Un esercizio sulla continuità di funzioni

Alessio Del Vigna

23 Marzo 2020

Esercizio 1. Dire in quali punti del dominio è continua la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^5+y^5} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Soluzione. La funzione ha come dominio $(\mathbb{R}^2 \setminus \{y=-x\}) \cup \{(0,0)\}$ ed è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}^2 \setminus \{y=-x\}$ perché in un intorno di ciascuno di questi punti la funzione si esprime come quoziente di funzioni continue, in quanto polinomiali, tali che la funzione a denominatore non è nulla.

Rimane quindi da stabilire la continuità della funzione in $(0,0)$, pertanto studiamo il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{x^5+y^5}.$$

Lungo le restrizioni agli insiemi $\{x=0\}$, $\{y=0\}$ e $\{y=\lambda x\}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, tutti privati dell'origine, la funzione f ha limite nullo (verificarlo per esercizio). Consideriamo adesso la restrizione di f all'insieme $\{y=-x+x^\beta\}$, con $\beta > 1$. Si ha

$$f|_{\{y=-x+x^\beta\}}(x) = \frac{x^4(-x+x^\beta)^2}{x^5+(-x+x^\beta)^5} = \frac{x^4(x^2-2x^{\beta+1}+x^{2\beta})}{x^5+(-x^5+5x^{4+\beta}+o(x^{4+\beta}))} = \frac{x^6+o(x^6)}{-5x^{4+\beta}+o(x^{4+\beta})},$$

dove l'introduzione degli o-piccoli per $x \to 0$ sfrutta il fatto che $\beta > 1$[1]. Scelto $\beta = 2$ si ottiene

$$f|_{\{y=-x+x^2\}}(x) = \frac{x^6+o(x^6)}{-5x^6+o(x^6)} = \frac{1+o(1)}{-5+o(1)},$$

che ha come limite $-\frac{1}{5}$ per $x \to 0$. Avendo trovato due restrizioni distinte lungo cui la funzione f ha due limiti diversi, dal teorema ponte segue che il limite non esiste. Ne segue pertanto che la funzione f non è continua in $(0,0)$.

[1]Più esplicitamente, per il numeratore si ha $x^4(x^2-2x^{\beta+1}+x^{2\beta}) = x^6-2x^{\beta+5}+x^{2\beta+4}$ e poiché $\beta+5$ e $2\beta+4$ sono entrambi > 6 per $\beta > 1$ si ha $-2x^{\beta+5}+x^{2\beta+4} = o(x^6)$ per $x \to 0$. Per il denominatore invece si sfrutta lo sviluppo della potenza quinta del binomio (formula di Newton o triangolo di Tartaglia), e si ha

$$x^5+(-x+x^\beta)^5 = 5x^{4+\beta} - 10x^{3+2\beta} + 10x^{2+3\beta} - 5x^{1+4\beta} + x^{5\beta},$$

e gli esponenti $3+2\beta$, $2+3\beta$, $1+4\beta$ e 5β sono tutti $> 4+\beta$ per $\beta > 1$.