

ANALISI II

✉ delvigna@mail.dm.unipi.it
poisson.phc.dm.unipi.it / v delvigna

/ — /

1. Topologia

Es. 6

$$P = (2, -1) \in \mathbb{R}^2$$

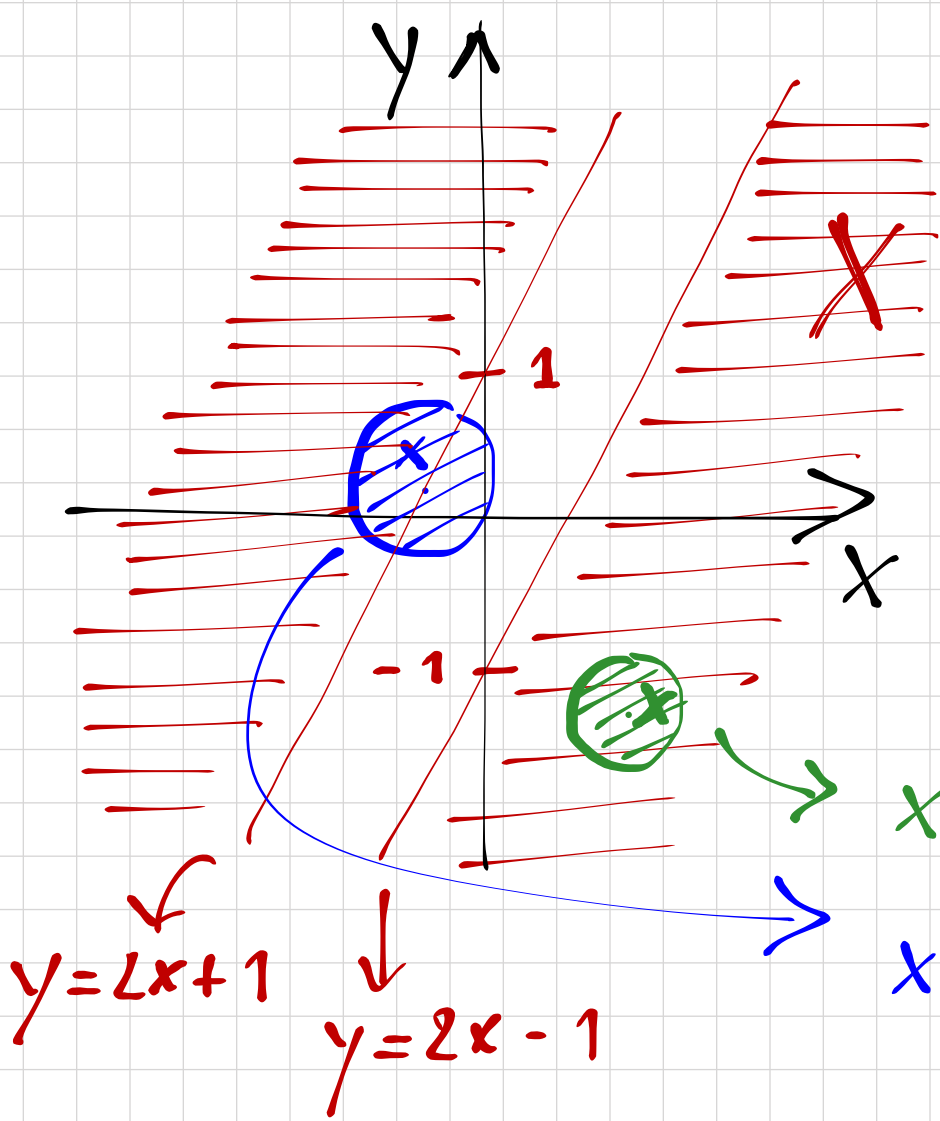
$$X = \{ Q = (x, y) : \langle v_{OP}, v_{OQ} \rangle \geq 1 \} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$v_{OP} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_{OQ} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \langle v_{OP}, v_{OQ} \rangle = 2x - y$$

$$\Rightarrow X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |2x - y| \geq 1 \}$$

$$|2x - y| \geq 1 \Leftrightarrow 2x - y \geq 1 \vee 2x - y \leq -1$$



$$2x - y \geq 1 \Leftrightarrow y \leq 2x - 1$$

$$2x - y \leq -1 \Leftrightarrow y \geq 2x + 1$$

X è unione di due semipiani chiusi

x è p.to interno di X

x è p.to di frontiera per X

X non è aperto (ci sono p.ti di fron.)

X^c aperto, $\Rightarrow X$ chiuso

X non limitato, $\Rightarrow X$ non compatto

$$\overset{\circ}{X} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |2x - y| > 1 \}$$

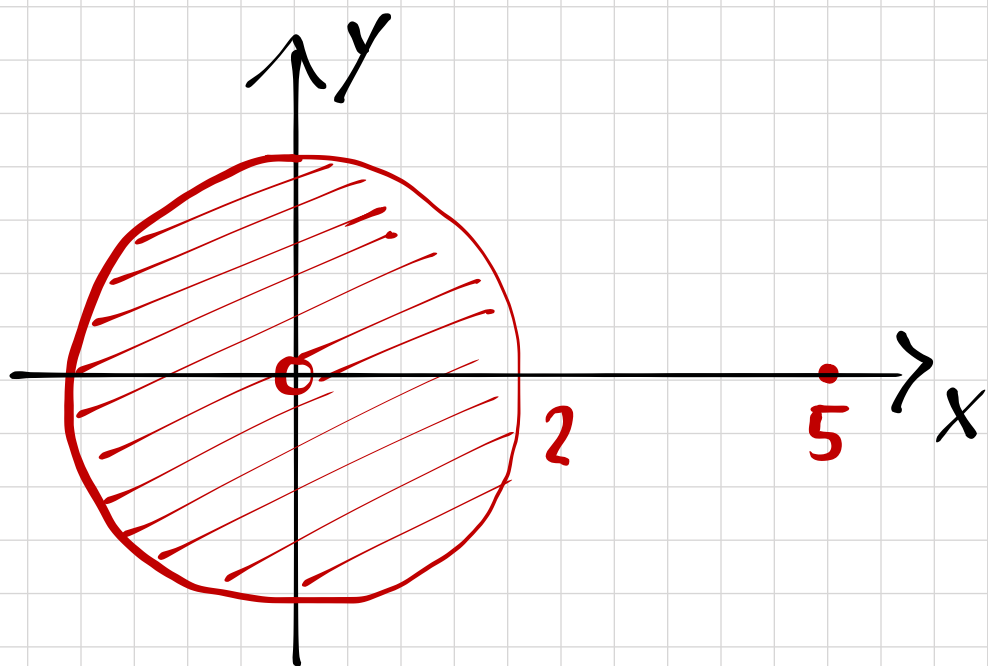
$$\bar{X} = X \text{ perché } X \text{ è chiuso}$$

$$\partial X = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |2x - y| = 1 \}$$

$$\text{Acc}(X) = X$$

Es. 12

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(5, 0)\}$$



$(5, 0)$ non è un
p.to interno di X



X non è aperto

$(0, 0)$ non è p.to
interno di $X^c \Rightarrow X^c$ non è
aperto

$\Rightarrow X$ non è chiuso

$B_6((0, 0)) \supseteq X \Rightarrow X$ limitato
(ma non compatto)

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{X} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 4\} = \\ &= B_2((0, 0)) \setminus \{(0, 0)\} \end{aligned}$$

$$\bar{X} = X \cup \{(0, 0)\} = \overline{B_2((0, 0))} \cup \{(5, 0)\}$$

$$\partial X = \{x^2 + y^2 = 4\} \cup \{(0, 0), (5, 0)\}$$

$$\text{Acc}(X) = \bar{X} \setminus \{(5, 0)\} = \overline{B_2((0, 0))}$$

Es. 5

$$P = (1, 0), \quad Q = (-1, 0)$$

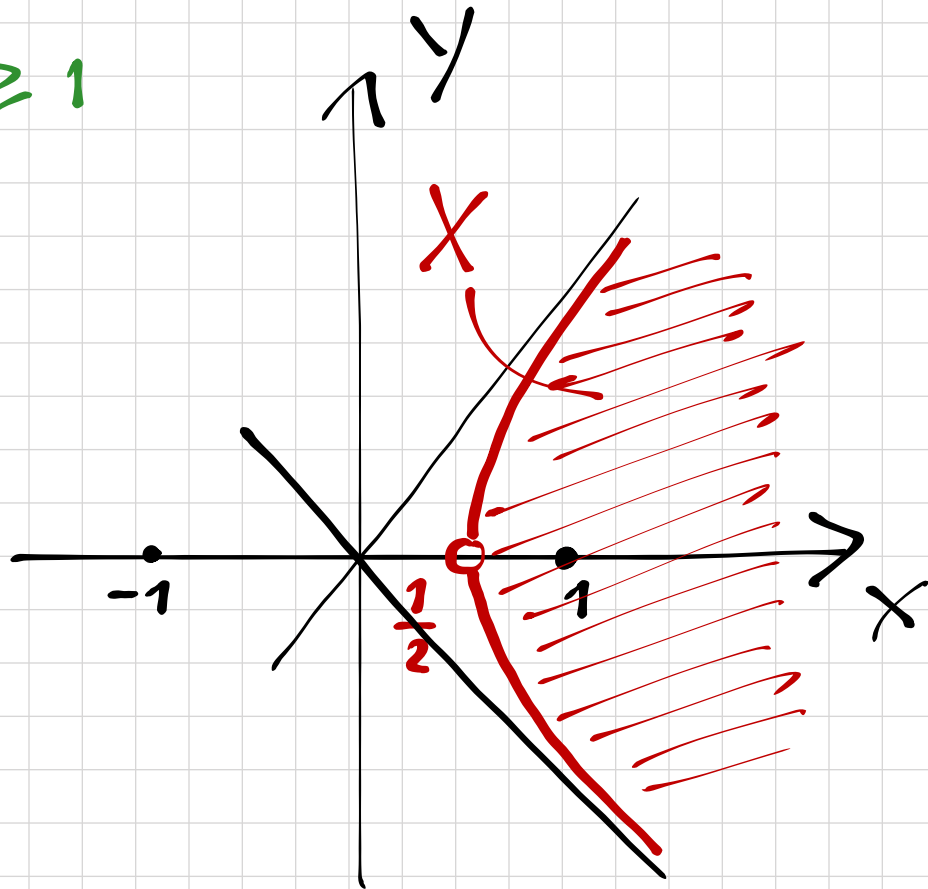
$$X = \left\{ R = (x, y) : d(R, Q) - d(R, P) \geq 1, \quad x > \frac{1}{2} \right\} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - \frac{4}{3}y^2 \geq 1 \\ x \geq \frac{1}{4} \end{cases}$$

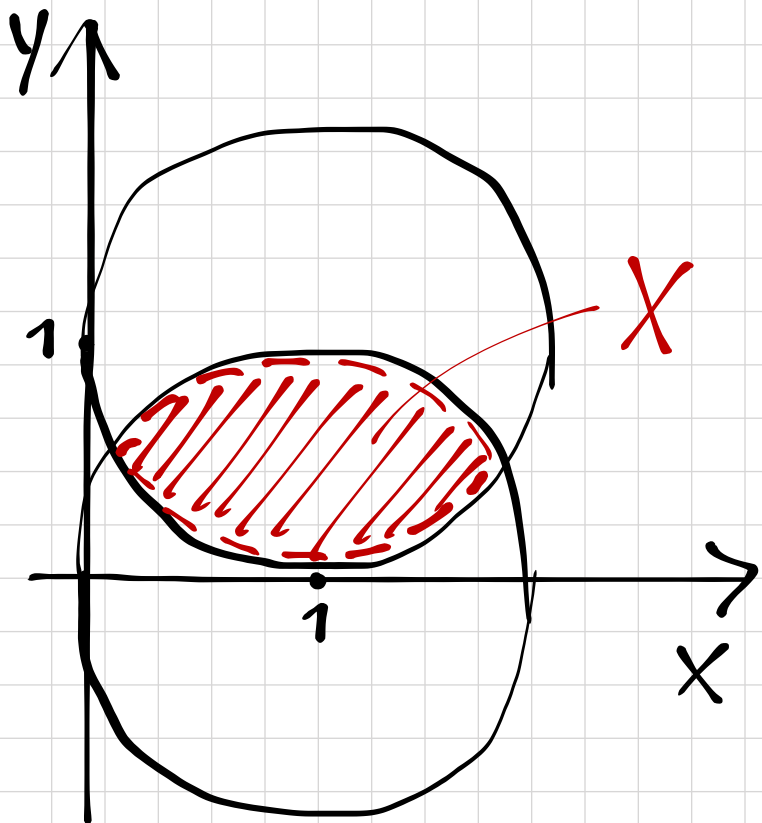
CONTI CON
RADICALI

Finire!



Es. 3

$$X = B_1((1,0)) \cap B_1((1,1)) \subseteq \mathbb{R}^2$$



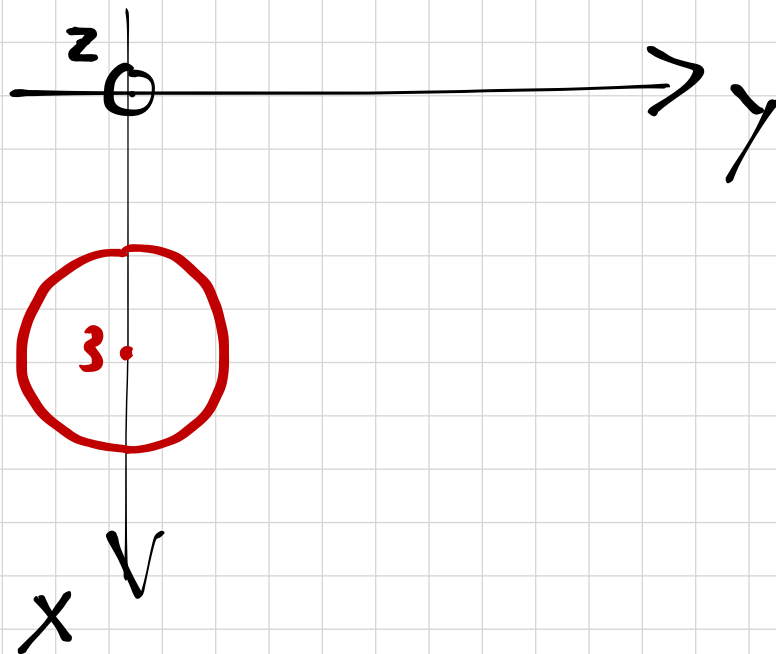
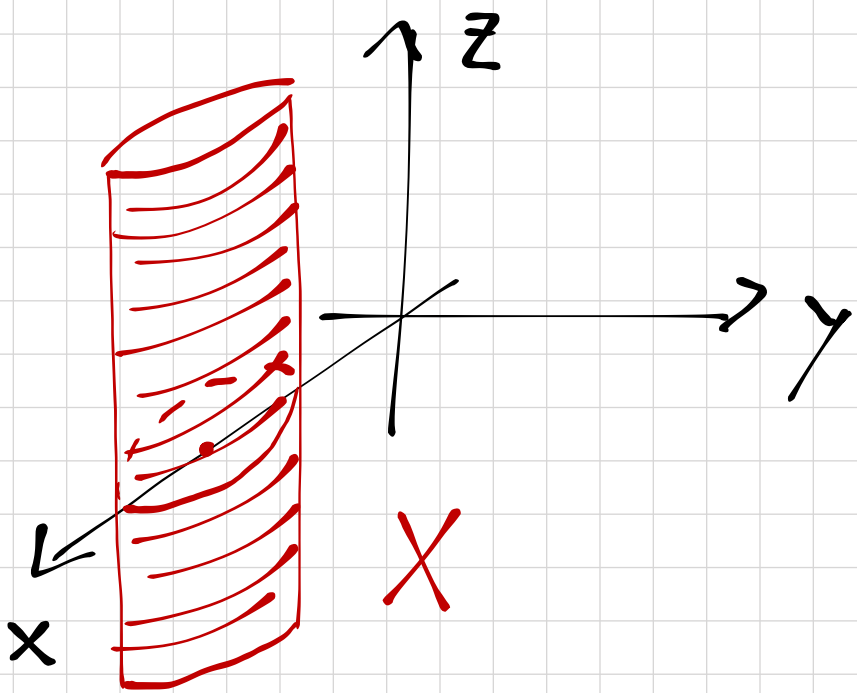
$$X \text{ aperto} \Rightarrow \overset{\circ}{X} = X$$

$$\bar{X} = \overline{B_1((1,0))} \cap \overline{B_1((1,1))}$$

$$\text{Acc}(X) = \bar{X}$$

Es. 15

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x-3)^2 + y^2 = 1\}$$



$\forall k \in \mathbb{R} \quad X \cap \{z = k\}$
circonf. di raggio 1
e centro $(3, 0, k)$ \Rightarrow X sup.
cilindrica

$$\overset{\circ}{X} = \emptyset, \quad \overline{X} = X, \quad \partial X = X$$

$$\text{Acc}(X) = \overline{X} = X.$$