Foglio di esercizi

Alessio Del Vigna

12 aprile 2021

1 Prodotto scalare euclideo

In questa sezione, quando non specificato, il prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$ è sempre quello euclideo, ossia quello definito da
$$\langle v, w\rangle = v^\top w \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n.$$

Esercizio 1. Si consideri il piano $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$. Si determini una base ortonormale per U e la si completi ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Si determini una base ortogonale del sottospazio ortogonale a
$$U = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right).$$
Si scrivano equazioni cartesiane per $U^\perp$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice 3×2
$$A = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -4\\1 & -1\end{pmatrix}.$$
Determinare un vettore $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tale che $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, $\|v\| = 3$ e v è ortogonale allo spazio generato dalle colonne di A.

Esercizio 4. Si consideri il sottospazio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$. Si determini la matrice associata alla proiezione ortogonale su U rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 5. Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice associata rispetto alla base canonica è
$$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$
Si determini una base ortonormale di autovettori per f.

Esercizio 6. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo $f_\lambda(x, y, z) = (x + \lambda y, \lambda y, z)$. Si determini una base ortogonale di autovettori di f_λ al variare di λ.

Esercizio 7. Si consideri il sottospazio $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ e siano p e q le proiezioni ortogonali su U e $U^\perp$, rispettivamente.

(i) Scrivere la matrice associata a p e q rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(ii) L'endomorfismo $f(X) = p(X) - q(X)$ è diagonalizzabile?

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Si verifichi che A è la matrice associata ad un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su $\mathbb{R}^3$, e si scriva esplicitamente il prodotto scalare (si scriva cioè $\langle X, Y \rangle$ per generici $X, Y \in \mathbb{R}^3$).

(iv) Scrivere la matrice che rappresenta il prodotto scalare rispetto alla base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(v) Si determini il sottospazio ortogonale a U rispetto a questo prodotto scalare.

2 Prodotti scalari

Esercizio 8. Si consideri l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(AB).$$

Si provi che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è bilineare e simmetrica, ma che non è definita positiva.

Esercizio 9. Si consideri l'applicazione $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B).$$

(i) Si provi che $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare.

(ii) Determinare la matrice associata al prodotto scalare rispetto alla base canonica di $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

(iii) Si consideri il caso $n = 2$. Se $W \subseteq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ è il sottospazio delle matrici simmetriche, si descriva il sottospazio $W^\perp$.

Esercizio 10. In $\mathbb{R}^2$ si consideri il prodotto scalare che rispetto alla base canonica è rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Costruire una matrice simmetrica che rappresenti un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ non autoaggiunto e una matrice non simmetrica che rappresenti un endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ autoaggiunto.

Esercizio 11. Sia V uno spazio euclideo e supponiamo $V = U \oplus W$. Sia $p_U : V \to V$ l'applicazione di proiezione su U. Si provi che p_U è autoaggiunta se e solo se U e W sono ortogonali.

Esercizio 12. Si considerino il prodotto scalare su $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (vedi l'Esercizio 9) definito da

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^\top B)$$

e l'endomorfismo $f : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ definito da $f(X) = X^\top$.

(i) Si provi che f è autoaggiunto rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(ii) Si provi che f è una isometria rispetto a $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ossia che $\langle f(X), f(Y)\rangle = \langle X, Y\rangle$ per ogni $X, Y \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Esercizio 13. Sia $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado ≤ 2 a coefficienti reali. Sia $a \in \mathbb{R}$ e si consideri l'applicazione $\langle\cdot,\cdot\rangle_a : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \times \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\langle p, q\rangle_a = a \cdot p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2),$$

(i) Dimostrare che $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ è bilineare e simmetrica per ogni $a \in \mathbb{R}$.

(ii) Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'applicazione $\langle\cdot,\cdot\rangle_a$ è definita positiva?

(iii) Se $a = 1$ descrivere $W^\perp$, dove $W = \mathrm{Span}\,(x)$.