Nome e cognome: ______________________________ Classe: ________

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"

Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (18 punti). Sia $\mathcal{P}$ l'insieme dei numeri pari e si consideri su $\mathcal{P}$ la relazione definita da

$$x \mathscr{R} y \iff x + y \text{ è multiplo di } 4.$$

(a) Dimostrare che $\mathscr{R}$ è una relazione di equivalenza su $\mathcal{P}$.

(b) Studiare le classi di equivalenza di $\mathscr{R}$ e scrivere l'insieme quoziente.

Esercizio 2 (7 punti). Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

(a) Determinare l'immagine di 1, di -1 e di 0.

(b) Il punto $(2, 1)$ appartiene al grafico di f? E il punto $(-1, 0)$?

(c) Calcolare la controimmagine di 1.

Esercizio 3 (10 punti). Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni e disequazioni, rappresentando graficamente l'insieme delle soluzioni delle disequazioni.

(a) $2(x-2)(x+2) = x^2 + (x-4)^2$

(b) $(x-2)^2 - (x-2)(1-x) = 2(x-3)(x+3) - 7x$

(c) $x^2 - (x+1)^2 \geq \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x+1}{4}$

(d) $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - (x+1)^3 < 2x(1-x) - x(x+1)(x-1) - 2$

Esercizio 4 (10 punti). Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni di variabile reale e rappresentarlo graficamente.

(a) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{2x^3 - 3x^2}$

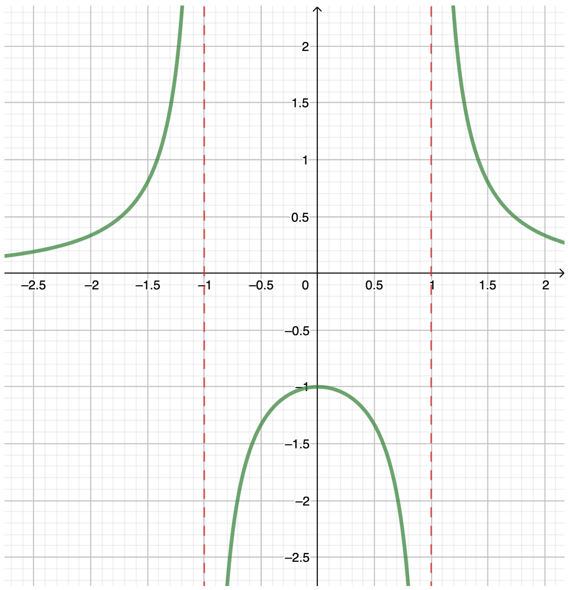
(b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2}}{x}$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

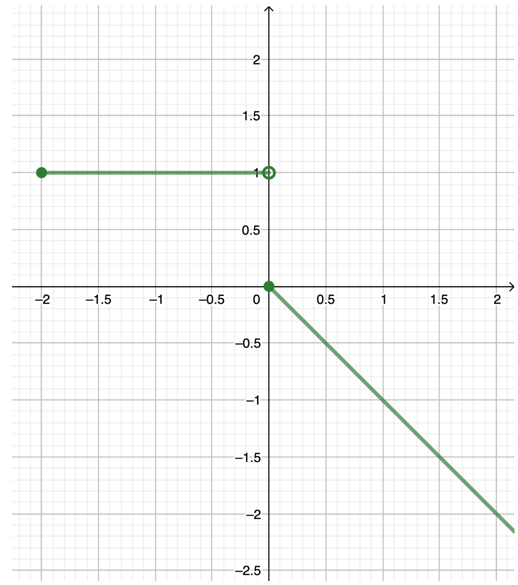
(d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2 - \sqrt{2}x}$

Esercizio 5 (10 punti). Per ciascuno dei seguenti grafici, dire se si tratta del grafico di una funzione. In caso affermativo scrivere il dominio e l'immagine.

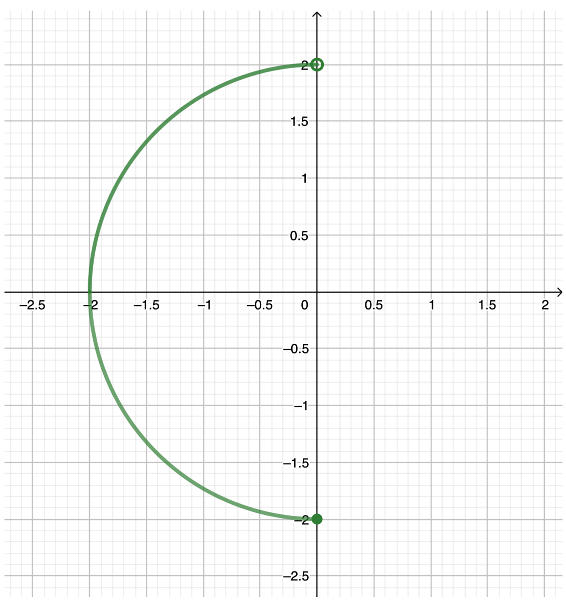
(a)



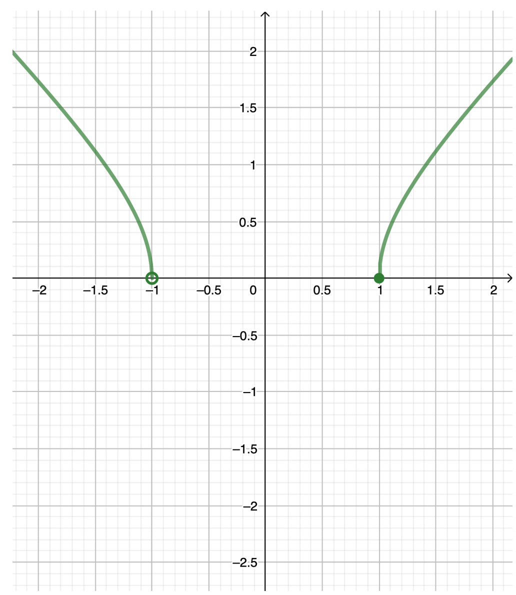
(c)



(b)



(d)



Esercizio 6 (7 punti).

(a) Dare la definizione di *segmento*, *semiretta*, *semipiano* e *angolo*.

(b) Si considerino due rette parallele e distinte r e s, tre punti sulla retta r e due punti sulla retta s. Quanti triangoli hanno come vertici tre di questi punti?

(c) Generalizzare il ragionamento del punto precedente se si hanno n punti sulla retta r e m punti sulla retta s, con n, $m \geq 2$.

Esercizio 7 (18 punti). Rispondere ai seguenti quesiti, giustificando opportunamente le risposte.

(a) Sia k un numero reale e $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f_k(x) = x^2 - 3kx + 1$. Per quali k si ha $f_k(1) = f_k(2)$?

(b) Sull'insieme $X = \{a, b, c, d\}$ si consideri la relazione

$$\mathscr{R} = \{(a,a),\ (b,b),\ (c,c),\ (d,d),\ (a,b),\ (b,c),\ (a,c)\}\,.$$

Dire se $\mathscr{R}$ è riflessiva, simmetrica o transitiva.

(c) Si consideri la famiglia di equazioni $ax = a - 1$, dove $a \in \mathbb{R}$. Discutere l'esistenza di soluzioni al variare del parametro a.

(d) Data una retta r, studiare l'intersezione di due semirette contenute in r.

(e) Sia $\mathcal{F}$ una figura con la seguente proprietà: esiste un punto $P \in \mathcal{F}$ tale che per ogni $Q \in \mathcal{F}$ il segmento PQ è contenuto in $\mathcal{F}$. La figura $\mathcal{F}$ è necessariamente convessa?

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**	**Es. 5**	**Es. 6**	**Es. 7**

Voto: ________