$\beta\mathbb{N}$ come sistema dinamico ed il teorema di Hales-Jewett

Francesco Di Baldassarre

18 febbraio 2013

In questo seminario (cit. [1]) mostreremo alcune proprietà degli ultrafiltri ricorrenti ed uniformemente ricorrenti in $\beta\mathbb{N}$ e le useremo per dimostrare il teorema di Auslander-Ellis ed il teorema di Hales-Jewett.

Iniziamo con introdurre 4 definizioni equivalenti di ultrafiltro che ci saranno utili nel corso della trattazione.

Definizione 1. Un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ è una famiglia $\mathcal{U}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ tale che

1. $\emptyset \notin \mathcal{U}$
2. $A \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{U}$
3. $A, B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{U}$
4. $A \cup B \in \mathcal{U} \Rightarrow A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$

Definizione 2. Un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ è un punto nella compattificazione di Stone-Cech $\beta\mathbb{N}$ dello spazio discreto $\mathbb{N}$.

Definizione 3. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ è un quantificatore tale che per ogni ψ, φ formule valgano:

1. $(\mathcal{U}n)\varphi(n) \wedge (\mathcal{U}n)\psi(n) \Leftrightarrow (\mathcal{U}n)(\varphi(n) \wedge \psi(n))$
2. $(\mathcal{U}n)\varphi(n) \vee (\mathcal{U}n)\psi(n) \Leftrightarrow (\mathcal{U}n)(\varphi(n) \vee \psi(n))$
3. $\neg(\mathcal{U}n)\varphi(n) \Leftrightarrow (\mathcal{U}n)(\neg\varphi(n))$

Definizione 4. Un ultrafiltro su $\mathbb{N}$ è un operatore $\mathcal{U}$-*lim* su sequenze $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ su spazi di Hausdorff tale che per ogni $f : X \longrightarrow Y$ continua con Y compatto di Hausdorff valga

$$f(\mathcal{U}\text{-}lim\ x_n) = \mathcal{U}\text{-}lim\ f(x_n)$$

Nella prima parte del seminario diamo una caratterizzazione dei punti ricorrenti ed uniformemente ricorrenti in sistemi dinamico-topologici (X, T).
Definiamo $T^{\mathcal{U}}(x) = \mathcal{U}\text{-}lim\ T^n(x)$ e dimostriamo il seguente teorema:

Teorema 1. *Sia (X, T) un sistema dinamico, allora*

1. *$x \in X$ ricorrente $\Leftrightarrow \exists\mathcal{U}$ tale che $T^{\mathcal{U}}(x) = x$*

2. *$x \in X$ uniformemente ricorrente $\Leftrightarrow \forall\mathcal{V}\ \exists\mathcal{U}$ tale che $T^{\mathcal{U}}(T^{\mathcal{V}}(x)) = x$*

3. *$x, y \in X$ prossimi $\Leftrightarrow \exists\mathcal{U}$ tale che $T^{\mathcal{U}}(x) = T^{\mathcal{U}}(y)$*

Nella seconda parte usiamo le proprietà di $\beta\mathbb{N}$ come sistema dinamico per dimostrare il teorema di Auslander-Ellis.
Iniziamo applicando il teorema 1 al sistema dinamico $(\beta\mathbb{N}, \mathcal{S})$ con $\mathcal{S} : \beta\mathbb{N} \longrightarrow \beta\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{S}(\mathcal{U}) = 1 \oplus \mathcal{U}$ e dimostrando la seguente proprietà :

Teorema 2. *$\mathcal{U}$ genera un sotto-semigruppo minimale chiuso di $\beta\mathbb{N} \Leftrightarrow \mathcal{U}$ idempotente*

Dimostriamo dunque un teorema che ci permette di passare da $(\beta\mathbb{N}, \mathcal{S})$ ad un generico sistema dinamico (X, T).

Teorema 3. *Sia (X, T) un sistema dinamico ed $x \in X$, allora*

1. *$\mathcal{U}$ (uniformemente) ricorrente $\Rightarrow T^{\mathcal{U}}(x)$ (uniformemente) ricorrente*

2. *$\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ prossimi $\Rightarrow T^{\mathcal{U}_1}(x)$, $T^{\mathcal{U}_2}(x)$ prossimi*

Dimostriamo infine il teorema di Auslander-Ellis.

Teorema di Auslander-Ellis. *Sia (X, T) un sistema dinamico. Allora per ogni $x \in X$ esiste $y \in X$ tale che x ed y prossimi ed y uniformemente ricorrente.*

Nella terza parte introduciamo un ordine parziale sugli ultrafiltri (cit. [3]) e lo usiamo insieme a quanto visto nelle sezioni precedenti per dimostrare il teorema di Hales-Jewett.
Definiamo $\mathcal{U} < \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$

Abbiamo quindi il seguente teorema:

Teorema 4. *Le seguenti sono equivalenti:*

1. *$\mathcal{U}$ uniformemente ricorrente e prossimo a* 0
2. *$\mathcal{U}$ idempotente ed esiste I ideale sinistro minimale tale che $\mathcal{U} \in I$*
3. *$\mathcal{U}$ idempotente minimale rispetto all'ordine $<$*

Diamo alcune definizioni preliminari al teorema di Hales-Jewett .

- Un alfabeto è un insieme finito Σ.
- L'insieme W delle parole su Σ è l'insieme delle sequenze finite di elementi di Σ.
- Sia $x \notin \Sigma$, allora l'insieme $\overline{W}$ delle parole variabili è l'insieme delle sequenze finite di elementi di $\Sigma \cup \{x\}$.
- $\Delta = \overline{W} - W$.
- Per ogni $w \in \overline{W}$ e fissato $a \in \Sigma$ definisco istanza di w la parola ottenuta sostituendo x con a in w.

Mostriamo infine il teorema di Hales-Jewett (cit. [2]).

Teorema di Hales-Jewett. *Per ogni partizione finita di W esiste $w \in \Delta$ tale che ogni istanza di w si trova nella stessa partizione.*

Riferimenti bibliografici

[1] A. Blass. Ultrafilters: where Topological Dynaics = Algebra = Combinatorics. *Topology Proceedings, vol 18*, 1993.

[2] N. Hindman V. Bergelson, A. Blass. *Partition theorems for spaces of variable words.*

[3] N. Hindman V. Bergelson, A. Blass. Nonmetrizable topological dynamics and Ramsey Theory. *Trans. Amer. Math. Soc. 320*, 1990.