V sp vett reale, $\langle \, , \, \rangle$ pr scalare su V

$U = \mathrm{Span}(v_1, \quad , v_k)$ $\quad \mathcal{B}_U = \{v_1, \quad , v_k\}$ base di U

$U^\perp = \{ v \in V \quad \langle v, u \rangle = 0 \ \forall u \in U \}$

è un sottospazio di V e $V = U \oplus U^\perp$

Sia $\mathcal{B}_{U^\perp} = \{ v_{k+1}, \quad , v_n \}$ base di $U^\perp$

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}^3$

con pr sc standard

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_U \cup \mathcal{B}_{U^\perp}$ è base di V

perché $V = U \oplus U^\perp$

<u>Oss</u> $\mathcal{B}$ non è necessariamente ortogonale,

ma $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ se $i = 1, \ldots, k$ e

$j = k+1, \ldots, n$ (ossia $v_i \in \mathcal{B}_U$ e $v_j \in \mathcal{B}_{U^\perp}$)

$V = U \oplus U^\perp \Rightarrow$ risultano ben definite

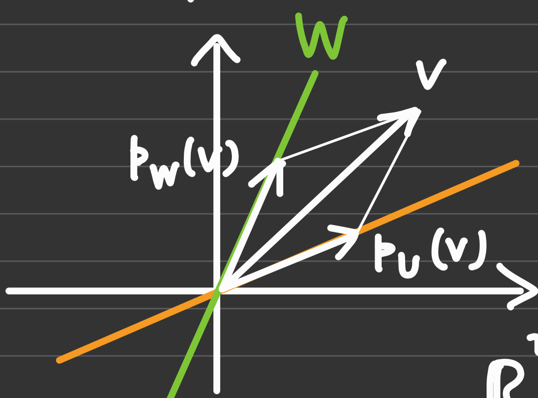
le proiezioni $p_U \; V \to V$

e $p_{U^\perp} \; V \to V$

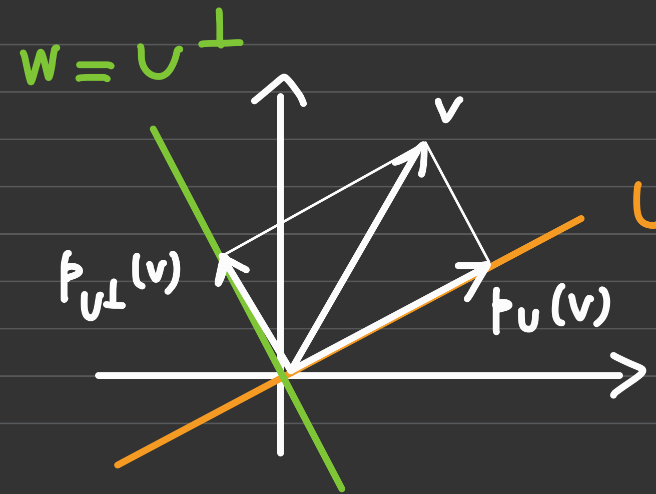
$v \in V \Longrightarrow v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in U$ e $v_2 \in U^\perp$ in modo unico

$\Rightarrow$ si definiscono $p_U(v) = v_1$ e $p_{U^\perp}(v) = v_2$

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}^2$ e $\langle , \rangle_{st}$



$\mathbb{R}^2 = U \oplus W$



$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i v_i}_{\in U^{\perp}}$$

$\Rightarrow$ è $p_U(v)$ $\qquad$ $\Rightarrow$ è $p_{U^{\perp}}(v)$

Vorremmo che se v_j con $j = 1, \;, k$ allora λ_j si possa calcolare con $\langle v, v_j \rangle$

$$\langle v, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i , v_j \right\rangle \overset{\curvearrowleft}{=} \quad \langle , \rangle \text{ è lineare sulla prima comp}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v_i , v_j \rangle =$$

$$= \lambda_j \| v_j \|^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i \langle v_i , v_j \rangle =$$

$$= \lambda_j \| v_j \|^1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{k} \lambda_i \langle \underset{\substack{\downarrow \\ \in \mathcal{B}_U}}{v_i} , v_j \rangle$$

Se $\mathcal{B}_U$ è ortogonale allora

$$\langle v, v_j \rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j \rangle \Longrightarrow \lambda_j = \frac{\langle v, v_j \rangle}{\langle v_j, v_j \rangle}$$

coeff di Fourier

$$\Rightarrow \boxed{p_U(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i}$$

Quindi se $\mathcal{B}_U$ è ortogonale allora la proiezione su U si calcola con i coeff di Fourier

$\boxed{3}$ $U = \{x = 0, \quad y + z = 0\}$

$\dim U = 2 \qquad U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$

(i) $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp \Rightarrow \dim U^\perp = 4 - 2 = 2$

$x = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$y + z = 0 \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = 0$

$$\Rightarrow U^\perp = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow U^\perp = \{ w = 0 \ , \ y - z = 0 \} \quad \text{eq cartesiane}$$

(ii) $w = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\quad p_U(w)\ , \ p_{U^\perp}(w) = ?$

PRIMO MODO

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}}_{\in U^\perp} \Rightarrow \quad p_U(w) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$p_{U^\perp}(w) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$

SECONDO MODO

$$\mathcal{B}_U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

u_1 u_2

base ortogonale di U (con Gram-Schmidt)

$$p_U(w) = \frac{\langle w, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle w, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 = \quad = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Si fa allo stesso modo per $p_{U^\perp}(w)$

(iii) $\quad [p_U]_C^C = \left(p_U(e_1) \;\middle|\; \qquad \;\middle|\; p_U(e_4) \right)$

$$p_U(e_1) = \cancel{\frac{\langle e_1, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle}} u_1 + \cancel{\frac{\langle e_1, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle}} u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_U(e_2) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p_U(e_3) = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_U(e_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad [p_U]_C^C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRICE DI UN PR SCALARE

V sp vett reale, $\langle , \rangle \; V \times V \to \mathbb{R}$ pr scalare

$\mathcal{B} = \{v_1, \quad , v_n\}$ base di V

<u>Def</u> $M_{\mathcal{B}} \in Mat(n, \mathbb{R})$ t c

$$(M_{\mathcal{B}})_{ij} = \langle v_i , v_j \rangle \qquad \begin{matrix} i = 1, \quad , n \\ j = 1, \quad , n \end{matrix}$$

è la matrice di $\langle , \rangle$ risp a $\mathcal{B}$

Equivalentemente $M_{\mathcal{B}}$ è la matrice tale che $\forall v, w \in V$

$$\langle v, w \rangle = [v]_{\mathcal{B}}^{T} \, M_{\mathcal{B}} \, [w]_{\mathcal{B}}$$

CAMBIAMENTO DI BASE

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi di V

Come sono legate $M_{\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B}'}$?

$$\langle v, w \rangle = [v]_{\mathcal{B}}^{T} M_{\mathcal{B}} [w]_{\mathcal{B}} \qquad \forall v, w \in V$$

$$\|$$

$$\langle v, w \rangle = [v]_{\mathcal{B}'}^{T} M_{\mathcal{B}'} [w]_{\mathcal{B}'} =$$

$$= \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id) \, [v]_{\mathcal{B}} \right)^{T} M_{\mathcal{B}'} \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id) \, [w]_{\mathcal{B}} \right)$$

$$= [v]_{\mathcal{B}}^{T} \, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)^{T} M_{\mathcal{B}'} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id) \, [w]_{\mathcal{B}}$$

$$\Rightarrow \quad M_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)^{T} M_{\mathcal{B}'} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(id)$$

$\boxed{5}$ $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 4x_1x_2 + 3x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5y_1y_2 =$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

(1) $\langle v, w \rangle = v^T \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} w \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$\langle , \rangle$ bilineare sì

$\langle , \rangle$ simmetrico $\quad A$ è simmetrica

$\langle v, v \rangle = 4x_1^2 + 6x_1y_1 + 5y_1^2 > 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \neq 0$

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - 9\lambda + 11 = 0$$

$$\lambda = \frac{9 \pm \sqrt{37}}{2} \qquad \lambda_+, \lambda_- > 0$$

$$\Longrightarrow \langle , \rangle \text{ def pos}$$

Inoltre dalla def equiv di matrice associata

$$M_C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$