Miscellanea di integrali

Alessio Del Vigna

25 Maggio 2020

1 Integrali tripli

Esercizio 1. Calcolare
$$\iiint_\Omega \frac{x^2e^z}{1+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
dove $\Omega = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2\le z^2+1,\ -1\le z\le 1\big\}$.

Soluzione. In coordinate cilindriche l'insieme Ω si scrive come $\tilde\Omega = \big\{\rho^2\le z^2+1,\ -1\le z\le 1\big\}$. Così abbiamo
$$\iiint_\Omega \frac{x^2e^z}{1+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{\tilde\Omega} \frac{\rho^3e^z\cos^2\theta}{z^2+1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{z^2+1}}\frac{\rho^3e^z}{z^2+1}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z =$$
$$= \frac{\pi}{4}\int_{-1}^1 e^z(z^2+1)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\left(e-\frac{3}{e}\right),$$
dove nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato $\int z^2e^z\,\mathrm{d}z = e^z(z^2-2z+2)$, che si ottiene integrando per parti due volte.

Esercizio 2. Calcolare il volume dell'ellissoide di semiassi a, b e c utilizzando la tecnica di integrazione per fili.

Soluzione. L'ellissoide di cui dobbiamo calcolare il volume è definito da
$$\mathcal{E} = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}.$$
Applicando la tecnica dell'integrazione per fili possiamo scrivere la misura di $\mathcal{E}$ come
$$m(\mathcal{E}) = \iiint_{\mathcal{E}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_E\left(\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2c\iint_E\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
dove $E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$. Per l'integrale doppio passiamo alle *coordinate polari ellittiche*, date dal cambio di coordinate $\phi:\mathbb{R}^+\times[0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ definito come
$$\phi(\rho,\theta) = (a\rho\cos\theta,\ b\rho\sin\theta),$$
per il quale $J\phi(\rho,\theta) = ab\rho$. Si ha dunque
$$m(\mathcal{E}) = 2abc\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 4\pi abc\int_0^1\rho\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Esercizio 3. Calcolare
$$\iiint_\Omega y^2 z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
dove $\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\, z \geq 0,\, 3(x^2 + y^2) \leq z^2\right\}$.

Soluzione. Passando a coordinate cilindriche, possiamo riscrivere Ω come[1]
$$\tilde{\Omega} = \left\{z \geq 0,\, \rho^2 \leq 1 - z^2,\, 3\rho^2 \leq z^2\right\} = \left\{\sqrt{3}\rho \leq z \leq \sqrt{1-\rho^2},\, 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}\right\}.$$
Dunque
$$\iiint_\Omega y^2 z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\sqrt{3}\rho}^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho^3 z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{384}.$$

2 Integrali curvilinei e di superficie

Esercizio 4. Calcolare la lunghezza del sostegno della curva $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (\arcsin t, \log(1 + t))$.

Soluzione. Per $t \in [0, 1)$ si ha $\gamma'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{1}{1+t}\right)$, da cui
$$\|\gamma'(t)\| = \frac{\sqrt{2}}{(1 + t)\sqrt{1-t}}.$$
La lunghezza del sostegno Γ della curva sarà pertanto
$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma \mathrm{d}s = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{(1 + t)\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$
dove abbiamo usato il fatto che $\int \frac{1}{(1+t)\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = -\sqrt{2}\log\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1-t}}{\sqrt{2}-\sqrt{1-t}}$. Questo integrale si può calcolare operando dapprima la sostituzione $u^2 = 1 - t$, per poi proseguire decomponendo in frazioni parziali l'integrale in u che ne risulta.

Esercizio 5. Calcolare la lunghezza della porzione di grafico della funzione $f(x) = \log\cos x$ corrispondente all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Soluzione. Il grafico Γ può essere parametrizzato come curva cartesiana mediante $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \to \mathbb{R}^2$ data da $\gamma(t) = (t, \log\cos t)$. Si ha poi $\gamma'(t) = (1, -\tan t)$, da cui
$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + \tan^2 t} = \frac{1}{\cos t}.$$
Così
$$\ell(\Gamma) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \left(\log\frac{1 + \tan\frac{t}{2}}{1 - \tan\frac{t}{2}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} = \log\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}},$$
dove $\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \log\frac{1+\tan\frac{t}{2}}{1-\tan\frac{t}{2}} + c$, con $c \in \mathbb{R}$, può essere ottenuto con la sotituzione data dalle formule parametriche[2].

[1] La condizione su ρ può essere ottenuta osservando che $3\rho^2 \leq z^2 \leq 1 - \rho^2$, che vale se e solo se $4\rho^2 \leq 1$.

[2] Con $x = \tan\frac{t}{2}$ si ha $\cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, $\mathrm{d}t = \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Esercizio 6. Calcolare l'integrale di linea

$$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s,$$

dove Γ è il sostegno di $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ definita come $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

Soluzione. Dato che $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ si ha $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$, da cui

$$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s = \int_{-1}^{1} (1+t^2)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\sqrt{2}.$$

Esercizio 7. Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 = z^2,\, 0 \le z \le 2\right\}.$$

Soluzione. La superficie Σ può essere parametrizzata come superficie di rotazione mediante $\sigma : [0,2] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(s,\theta) = (s\cos\theta, s\sin\theta, s).$$

Il vettore normale alla superficie Σ nel punto $\sigma(s,\theta)$ è dato da $\mathbf{n}(s,\theta) = \sigma_s(s,\theta) \times \sigma_\theta(s,\theta) = (-s\cos\theta, -s\sin\theta, s^2)$, da cui l'area di Σ risulta

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \iint_\Sigma d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \|\mathbf{n}(s,\theta)\|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta = 2\pi\sqrt{2}\int_0^2 s\,\mathrm{d}s = 4\sqrt{2}\pi.$$

Esercizio 8. Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2-z = 0\right\} \cap \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \le 1\right\}.$$

Soluzione. La superficie Σ è costituita dalla porzione del paraboloide definito da $z = x^2+y^2$ che si trova nella regione racchiusa dal cilindro di equazione $x^2+y^2 = 1$. Pertanto si può scrivere

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x^2+y^2,\, 0 \le z \le 1\right\}$$

e si può parametrizzare Σ come superficie di rotazione mediante la mappa $\sigma : [0,1] \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(s,\theta) = (\sqrt{s}\cos\theta,\, \sqrt{s}\sin\theta, s)$. Pertanto $\|\mathbf{n}(s,\theta)\| = \sqrt{s+\frac{1}{4}}$, da cui

$$\mathcal{A}(\Sigma) = 2\pi\int_0^1 \sqrt{s+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}s = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

Esercizio 9. Calcolare l'area della superficie

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = \sqrt{2xy},\, 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\right\}.$$

Soluzione. È naturale parametrizzare Σ come superficie cartesiana mediante la mappa $\sigma : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(u,v) = (u,v,\sqrt{2uv})$. Risulta $\mathbf{n}(u,v) = \left(-\sqrt{\frac{v}{2u}},\, -\sqrt{\frac{u}{2v}},\, 1\right)$, da cui

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{1+\frac{v}{2u}+\frac{u}{2v}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v}}\,\mathrm{d}v \int_0^1 \sqrt{u}\,\mathrm{d}u = \frac{4}{3}\sqrt{2}.$$