Università di Pisa - CdL in Informatica

Correzione prova scritta

Alessio Del Vigna

29 Aprile 2020

Esercizio 1. Consideriamo l'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 5 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la dimensione di $\operatorname{Imm}(L_A)$.

(ii) Determinare la dimensione di $\operatorname{Ker}(L_A)$.

Soluzione. (i) La dimensione di $\operatorname{Imm}(L_A)$ è la dimensinoe dello spazio generato dalle colonne di A, che coincide con la dimensione dello spazio generato dalle righe di A. Si osservi che la quarta riga di A è la somma delle prima tre, per cui $\dim \operatorname{Imm}(L_A) \le 3$. Inoltre le prime tre righe della matrice sono linearmente indipendenti, per cui $\dim \operatorname{Imm}(L_A) = 3$.

(ii) Dal teorema della dimensione si ha $\dim \operatorname{Ker}(L_A) = 7 - \dim \operatorname{Imm}(L_A) = 4$.

Esercizio 2. Sia $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici 2×2 a coefficienti reali e siano U il sottospazio vettoriale delle matrici triangolari superiori e S il sottospazio delle matrici simmetriche.

(i) Determinare la dimensione del sottospazio U.

(ii) Determinare la dimensione del sottospazio S.

(iii) Determinare la dimensione del sottospazio $U \cap S$.

(iv) Determinare la dimensione del sottospazio $U + S$.

(v) Dire se la somma $U + S$ è diretta.

(vi) Stabilire se esiste un'applicazione lineare iniettiva $f : U \to S$.

(vii) Stabilire se esiste un'applicazione lineare iniettiva $f : U \cap S \to S$.

(viii) Stabilire se esiste un'applicazione lineare iniettiva $f : S \to U \cap S$.

Soluzione. (i) Una generica matrice triangolare superiore si scrive come

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

per certi $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dunque $U = \operatorname{Span}\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right)$, e poiché le tre matrici sono linearmente indipendenti segue $\dim U = 3$.

(ii) Analogamente si ha $S = \operatorname{Span}\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)$, così $\dim S = 3$.

(iii) Gli elementi di $U \cap S$, dovendo essere matrici simultaneamente triangolari superiori e simmetriche, sono tutte e sole le matrici diagonali. Quindi $U \cap S = \operatorname{Span}\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)$ e di conseguenza $\dim(U \cap S) = 2$.

(iv) Dalla formula di Grassmann si ha $\dim(U+S) = \dim U + \dim S - \dim(U \cap S) = 3+3-2 = 4$.

(v) La somma non è diretta perché $\dim(U \cap S) \neq 0$.

(vi) Gli spazi U e S hanno entrambi dimensione 3. Una qualsiasi applicazione lineare che manda una base di U in una base di S è iniettiva[1].

(vii) Lo spazio $U \cap S$ è un sottospazio di S, per cui l'applicazione $f : U \cap S \to S$ definita da $f(M) = M$ (detta immersione) è lineare e iniettiva.

(viii) Un'applicazione $f : S \to U \cap S$ lineare e iniettiva non può esistere. Infatti $\dim \operatorname{Imm}(f) \leq 2$, da cui $\dim \operatorname{Ker}(f) = \dim(S) - \dim \operatorname{Imm}(f) \geq 3 - 2 = 1$.

Esercizio 3. Sia $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ lo spazio delle matrici reali 2×2 e si consideri il sottospazio

$$V = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\right).$$

(i) Determinare la dimensione di V.

(ii) Stabilire se $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix} \in V$.

(iii) Trovare un valore del parametro reale a tale che $\begin{pmatrix}2&1\\3&a\end{pmatrix} \in V$.

Soluzione. (i) Si ha $V = \operatorname{Span}\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\right)$, da cui $\dim V = 3$.

(ii) Dalla scrittura di V data in (i) segue che una generica matrice di V è della forma $\left(\begin{smallmatrix}p&r\\q&p\end{smallmatrix}\right)$, per opportuni $p, q, r \in \mathbb{R}$. Dunque le matrici di V hanno elementi uguali sulla diagonale principale, per cui $\left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right) \notin V$.

(iii) Per quanto dedotto in (ii) si ha che $\left(\begin{smallmatrix}2&1\\3&a\end{smallmatrix}\right) \in V$ se e solo se $a = 2$.

Esercizio 4. Sia A una matrice 2×2.

(i) Supponendo che $A\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, calcolare $\det(A)$.

(ii) Supponendo che $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ e $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, calcolate $\det(A)$.

Soluzione. (i) Dal teorema di Binet[2] segue $\det(A) \cdot (-1) = -2$, da cui $\det(A) = 2$.

(ii) Si osservi che le condizioni date equivalgono a $A\left(\begin{smallmatrix}1&1\\2&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}3&2\\4&1\end{smallmatrix}\right)$. Procedendo come in (i) si ha quindi $\det(A) \cdot (-1) = -5$, da cui $\det(A) = 5$.

[1] In realtà una tale applicazione è anche surgettiva, perché l'immagine è lo spazio generato dai vettori immagine che, essendo questi una base di S, è tutto S.

[2] Se A e B sono due matrici quadrate $n \times n$ allora $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Esercizio 5. Sia $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Quante sono le funzioni $f : X \to X$ la cui immagine contiene almeno un numero dispari?

Soluzione. Ci sono 4^4 funzioni da $X \to X$. Quelle che non hanno dispari nell'immagine sono 2^4, quindi $4^4 - 2^4 = 2^4(2^4 - 1) = 16 \cdot 15 = 240$.

Esercizio 6. In una classe sono presenti 5 uomini e 5 donne. In quanti modi si può scegliere un insieme di 3 rappresentanti in modo che almeno 2 siano donne?

Soluzione. Il numero di modi di scegliere 3 rappresentanti di cui 2 sono donne è $\binom{5}{2} \cdot 5 = 50$ e il numero di modi di scegliere 3 donne come rappresentanti è $\binom{5}{3} = 10$. Il numero di modi totali di compiere la scelta è 60.