# Soluzione di due esercizi

Alessio Del Vigna

11 febbraio 2021

**Esercizio 1.** Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado $\leq 3$ e a coefficienti reali, e siano

$$W_1 = \{p \in V \ : \ x^2 - x \text{ divide } p(x)\}, \quad W_2 = \{p \in V \ : \ p(-1) = 0\}$$

e

$$W_3 = \{p \in V \ : \ \deg p \leq 2\}$$

suoi sottoinsiemi. Siano poi $q(x) = x^2 - 1$ e $r(x) = x^3$ due polinomi fissati e definiamo i sottoinsiemi di endomorfismi di $V$ seguenti:

$$\tilde{L} = \{f : V \to V \ : \ f(W_1) = \{0\}, \ f(q) = r\} \subseteq \mathrm{End}(V)$$

e

$$L = \{f : V \to V \ : \ f(W_1) \subseteq W_2, \ f(W_2) \subseteq W_1, \ \mathrm{Im}\, f \subseteq W_3\} \subseteq \mathrm{End}(V).$$

(i) L'insieme $\tilde{L}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$? Se sì, calcolare la dimensione di $\tilde{L}$.

(ii) L'insieme $L$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$? Se sì, calcolare la dimensione di $L$.

**Soluzione.** (i) L'insieme $\tilde{L}$ non è un sottospazio perché la funzione nulla non vi appartiene, in quanto non soddisfa la condizione $f(q) = r$[1].

(ii) L'insieme $L$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$ in quanto contiene la funzione nulla ed è chiuso per somma e moltiplicazione per scalari. Proviamo che $L$ è chiuso per somma. Siano $f, g \in L$.

- Si ha $(f + g)(W_1) \subseteq W_2$. Infatti se $w \in W_1$ allora $(f + g)(w_1) = f(w_1) + g(w_1)$, ma $f(w_1) \in W_2$ e $g(w_1) \in W_2$ perché $f, g \in L$ e dato che $W_2$ è chiuso per somma segue che $(f + g)(w_1) \in W_2$.
- In modo del tutto analogo si dimostra che $(f + g)(W_2) \subseteq W_1$.
- Vale che $\mathrm{Im}(f + g) \subseteq W_3$. Infatti si ha

  $$\mathrm{Im}(f + g) \subseteq \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g \subseteq W_3,$$

  dove la prima inclusione vale per definizione di somma di funzioni (verificarlo) e la seconda inclusione vale perché $f, g \in L$ e $W_3$ è chiuso per somma.

Queste tre proprietà mostrano che $f + g \in L$. In modo del tutto simile si prova che $L$ è chiuso per moltiplicazione per scalari. Dunque $L$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{End}(V)$.

[1] L'insieme $\tilde{L}$ non è neanche chiuso per somma e per moltiplicazione per scalare, dunque non soddisfa nessuna delle condizioni per poter essere un sottospazio vettoriale.

Passiamo adesso al calcolo della dimensione di $L$. Osserviamo che

$$W_1 = \{x(x-1)(ax+b) \,:\, a,b \in \mathbb{R}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(x+1)(ax^2+bx+c) \,:\, a,b,c \in \mathbb{R}\},$$

da cui $\dim W_1 = 2$ e $\dim W_2 = 3$[2]. Evidentemente $\dim W_3 = 3$. Si ha inoltre

$$W_1 = \langle x^2-x,\, x^3-x^2\rangle, \quad W_2 = \langle x+1,\, x^2+x,\, x^3+x^2\rangle, \quad W_3 = \langle 1,\, x,\, x^2\rangle. \tag{1}$$

Dato che $f(W_1) \subseteq W_2$, $f(W_2) \subseteq W_3$ e $\operatorname{Im} f \subseteq W_3$ si ha $f(W_1) \subseteq W_2 \cap W_3$ e $f(W_2) \subseteq W_1 \cap W_3$. Per cui ci interessanno anche i sottospazi

$$W_1 \cap W_3 = \langle x^2 - x\rangle \quad \text{e} \quad W_2 \cap W_3 = \langle x+1,\, x^2+x\rangle. \tag{2}$$

Ricordiamo che la scelta di una base $\mathcal{B}$ di $V$ induce l'isomorfismo

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \operatorname{End}(V) \to \mathbf{M}(4,4,\mathbb{R})$$

che associa ad ogni endomorfismo di $V$ la sua matrice rispetto alla base $\mathcal{B}$, ossia $\varphi_{\mathcal{B}}(f) = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$. Dato che $\dim L = \dim \varphi_{\mathcal{B}}(L)$ ($\varphi_{\mathcal{B}}$ è un isomorfismo) determiniamo il sottospazio $\varphi_{\mathcal{B}}(L)$ delle matrici associate agli endomorfismi di $L$ rispetto a $\mathcal{B}$. Quindi adesso costruiamo una base $\mathcal{B}$ in modo che sia semplice scrivere la matrice associata agli endomorfismi di $L$. Partiamo da $W_1 \cap W_2 = \langle p\rangle$ con $p(x) = x^3 - x$ (verificare che questa è l'intersezione di $W_1$ e $W_2$) e prendiamo $p_1 \in V$ tale che $(p,\, p_1)$ sia una base di $W_1$ e prendiamo $p_2, p_3 \in V$ tali che $(p,\, p_2,\, p_3)$ sia una base di $W_3$. Tenuto conto di (1), per far questo basta scegliere $p_1(x) = x^2 - x$, $p_2(x) = x+1$ e $p_3(x) = x^3 + x^2$. Sia dunque

$$\mathcal{B} = (p,\, p_1,\, p_2,\, p_3).$$

Consideriamo una qualsiasi applicazione $f \in L$. Dato che $p \in W_1 \cap W_2$ si ha $f(p) \in W_1 \cap W_2 \cap W_3$, ma $W_1 \cap W_2 \cap W_3 = \{0\}$ (verificarlo!) e dunque $f(p) = 0$. Dato che $p_2, p_3 \in W_2$ avremo che $f(p_2), f(p_3) \in W_1 \cap W_3$, ma dalla (2) si ha $W_1 \cap W_3 = \langle p_1\rangle$, da cui $f(p_2) = ap_1$ e $f(p_3) = bp_1$ per certi $a, b \in \mathbb{R}$. Infine, dato che $p_1 \in W_1$ avremo che $f(p_1) \in W_2 \cap W_3$ e sempre dalla dalla (2) si ha $W_2 \cap W_3 = \langle p_2,\, p_3 - p_1\rangle$, da cui $f(p_1) = cp_2 + d(p_3 - p_1) = -dp_1 + cp_2 + dp_3$ per certi $c, d \in \mathbb{R}$. Dunque

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & a & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e del resto ogni matrice così fatta corrisponde ad un endomorfismo $f$ di $L$. Pertanto abbiamo mostrato che

$$\varphi_{\mathcal{B}}(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -d & a & b \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix} \,:\, a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\},$$

che è un sottospazio di $\mathbf{M}(4,4,\mathbb{R})$ di dimensione 4. Pertanto $\dim L = \dim \varphi_{\mathcal{B}}(L) = 4$.

[2] Per chi non avesse troppa dimestichezza con gli spazi di polinomi. La scelta della base $(1, x, x^2, x^3)$ in $V$ induce un isomorfismo di $V$ con $\mathbb{R}^4$, quello che manda un polinomio $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ nel vettore $(a_0, a_1, a_2, a_3)$ dei suoi coefficienti. Riscrivendo le condizioni che definiscono $W_1$ e $W_2$ in condizioni sui loro coefficienti si possono considerare $W_1$ e $W_2$ come sottospazi di $\mathbb{R}^4$ e lavorare lì.

**Esercizio 2.** Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + ky + (k+1)z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ kx - 2y - k^2 z = 1 \end{cases}$$

Per quali valori di $k$ il sistema non ha soluzione?

**Soluzione.** La matrice del sistema e il vettore colonna dei termini noti sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & k+1 \\ 2k & 1 & 3 \\ k & -2 & -k^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dal teorema di Rouché-Capelli si ha che il sistema non ha soluzione se e solo se $\mathrm{rk}(A) \neq \mathrm{rk}(A \,|\, b)$. Studiamo quindi il rango delle due matrici.

Iniziando la riduzione di $(A \,|\, b)$ nella forma a scalini abbiamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k+1 & 0 \\ 2k & 1 & 3 & 0 \\ k & -2 & -k^2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & k+1 & 0 \\ 0 & 1-2k & 1-2k & 0 \\ 0 & -2-k^2 & -2k^2-k & 1 \end{array}\right),$$

da cui $\det A = (2k-1)(k-1)(k+2)$. Così se $k \neq -2$, $k \neq \frac{1}{2}$ e $k \neq 1$ allora $\mathrm{rk}(A) = 3$ e $\mathrm{rk}(A \,|\, b) = 3$, e dunque il sistema ha soluzione (che peraltro è unica). Analizziamo i casi rimasti.

- Se $k = \frac{1}{2}$ si ha $\mathrm{rk}(A) = 2$, e la matrice $(A \,|\, b)$ non ha rango 3 perché ha una riga nulla, dunque $\mathrm{rk}(A \,|\, b) = 2$ necessariamente. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema ha soluzione (l'insieme delle soluzioni stavolta è infinito[3]).

- Se $k = -2$ o $k = 1$ si ha che $\mathrm{rk}(A) = 2$ ma si verifica facilmente che $\mathrm{rk}(A \,|\, b) = 3$, quindi il sistema non ha soluzione.

[3] Per la precisione è uno spazio affine di dimensione 1.