

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"
Prova scritta di matematica

PARTE I

Esercizio 1 (15 punti). Si consideri la famiglia di equazioni

$$(k - 2)x^2 - 4x + k - 2 = 0, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } k \neq 2.$$

Determinare i valori di k per i quali la corrispondente equazione

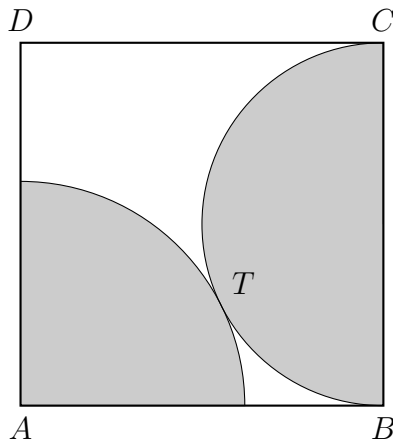
- (a) ha soluzioni reali;
- (b) ha soluzioni reali che hanno somma uguale a 4;
- (c) ha soluzioni reali la cui somma e il cui prodotto coincidono;
- (d) ha soluzioni reali positive;
- (e) ha soluzioni reali x_1 e x_2 tali che $x_1^2 + x_2^2 = 7$.

Consideriamo la famiglia di funzioni $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, con $f_k(x) = (k - 2)x^2 - 4x + k - 2$.

- (f) Tracciare il grafico di f_k per $k = 6$, dopo averne determinato gli elementi significativi.
- (g) Determinare per quali k il grafico di f_k non interseca l'asse delle ascisse.

Esercizio 2 (10 punti). Sia $ABCD$ un quadrato di lato a e si consideri il semicerchio di diametro BC interno al quadrato. Si consideri infine il quadrante circolare di centro A e tangente al semicerchio, e sia T il punto di tangenza.

- (a) Dimostrare che A , T e il punto medio di BC sono allineati.
- (b) Determinare il raggio del quadrante circolare.



PARTE II

Esercizio 3 (15 punti). Risolvere in \mathbb{R} le seguenti equazioni, specificando la molteplicità delle soluzioni:

(a) $x^7 + 2x^6 - 3x^5 - 8x^4 - 4x^3 = 0$

(b) $x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x - 12 = 0$

(c) $\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2x+2} + x^2 - 3 = \frac{1}{x^2-1}$

Esercizio 4 (10 punti). Discutere il numero di soluzioni (contate con molteplicità) dell'equazione

$$x^4 + (a-3)x^3 - 4ax^2 + 3ax = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

PARTE III

Esercizio 5 (20 punti). Risolvere in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

(a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \geq 0$

(b) $\frac{4-x^2}{2x^2+3x-5} \leq 0$

(c) $\frac{(x^2-4x)^3(x^2-1)^2}{7x^2+2x+1} \geq 0$

Esercizio 6 (10 punti). Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \geq (2x - 1)(x + 3) \\ x^3 + 5x^2 + 8x + 4 < 0 \end{cases}.$$

La prova è suddivisa in tre parti, di due esercizi ciascuna. La valutazione delle prova è sufficiente se e solo se ciascuna delle parti lo è.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6

Voto: _____