Nome e cognome: ______________________________ Classe: ________

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"

Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (10 punti). Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni, scrivendone l'insieme delle soluzioni:

(a) $2x(x+4) = (x+2)^2 + (x-2)^2$

(b) $(x-2)^2 - (x-1)^2 = \dfrac{x-3}{2} - \dfrac{x-1}{4}$

Esercizio 2 (10 punti). Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti disequazioni, scrivendone l'insieme delle soluzioni e rappresentandolo graficamente:

(a) $(x+1)^3 - (x-1)^3 - 6x\left(x - \dfrac{1}{2}\right) > (x+1)^2 - (x-1)^2$

(b) $x(x+1) - (x-1)^2 \geq 1 - \dfrac{7-6x}{2}$

Esercizio 3 (10 punti). Risolvere in $\mathbb{R}$ il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} (1-x)^2 + 9x(x-1) - (x-2)^2 > (3x-1)(3x+1) \\ (x^2+x)(x^2-x) - x \leq (x^2-1)^2 + x^2 \end{cases}$$

Esercizio 4 (10 punti). Un triangolo isoscele è inscritto in una circonferenza. È noto che l'altezza relativa alla base è $8/5$ del raggio e che la somma della base con la relativa altezza è $24a$, con $a > 0$. Determinare la lunghezza del raggio della circonferenza e successivamente, in corrispondenza di tale valore, determinare la misura di tutti i lati del triangolo.

Esercizio 5 (10 punti). Un rettangolo $ABCD$ ha i lati AB e BC che misurano rispettivamente $2a$ e a, con $a > 0$. Determinare sul lato AB un punto P tale che

$$\overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 = 2\overline{PA}^2.$$

Esercizio 6 (10 punti). Risolvere in $\mathbb{R}$ le seguenti equazioni di grado superiore al primo, scrivendone l'insieme delle soluzioni:

(a) $3x^3 - 2x = 0$

(b) $x^2 + 4x + 3 = 0$

(c) $x^2 - 6x + 8 = 0$

(d) $x^4 - x^3 + 3x^2 = 0$

Esercizio 7 (5 punti). Leggere il seguente teorema e la relativa dimostrazione.

> **Teorema.** *Tutti i numeri sono uguali.*
>
> *Dimostrazione.* Siano a e b due numeri e poniamo $c = a - b$. Moltiplichiamo entrambi i membri per $a - b$, ottenendo
>
> $$c(a-b) = (a-b)(a-b) \Leftrightarrow ac - bc = a^2 - ab - ab + b^2.$$
>
> Spostiamo $-ab+b^2$ dal secondo al primo membro e spostiamo ac dal primo al secondo membro, così da ottenere
>
> $$ab - b^2 - bc = a^2 - ab - ac.$$
>
> Quindi raccogliamo i fattori comuni:
>
> $$b(a-b-c) = a(a-b-c).$$
>
> Infine dividiamo per $a-b-c$, ottenendo così che $a = b$. Dato che a e b erano numeri generici concludiamo che due qualsiasi numeri sono uguali. $\square$

Naturalmente il teorema è falso, per cui la dimostrazione deve essere fallace. Dove sta l'errore?

Es. 1	**Es. 2**	**Es. 3**	**Es. 4**	**Es. 5**	**Es. 6**	**Es. 7**

Voto: ________