Università degli Studi di Pisa
Corso di Laurea in Fisica
Geometria I

SPAZI VETTORIALI

Alessio del Vigna

25 ottobre 2016

Spazi vettoriali

Esercizio 1. Verificare che le matrici quadrate di ordine 3 triangolari superiori sono un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Provare inoltre che la sua dimensione è 6. Generalizzare l'esercizio per lo spazio $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Esercizio 2. Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 3. Provare che l'insieme W dei polinomi aventi $x = 1$ come soluzione doppia sono un sottospazio vettoriale di V. Determinare inoltre la dimensione di W e una sua base.

Esercizio 3. Sia

$$V = \{f \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$$

l'insieme delle funzioni da $\mathbb{N}$ a valori reali (ovvero l'insieme delle successioni reali). Dimostrare che V è uno spazio vettoriale di dimensione infinita su $\mathbb{R}$.[1]

Esercizio 4. Considerare i due vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Dimostrare che $V = \operatorname{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ha dimensione 2.

(2) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{w} = (t, 0, -1)$ appartiene a V.

(3) Per i valori di t calcolati al punto precedente, determinare le componenti di $\mathbf{w}$ rispetto a $\mathbf{v}_1$ e a $\mathbf{v}_2$.

[1] *Suggerimento.* Dimostrare che non è possibile generare V da un insieme finito di funzioni.

Esercizio 5. Determinare la somma dei due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ dati da

$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{e} \quad V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \wedge x - z = 0\}.$$

La somma è una somma diretta?

Esercizio 6. Siano $U = \operatorname{Span}(1+t, 1-t)$ e $W = \operatorname{Span}\left(t + t^2, t - t^2\right)$, sottospazi di $\mathbb{R}_2[t]$. Determinare la dimensione di $U + W$ e $U \cap W$, ed anche una loro base.

Esercizio 7. Considerare i due sottospazi di $\mathbb{R}^3$ dati da

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \quad \text{e} \quad V_k = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix}\right),$$

al variare di $k \in \mathbb{R}$. Determinare somma e intersezione di questi sottospazi, e stabilire per quali valori di k la somma è diretta.

Esercizio 8. Sia $U \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale

$$U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}.$$

(1) Determinare una base $\mathscr{B}$ di U.

(2) Verificare che il vettore $\mathbf{u} = (1, 1, 2)$ appartiene a U e determinare le sue coordinate rispetto alla base $\mathscr{B}$ trovata.

(3) Determinare il vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tale che le sue coordnate rispetto a $\mathscr{B}$ sono $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = (1, -1)$.

Esercizio 9. Sia $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti reali, e siano $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ i sottoinsiemi delle matrici simmetriche e antisimmetriche, rispettivamente.

(1) Dimostrare che $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ e $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(2) Determinare la loro dimensione e una loro base.

(3) Dimostrare che $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Vettori geometrici

Esercizio 10. Considerare i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$: $A = (1, 2, 0)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (1, 0, 2)$ e $D = (0, 2, 1)$.

(1) Determinare le equazioni parametriche della retta r per A e B e di quella s per C e D.

(2) Determinare la posizione reciproca di r ed s.

(3) Determinare le equazioni parametriche e cartesiane del piano Π contenente r e parallelo ad s.

(4) Calcolare la distanza di C e di D da Π.