

Liceo Scientifico “A. Vallisneri”  
Programma svolto di Matematica  
Classe 3B, Liceo Scientifico - A.S. 2023-2024

Prof. Alessio Del Vigna

### **Equazioni e disequazioni irrazionali e con valore assoluto**

- (i) Definizione di valore assoluto e proprietà del valore assoluto (con dimostrazione).
- (ii) Equazioni e disequazioni con valore assoluto: equazioni e disequazioni con un solo valore assoluto, con più valori assoluti, anche fratte.
- (iii) Scomposizione del binomio  $a^n - b^n$  con  $n \geq 1$  (con dimostrazione). Teorema di equivalenza per equazioni e disequazioni quando si elevano entrambi i membri ad una stessa potenza, nel caso pari e nel caso dispari (con dimostrazione).
- (iv) Equazioni e disequazioni irrazionali: equazioni e disequazioni con un solo radicale, con più radicali, anche fratte.

### **Funzioni e successioni**

- (i) Definizione di funzione, di immagine di un elemento, di immagine di una funzione e di grafico di una funzione.
- (ii) Determinazione del dominio naturale e dell'immagine di funzioni reali di variabile reale, sia algebricamente che graficamente.
- (iii) Algebra delle funzioni: funzione somma, funzione prodotto, funzione quoziente, funzione composta.
- (iv) Funzioni surgettive, iniettive e loro proprietà (con dimostrazione). Funzione identità su un insieme. Funzioni invertibili: definizione, equivalenza tra invertibilità e bigettività. Restrizioni invertibili di funzioni non globalmente invertibili.
- (v) Definizione di successione. Progressioni aritmetiche e geometriche: definizione, termine generale (con dimostrazione), somma dei primi  $n$  termini (con dimostrazione). Monotonia e limitatezza di una successione. Successioni definite per ricorrenza.

## Induzione

- (i) Definizione assiomatica di  $\mathbb{N}$  mediante gli assiomi di Peano. Cenni al fatto che tali assiomi definiscono  $\mathbb{N}$  in modo unico a meno di isomorfismo.
- (ii) Principio di induzione e suo impiego per dimostrare proprietà su  $\mathbb{N}$ . Esempi su somme, prodotti, divisibilità e disuguaglianze.
- (iii) Dimostrazione della limitatezza o della monotonia di successioni mediante l'induzione.

## Trasformazioni del piano

- (i) Definizione di trasformazione del piano e conseguenze delle bigettività.
- (ii) Traslazioni, simmetrie centrali, simmetrie assiali, dilatazioni e rotazioni: definizione sintetica e deduzione delle loro equazioni (con dimostrazione). Dilatazioni e rotazioni di centro diverso dall'origine. Isometrie e trasformazioni che preservano l'orientazione.
- (iii) Trasformazione del grafico di una funzione mediante una trasformazione.
- (iv) Funzioni la cui espressione contiene valori assoluti: dal grafico di  $y = f(x)$  al grafico di  $y = |f(x)|$  e  $y = f(|x|)$ .

## Coniche

- (i) Coniche come insieme di curve che si possono ottenere dalla sezione di un doppio cono illimitato con un piano (solo cenni).
- (ii) La parabola: definizione come luogo geometrico (ripasso); ogni parabola con asse verticale ha equazione cartesiana della forma  $y = ax^2 + bx + c$  con  $a \neq 0$ , e viceversa (ripasso); ascissa del vertice (ripasso); coordinate del fuoco e equazione della direttrice in funzione di  $a$ ,  $b$  e  $c$  (ripasso); legame tra il segno di  $a$  e la convessità della parabola (ripasso); coefficiente angolare della retta tangente ad una parabola con asse verticale in un suo punto (con dimostrazione); posizione reciproca tra una parabola e una retta, con il caso particolare della retta tangente; parabole con asse orizzontale.
- (iii) La circonferenza: definizione come luogo geometrico (ripasso); ogni circonferenza ha equazione cartesiana della forma  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  con  $a^2 + b^2 - 4c \geq 0$  e viceversa (con dimostrazione); posizione reciproca tra una circonferenza e una retta, con il caso particolare della retta tangente.
- (iv) L'ellisse: definizione come luogo geometrico; proprietà di simmetria (con dimostrazione); definizione di semiasse maggiore ( $a$ ), semiasse minore ( $b$ ), semidistanza focale ( $c$ ) e loro relazione (con dimostrazione); equazione cartesiana di un'ellisse con centro nell'origine; equazione cartesiana di un'ellisse traslata e suo riconoscimento mediante il completamento del quadrato; posizione reciproca tra un'ellisse e una retta; calcolo dell'area di un'ellisse.

- (v) L'iperbole: definizione come luogo geometrico; proprietà di simmetria (con dimostrazione); non esistenza di punti di un'iperbole interni alla striscia delimitata dalle rette perpendicolari all'asse trasverso e che passano dai vertici (con dimostrazione); definizione di semiasse trasverso ( $a$ ), semiasse non trasverso ( $b$ ), semidistanza focale ( $c$ ) e loro relazione (con dimostrazione); equazione cartesiana di un'iperbole con centro nell'origine; equazione cartesiana di un'iperbole traslata e suo riconoscimento mediante il completamento del quadrato; posizione reciproca tra un'iperbole e una retta. L'iperbole equilatera: un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti ha equazione della forma  $xy = k$  o  $xy = -k$ , con  $k > 0$  (con dimostrazione, per rotazione di  $\pi/4$  di un'iperbole equilatera con assi sugli assi cartesiani); coordinate dei vertici e dei fuochi.
- (vi) La famiglia delle funzioni della forma  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ , con  $c$  e  $d$  non entrambi nulli: tipi di curve appartenenti alla famiglia; caso delle iperboli equilateri ( $c \neq 0 \wedge ad - bc \neq 0$ ), con determinazione del centro, degli asintoti, dei vertici e disegno del grafico cartesiano.
- (vii) Applicazioni delle coniche: grafici di alcune funzioni irrazionali; problemi di geometria, con particolare riferimento ai problemi di massimo e di minimo; discussione grafica di particolari famiglie di equazioni irrazionali.

## Complementi sui numeri reali

- (i) Ripasso della costruzione di  $\mathbb{Q}$  come insieme quoziente dell'insieme delle frazioni rispetto alla relazione di equivalenza fra frazioni.
- (ii) Costruzione formale dell'insieme  $\mathbb{R}$ : definizione di taglio di Dedekind e definizione di  $\mathbb{R}$  come l'insieme dei tagli di Dedekind; esempi di tagli in corrispondenza con un numero razionale e con un numero non razionale.
- (iii) Potenze ad esponente intero e razionale (ripasso). Potenze ad esponente reale definite mediante i tagli di Dedekind, con l'esempio esplicito di  $3^{\sqrt{2}}$ .
- (iv) Il numero  $e$ : definizione come  $e = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ ; il numero  $e$  è compreso tra 2 e 3 (con dimostrazione); irrazionalità di  $e$  (senza dimostrazione).

## La funzione esponenziale e la funzione logaritmo

- (i) La funzione esponenziale  $y = a^x$ , con  $a > 0 \wedge a \neq 1$ : buona definizione grazie alla costruzione della potenza con esponente reale; proprietà della funzione (iniettività e monotonia, senza dimostrazione); grafico cartesiano.
- (ii) Equazioni e disequazioni esponenziali.
- (iii) La funzione logaritmo  $y = \log_a x$ , con  $a > 0 \wedge a \neq 1$ , come funzione inversa della funzione esponenziale; proprietà della funzione (iniettività e monotonia, con dimostrazione); grafico cartesiano. Esempio notevole: la funzione esponenziale  $y = e^x$  e la corrispondente funzione inversa  $y = \ln x$ .

- (iv) Proprietà dei logaritmi (con dimostrazione) e loro impiego per la manipolazione di espressioni sia numeriche sia letterali.
- (v) Equazioni e disequazioni logaritmiche.
- (vi) Problemi di crescita e decrescita esponenziale: modello esponenziale; calcolo del tempo di raddoppio o dimezzamento.