)}}{k!\ \boldsymbol{(n-k)}(n-k-1)!\,(k+1)}$	si individuano i fattori da semplificare
$\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!\ (n-k-1)!\,(k+1)}$	si semplifica $(n-k)$ al numeratore e al denominatore del secondo membro
$\frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n!}{\boldsymbol{(k+1)!}\,(n-k-1)!}$	si osserva che per la definizione di fattoriale $k!\,(k+1) = (k+1)!$ e l'identità è verificata

esempi di equazioni a coefficienti binomiali	
primo esempio	
$\boldsymbol{3}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{3}} = \boldsymbol{2}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{4}}$	risolvere la seguente equazione a coefficienti binomiali nell'incognita n
$\begin{cases} n \geq 3 \\ n \geq 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad n \geq 4$	si impone la condizione di esistenza $n \geq k$ a tutti i coefficienti binomiali $\binom{n}{k}$ dell'equazione. Si risolve il sistema e si ottiene che le soluzioni accettabili sono i numeri naturali $n \geq 4$
$\frac{3\,n!}{3!\,(n-3)!} = \frac{2\,n!}{4!\,(n-4)!}$	si applica la definizione di coefficiente binomiale al primo e al secondo membro dell'equazione
$\frac{3\,n(n-1)(n-2)(n-3)!}{3\cdot 2\,(n-3)!} = \frac{2\,n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{4\cdot 3\cdot 2\,(n-4)!}$	si sviluppano i numeratori applicando la definizione di fattoriale in modo da consentirne la semplificazione con i rispettivi denominatori
$\frac{\boldsymbol{3}\,n(n-1)(n-2)\boldsymbol{(n-3)!}}{\boldsymbol{3}\cdot 2\,\boldsymbol{(n-3)!}} = \frac{\boldsymbol{2}\,n(n-1)(n-2)(n-3)\boldsymbol{(n-4)!}}{4\cdot 3\cdot \boldsymbol{2}\,\boldsymbol{(n-4)!}}$	si individuano i fattori da semplificare
$\frac{\boldsymbol{n(n-1)(n-2)}}{2} = \frac{\boldsymbol{n(n-1)(n-2)}(n-3)}{12}$	si effettuano le semplificazioni
$\frac{1}{2} = \frac{n-3}{12}$	si dividono i numeratori per i fattori comuni $n(n-1)(n-2)$ al primo e al secondo membro e si ottiene l'equazione di 1° grado nell'incognita n
$6 = n-3$	per risolverla moltiplichiamo ambo i membri per 12
$n-9=0 \quad \rightarrow \quad n=9$	si ottiene la soluzione
$n=9$ *è accettabile perchè soddisfa* $n \geq 4$	si verifica che la soluzione $\boldsymbol{n=9}$ è accettabile

© 2013 - www.matematika.it

Fattoriale e Coefficiente binomiale

secondo esempio	
$\binom{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{3}} = \boldsymbol{4x}$	risolvere la seguente equazione a coefficienti binomiali nell'incognita x
$x+1 \geq 3 \quad \rightarrow \quad x \geq 2$	si impone la condizione di esistenza $n \geq k$ al coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ dell'equazione. Si risolve la disequazione e si ottiene che le soluzioni accettabili sono i numeri naturali $x \geq 2$
$\frac{(x+1)!}{3!\,(x-2)!} = 4x$	si applica la definizione di coefficiente binomiale al primo membro dell'equazione
$\frac{(x+1)(x)(x-1)(x-2)!}{3 \cdot 2\,(x-2)!} = 4x$	si sviluppa il numeratore applicando la definizione di fattoriale in modo da consentirne la semplificazione con il denominatore
$\frac{(x+1)(x)(x-1)\boldsymbol{(x-2)!}}{3 \cdot 2\,\boldsymbol{(x-2)!}} = 4x$	si individuano i fattori da semplificare
$\frac{(x+1)(x)(x-1)}{6} = 4x$	si effettuano le semplificazioni e si ottiene una equazione nell'incognita x
$(x+1)(x-1) - 24 = 0$	per risolverla moltiplichiamo ambo i membri per 6
$x^2 - 25 = 0$	si ottiene una equazione di secondo grado in x
$x_1 = -5 \;\cup\; x_2 = 5$	si risolve l'equazione ottenendo due soluzioni
$x_1 = -5 \;\cup\; x_2 = 5 \quad e \quad x \geq 2$	si confrontano le soluzioni con la condizione di esistenza $x \geq 2$
$x = 5 \quad$ è $accettabile\ perch$è $soddisfa\ \ x \geq 2$	si verifica che la soluzione $\boldsymbol{x = 5}$ è accettabile

esercizi da svolgere					
verificare le seguenti identità		risolvere le seguenti equazioni			
1	$\binom{2n}{n} = 2\binom{n}{2} + n^2$	*1*	$\binom{x}{3} - \binom{x}{5} = 0$	*R.:* $x = 8$
2	$\binom{2n}{3} = 2\binom{2n}{3} + 2n\binom{n}{2}$	*2*	$\binom{x}{6} = \binom{x}{8}$	*R.:* $x = 14$
3	$\binom{3n}{2} = 3\binom{n}{2} + n^2\binom{3}{2}$	*3*	$\binom{x}{2} - 10 = 0$	*R.:* $x = 5$
4	$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$	*4*	$\binom{x}{4} - \binom{x}{3} = 0$	*R.:* $x = 7$
5	$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} \cdot \frac{n-k+1}{k}$	*5*	$4\binom{x}{4} = 5\binom{x}{x-3}$	*R.:* $x = 8$
6	$\binom{n}{5} \cdot \binom{n-5}{7} = \binom{n}{7} \cdot \binom{n-7}{5}$	*6*	$4\binom{x}{2} + 4\binom{x}{3} + 4\binom{x}{4} = 11x^2 - 11$	*R.:* $x = 8$

© 2013 - www.matematika.it

Fattoriale e Coefficiente binomiale

esempio di equazione ottenuta da una progressione aritmetica a coefficienti binomiali	
Se $n > 3$ e $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n ? (Tratto dall'esame di Stato 2008 quesito numero 6)	
in questo caso non è necessario procedere al calcolo della condizione di esistenza dei coefficienti binomiali perché nella traccia dell'esercizio è fornita una condizione di accettabilità $(n > 3)$	
Ricorda che una progressione aritmetica è una successione di numeri tale che la differenza tra due elementi successivi è costante. Ad esempio, dati tre elementi a, b, c, se essi sono in progressione aritmetica allora si avrà $b - a = c - b$ Nel caso della traccia, se i tre elementi sono in progressione aritmetica allora si avrà $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} = \binom{n}{3} - \binom{n}{2}$ ottenendo così l'equazione a coefficienti binomiali che va risolta per ottenere il valore di n	
$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} - \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n!}{3!\,(n-3)!} - \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$	si applica la definizione di coefficiente binomiale a tutti i termini dell'equazione e si sviluppano i numeratori applicando la definizione di fattoriale in modo da consentirne la semplificazione con i rispettivi denominatori
$\frac{n(n-1)\boldsymbol{(n-2)!}}{2!\,\boldsymbol{(n-2)!}} - \frac{n\boldsymbol{(n-1)!}}{\boldsymbol{(n-1)!}} = \frac{n(n-1)(n-2)\boldsymbol{(n-3)!}}{3!\,\boldsymbol{(n-3)!}} - \frac{n(n-1)\boldsymbol{(n-2)!}}{2!\,\boldsymbol{(n-2)!}}$	
$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} - \frac{n(n-1)}{2}$	si effettuano le semplificazioni
$\frac{\boldsymbol{n}(n-1)}{2} - \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{n}(n-1)(n-2)}{6} - \frac{\boldsymbol{n}(n-1)}{2}$	si individuano i fattori comuni al primo e al secondo membro (n)
$\frac{(n-1)}{2} - 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{6} - \frac{(n-1)}{2}$	si dividono i numeratori per i fattori comuni al primo e al secondo membro e si ottiene una equazione nell'incognita n
$3(n-1) - 6 = (n-1)(n-2) - 3(n-1)$	si calcola il m.c.m e si sviluppano i calcoli
$n^2 - 9n + 14 = 0$	si ottiene un'equazione di secondo grado in n
$n_1 = 2 \quad \cup \quad n_2 = 7$	si risolve l'equazione ottenendo due soluzioni
$n_1 = 2 \quad \cup \quad n_2 = 7 \quad e \quad n > 3$	si confrontano le soluzioni con la condizione di esistenza $n > 3$
$n = 7$ $\quad$ è $accettabile\ perchè\ soddisfa \quad n \geq 3$	si accetta solo la soluzione $\boldsymbol{n = 7}$

esercizi da svolgere		
1	Se $n > 4$ e $\binom{n-1}{1}, \binom{n-2}{2}, \binom{n}{2}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?	$R.$: $n = 6$
2	Se $n > 6$ e $\binom{n}{4}, \binom{n}{5}, \binom{n}{6}$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?	$R.$: $n = 7 \cup n = 14$
3	Se $n > 3$ e $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ sono in progressione geometrica, qual è il valore di n?	$R.$: $n = -1$ $ma\ non$ è $accettabile$

© 2013 - www.matematika.it