Università di Pisa - DISAAA

Aritmetica: divisibilità e numeri primi

Alessio Del Vigna

1 Divisibilità

Il primo concetto che dobbiamo definire per poter parlare di numeri primi è il concetto di divisibilità tra numeri naturali.

Definizione 1. Dati due numeri naturali a e $b \neq 0$ diciamo che b *divide* a se e solo se esiste un intero k tale che

$$a = b \cdot k.$$

Quando b divide a diremo che b è un *divisore* di a, o che a è un *multiplo* di b.

La definizione di divisibilità ci fornisce un modo per trattare i numeri che sappiamo essere multipli di altri. Facciamo un esempio: se un numero n è multiplo di 5, allora lo potremo scrivere nella forma $n = 5 \cdot k$, per qualche $k \in \mathbb{N}$.

Esercizio 1.1. Dire di quale intero è multipla la somma di due numeri con le caratteristiche indicate:

(a) entrambi multipli di 5;

(b) uno multiplo di 10 e l'altro di 25;

(c) uno multiplo di 3 e uno multiplo di 6;

(d) uno multiplo di 3 e uno multiplo di 4.

Esercizio 1.2. Dire di quale intero è multiplo il prodotto di due numeri con le caratteristiche indicate:

(a) uno multiplo di 3 e l'altro di 2;

(b) uno multiplo di 5 e l'altro di 5.

Esercizio 1.3. Vero o falso.

(a) Un numero multiplo di 4 e di 10 è multiplo di 40.

(b) Un numero multiplo di 6 e di 12 è multiplo di 12.

(c) Un numero multiplo di 5 e di 8 è multiplo di 40.

(d) Un numero multiplo di 3 e di 4 è multiplo di 3.

Esercizio 1.4. Dimostrare che la somma di tre numeri consecutivi è multipla di 3.

Esercizio 1.5. Di quale intero è multiplo il doppio di un multiplo di 5?

Esercizio 1.6. Il quadruplo di un multiplo di 4 è multiplo di 4, 8 o 16?

Esercizio 1.7. Stabilire se i seguenti numeri sono pari o dispari:

$$2 \cdot 2013 + 1, \quad 3^{57} + 1, \quad 4^{25} - 2, \quad 6^{43} - 3.$$

2 Numeri primi

Nel corso della storia, in particolare dai pitagorici, è stato ritenuto opportuno suddividere gli interi in alcune classi: dapprima nei numeri pari e dispari, poi in numeri primi e composti.

Definizione 2. Un *numero primo* è un numero maggiore di 1 che ha come unici divisori solo 1 e se stesso.[1]

Esempi di numeri primi sono

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots, 97, \dots, 32003, \dots.$$

I numeri primi hanno da sempre affascinato i matematici. Il grande matematico Gauss (1777-1855) sintetizzò il suo giudizio sulla teoria dei numeri in questo celebre aforisma: "la matematica è la regina delle scienze e la teoia dei numeri è la regina della matematica". Come detto, gli interi sono stati studiati sin dall'antichità: i primi risultati risalgono infatti agli antichi Greci, e in particolare agli *Elementi* di Euclide, scritti attorno al 300 a.C., nei quali per giunta si dà la prima dimostrazione dell'infinità dei numeri primi. Nonostante questo, numerose congetture che li riguardano non sono state ancora dimostrate; tra le più note vi sono l'ipotesi di Riemann, la congettura di Goldbach e la congettura dei primi gemelli, che ad oggi, dopo oltre un secolo dalla loro formulazione, non sono state ancora provate.

Teorema 1 (teorema di Euclide)**.** *Esistono infiniti numeri primi.*

Dimostrazione. Siano $2, 3, \dots, p$ i numeri primi fino a p, ordinati in modo crescente. Si consideri allora il numero intero

$$q = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot p + 1.$$

Se q è primo abbiamo trovato un numero primo più grande di p, e dunque abbiamo finito. Altrimenti q avrà un divisore primo, e tale divisore non può essere nessuno dei primi considerati, per costruzione: tale divisore è dunque un numero primo più grande di p. $\square$

Esistono poi numerose questioni confermate da tutte le verifiche sperimentali, di cui però ancora non si è dimostrata la validità tramite delle dimostrazioni. Qui presentiamo quella dei numeri primi gemelli.

Definizione 3. Due primi che differiscono di 2 sono detti *primi gemelli.*

Ad esempio 3 e 5 sono due numeri primi gemelli, 101 e 103 anche. Ciò che si congettura è che esistano infiniti numeri primi gemelli: non è mai stata data una dimostrazione della congettura, che è tutt'ora aperta, benché l'evidenza sperimentale faccia pensare che sia vera.

Congettura 1 (congettura dei primi gemelli)**.** *Esistono infinite coppie di numeri primi gemelli.*

Un altro problema di semplice enunciazione ma tuttora irrisolto riguarda la possibilità di scrivere i numeri pari come somma di numeri primi.

Congettura 2 (congettura di Goldbach)**.** *Ogni numero pari* ≥ 4 *può essere scritto come somma di due numeri primi.*

[1] Quindi 1 **non** è un numero primo!