Università di Pisa - DISAAA

Geometria euclidea (piana e solida)

Alessio Del Vigna

La geometria euclidea è una teoria fondata su quattro *enti primitivi* e sulle relazioni che tra essi intercorrono, fornite dai teoremi. I quattro enti primitivi in questione sono il *punto*, la *retta*, il *piano* e lo *spazio*: essendo enti primitivi, per loro natura non hanno una definizione. Le prime definizioni che si possono dare grazie a questi enti sono le seguenti.

Definizione 1. Una *semiretta* è una delle due parti in cui viene suddivisa una retta da un punto. Tale punto si dice *origine* della semiretta.

Definizione 2. Un *segmento* è la porzione di retta delimitata da due punti.

Definizione 3. Un *angolo* è una delle due parti in cui un piano resta suddiviso da due semirette aventi l'origine in comune. Tali semirette si chiamano *lati* dell'angolo e la loro origine comune *vertice* dell'angolo.

1 Triangoli

Definizione 4. Un *triangolo* è la parte di piano delimitata da una poligonale chiusa avente tre lati[1].

Definizione 5. In un triangolo, un'*altezza* è un segmento uscente da un vertice del triangolo, e perpendicolare al lato opposto.

Definizione 6. In un triangolo, una *mediana* è un segmento che congiunge un vertice con il punto medio del lato opposto.

Definizione 7. In un triangolo, una *bisettrice* è un segmento uscente da un vertice e che divide in due parti congruenti l'angolo al vertice stesso.

Teorema 1 (esistenza dell'ortocentro)**.** *In un triangolo le tre altezze si incontrano in un unico punto, che viene chiamato* ortocentro*.*

Teorema 2 (esistenza del baricentro)**.** *In un triangolo le tre mediane si incontrano in un unico punto, che viene chiamato* baricentro*.*

Teorema 3 (esistenza dell'incentro)**.** *In un triangolo le tre bisettrici si incontrano in un unico punto, che viene chiamato* incentro*.*

1.1 Criteri di congruenza

Teorema 4 (primo criterio)**.** *Due triangoli sono congruenti se e solo se hanno congruenti due lati e un angolo.*

Teorema 5 (secondo criterio)**.** *Due triangoli sono congruenti se e solo se hanno congruenti due angoli e un lato.*

Teorema 6 (terzo criterio)**.** *Due triangoli sono congruenti se e solo se hanno tutti e tre i lati tra loro congruenti.*

[1] Una *poligonale* è una sequenza di segmenti consecutivi (ovvero aventi un estremo in comune); *chiusa* significa che l'estremo libero del primo segmento e l'estremo libero dell'ultimo coincidono.

1.2 Triangoli isosceli

Definizione 8. Un triangolo *isoscele* è un triangolo che ha due lati congruenti.

Teorema 7. *Un triangolo è isoscele se e solo se ha due angoli congruenti.*

Teorema 8. *In un triangolo isoscele, la mediana della base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e altezza.*

1.3 Proprietà dei triangoli

Teorema 9. *In un triangolo, la somma degli angoli interni è uguale a un angolo piatto (ossia ad un angolo che misura 180 gradi).*

Teorema 10 (disuguaglianze triangolari)**.** *In un triangolo, un lato è minore della somma degli altri due e maggiore della loro differenza.*

1.4 Similitudine

Definizione 9. Due triangoli sono *simili* se hanno i tre lati in proporzione, oppure se hanno tutti e tre gli angoli congruenti[2].

Esercizio 1.1. Prendiamo un triangolo ABC. Sia M il punto medio del lato AC e tracciamo da M la parallela alla base AB, che incontra in P il lato BC. Dimostrare che il segmento MP è metà di AB.

1.5 Triangoli rettangoli

Definizione 10. Un triangolo è *rettangolo* quando ha un angolo retto.

Teorema 11 (teorema di Pitagora)**.** *In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui cateti. Ossia, se indichiamo con c_1 e c_2 i due cateti e con i l'ipotenusa allora vale:*

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2.$$

Teorema 12 (primo teorema di Euclide)**.** *In un triangolo rettangolo, un cateto è medio proporzionale tra la sua proiezione sull'ipotenusa e l'ipotenusa stessa.*

Teorema 13 (secondo teorema di Euclide)**.** *In un triangolo rettangolo, l'altezza relativa all'ipotenusa è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.*

Esercizio 1.2. Abbiamo un triangolo rettangolo. Un cateto misura 6 cm e la sua proiezione sull'ipotenusa 3.6 cm. Calcolare perimetro, area e misura dell'altezza relativa all'ipotenusa.

Esercizio 1.3. L'ipotenusa di un triangolo rettangolo misura 10 cm e la proiezione di un cateto su di essa misura 3 cm. Calcolare perimetro, area e altezza relativa all'ipotenusa.

2 Figure equivalenti

Definizione 11. Due figure geometriche si dicono *equivalenti* quando hanno la stessa area.

Esercizio 2.1. Un rettangolo ha le dimensioni di 4 cm e 36 cm. Che lato ha il quadrato equivalente?

[2] In realtà è sufficiente richiede che ne abbiano due angoli congruenti. Perché?

Esercizio 2.2. Una circonferenza ha raggio 5 cm. Calcolare il lato del triangolo equilatero equivalente.

Esercizio 2.3. Un quadrato ha lato 6 cm. Calcolare il perimetro del rettangolo con base doppia dell'altezza ed equivalente al quadrato.

3 Quadrilateri

Definizione 12. Un *quadrilatero* è la parte di piano delimitata da una poligonale chiusa avente quattro segmenti.

Definizione 13. Un *trapezio* è un quadrilatero che ha una coppia di lati paralleli. Un *parallelogramma* è un quadrilatero che ha due coppie di lati paralleli. Un *rombo* è un parallelogramma con i lati tutti della stessa lunghezza. Un *rettangolo* è un parallelogramma con gli angoli tutti uguali (e quindi retti, perché?). Un *quadrato* è un quadrilatero con tutti gli angoli e tutti i lati uguali.

Esercizio 3.1. Cosa sono i seguenti quadrilateri?

(a) Un parallelogramma con i lati uguali.

(b) Un trapezio con i lati obliqui paralleli.

(c) Un parallelogramma con un angolo retto.

4 Circonferenza e cerchio

Definizione 14. Dato un punto O, il luogo dei punti equidistanti da O è detto *circonferenza* di centro O. La distanza tra O ed un qualsiasi punto della circonferenza si chiama *raggio*.

Definizione 15. Un *cerchio* è la parte di piano limitata da una circonferenza.

La misura di una circonferenza e l'area di un cerchio si calcolano con le formule seguenti:

$$C = 2\pi r, \qquad A = \pi r^2.$$

Esercizio 4.1. Calcolare la misura della circonferenza e l'area di un cerchio di diametro 20 cm.

Esercizio 4.2. L'area di un cerchio di raggio 1 cm è compresa tra 3 e 4. Vero o falso?

4.1 Tangenti ad una circonferenza

Teorema 14. *La tangente ad una circonferenza in un suo punto P e il raggio corrispondente al punto P sono perpendicolari.*

Teorema 15 (tangenti da un punto esterno)**.** *Le tangenti ad una circonferenza condotte da un punto esterno ad essa P sono due e i segmenti di tangente da P alla circonferenza sono congruenti.*

4.2 Angoli al centro e alla circonferenza

Definizione 16. Un angolo con vertice su una circonferenza è detto *angolo alla circonferenza*. Un angolo con vertice nel centro di una circonferenza è detto *angolo al centro*.

Teorema 16. *Due angoli alla circonferenza che insistono sullo stesso arco sono congruenti.*

Teorema 17. *Un angolo al centro e uno alla circonferenza insistono sullo stesso arco. Allora l'angolo al centro è doppio di quello alla circonferenza.*

4.3 Poligoni inscritti e circoscritti

Definizione 17. Un poligono è *inscritto* in una circonferenza quando tutti i suoi vertici appartengono alla circonferenza.

Definizione 18. Un poligono è *circoscritto* ad una circonferenza se tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza.

Tutti i triangoli sono sia inscrivibili sia circoscrivibili ad una circonferenza; cioè per ogni triangolo esistono la circonferenza circoscritta e quella inscritta, rispettivamente.

Teorema 18. *Un triangolo inscritto in una circonferenza che ha come lato il diametro di una circonferenza è rettangolo, e viceversa.*

Teorema 19. *Un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se la somma degli angoli opposti è uguale (e uguale a 180 gradi, perché?).*

Teorema 20. *Un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza se la somma dei lati opposti è uguale.*

Esercizio 4.3. Dimostrare che un rettangolo è inscrivibile in una circonferenza, ma non circoscrivibile.

Esercizio 4.4. Dimostrare che un rombo è sia inscrivibile in una circonferenza che circoscrivibile.

Esercizio 4.5. Dimostrare che i trapezi isosceli sono inscrivibili in una circonferenza.

Concludiamo con i poligoni regolari. Un *poligono regolare* è un poligono con tutti i lati e gli angoli congruenti; tutti i poligoni regolari sono inscrivibili e circoscrivibili.

Definizione 19. L'*apotema* di un poligono regolare è il raggio della circonferenza inscritta.

Esercizio 4.6. Calcolare l'apotema di un quadrato.

Esercizio 4.7. Dimostrare che l'apotema di un esagono di lato ℓ è $\ell\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5 Geometria euclidea nello spazio

La geometria euclidea può essere anche studiata nello spazio invece che nel piano. Nello spazio ci possiamo trovare punti, rette e piani, partiamo da questi.

Teorema 21. *Per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano.*

Le posizioni reciproche di due piani distinti sono due: essi possono essere *paralleli* o *incidenti*, ed in quest'ultimo caso si intersecano in una retta. Quanto a due rette distinte, invece, esse possono avere tre posizioni reciproche: esse possono essere *parallele*, *incidenti* o *sghembe* (ossia né parallele, né incidenti).

5.1 Poliedri

Definizione 20. Un *poliedro* è un solido delimitato da un numero finito di facce piane poligonali, dette *facce* del poliedro. I lati delle facce sono detti *spigoli* e i vertici delle facce sono i *vertici* del poliedro.

Teorema 22 (relazione di Eulero)**.** *Siano F, V e S il numero di facce, spigoli e vertici di un poliedro semplice (senza buchi e connesso). Allora*

$$F + V - S = 2.$$

Esercizio 5.1. Verificare la relazione di Eulero su alcuni poliedri.

Un poliedro è *regolare* se ha facce che sono poligoni regolari congruenti. Sorprendentemente esistono solo cinque poliedri semplici regolari, i cosiddetti *solidi platonici*: il *tetraedro*, il *cubo*, l'*ottaedro*, il *dodecaedro* e l'*icosaedro*.

6 Volume e superficie dei principali solidi

Diamo le formule per i volumi e le superfici (laterale e totale) dei solidi che principalmente si incontrano nelle applicazioni.

(a) Parallepipedo di dimensioni di base a e b e di altezza c:

$$V = abc, \quad S_{lat} = 2(a+b)c, \quad S_{tot} = 2(ab+ac+bc).$$

(b) Cubo di lato ℓ:

$$V = abc, \quad S_{lat} = 4\ell^2, \quad S_{tot} = 6\ell^2.$$

(c) Cilindro di raggio di base r e altezza h:

$$V = \pi r^2 \cdot h, \quad S_{lat} = 2\pi r \cdot h, \quad S_{tot} = S_{lat} + 2\pi r^2.$$

(d) Cono di raggio di base r e altezza h: Volume di un cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$, con r il raggio di base e h l'altezza.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h, \quad S_{lat} = \pi r\sqrt{r^2+h^2}, \quad S_{tot} = S_{lat} + \pi r^2.$$

(e) Sfera di raggio r:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad S_{tot} = 4\pi r^2.$$