Note di Teoria di Analisi I

Simmaco Di Lillo

8 giugno 2020

Questo pdf contiene le dimostrazioni dei “classici" teoria di Analisi I.
Può essere un’utile preparazione all’orale

Indice

Parte I
Cenni di topologia

Definizione 0.1. Uno **spazio metrico** è un insieme X dotato di una funzione

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

con le seguenti proprietà

- $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Definizione 0.2. Sia (X, d) metrico, $x \in X$ e $r > 0$ allora definiamo la **palla** di centro x e raggio r, l'insieme

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

Definizione 0.3. $A \subset (X, d)$ si dice **aperto** se

$$\forall x \in A \quad \exists R > 0 \quad B_R(x) \subseteq A$$

ovvero se A contiene per ogni punto una palla centrata in quel punto

Definizione 0.4. $C \subseteq (X, d)$ si dice **chiuso** se il suo complementare è aperto

Proposizione 0.1.

1. *Unione arbitraria di aperti è aperto*
2. *intersezione finita di aperti à un aperto*

Dimostrazione. Sia $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di aperti

1. Sia $x \in \bigcup A_i$ allora esiste $k \in I$ con $x \in A_k$.
   Essendo A_k aperto esiste $B_r(x) \subseteq A_k$ dunque $B_r(x) \subseteq \bigcup A_i$
2. Supponiamo ora $I = \{1, \ldots, k\}$.
   Sia $x \in \bigcap_{i=1}^k A_i$, ora essendo A_i aperto

   $$\forall i \quad \exists r_i > 0 \quad B_{r_i}(x) \subset A_i$$

   posto $r = \min\{a_1, \ldots, a_k\}$ si ha $B_r \subseteq \bigcap_{i=1}^k A_i$

Corollario 0.2.

1. *Unione finita di chiusi è chiusa*
2. *Intersezione arbitraria di chiusi è chiusa*

Dimostrazione. Segue applicando le leggi di De-Morgan

Definizione 0.5. Sia E un sottoinsieme di uno spazio metrico X.
La **frontiera** di E è l'insieme

$$\partial E = \{y \in X \,|\, \forall r > 0 \quad B_r(y) \cap E \neq \emptyset \quad B_r(y) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset\}$$

contiene punti "dentro" e "fuori" sufficientemente vicini

Proposizione 0.3.

$$E \text{ aperto} \quad \Leftrightarrow \quad E \cap \partial E = \emptyset$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $x \in E$ allora essendo aperto $B_r(x) \subseteq E$ per un certo r da cui $B_r(x) \cap (X \setminus E) = \emptyset$ ovvero $x \notin \partial E$.
$\Rightarrow$ sia $x \in E$ dunque $x \notin \partial E$ da cui

$$\exists r > 0 \quad B_r(x) \cap E = \emptyset \text{ o } B_r(x) \cap (X \setminus E) = \emptyset$$

ora la prima ipotesi è assurda (x sta nell'intersezione) dunque

$$B_r(x) \cap (X \setminus E) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad B_r(x) \subseteq E$$

abbiamo mostrato E aperto

Proposizione 0.4.

$$E \text{ chiuso} \quad \Leftrightarrow \quad \partial E \subseteq E$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia $x \in \partial E$. Supponiamo $x \notin E$ dunque $x \in X \setminus E$.
Ora tale insieme è aperto dunque

$$\exists r > 0 \quad B_r(x) \subseteq X \setminus E$$

il che contraddice l'ipotesi che $x \in \partial E$.
$\Leftarrow$ Sia $x \in X \setminus E$ dunque $x \notin \partial E$ da cui

$$\exists r > 0 \quad B_r(x) \cap X \setminus E = \emptyset \text{ o } B_r(x) \cap E = \emptyset$$

ora la prima ipotesi è assurda (x ci appartiene) dunque

$$B_r(x) \cap E = \emptyset \quad \Rightarrow \quad B_r(x) \subseteq X \setminus E$$

abbiamo dunque $X \setminus E$ aperto dunque E chiuso

Anche se non possiamo parlarne ancora

Proposizione 0.5.

E chiuso $\quad \Leftrightarrow \quad$ per ogni successione convergente x_n contenuta in E il limite appartiene ad E

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Supponiamo $\{x_n\} \subseteq E$ con $x_n \to x_\infty$ con $x_\infty \notin E$.
Poichè x_∞ appartiene ad un aperto

$$\exists r > 0 \quad B_r(x_\infty) \subseteq X \setminus E$$

da cui $x_n \notin B_r(x_\infty)$ dunque $x_n \not\to x_\infty$, assurdo.
$\Leftarrow$ Sia $x \in \partial E$, costruiamo una successione in E che converge a x.
Per definizione di frontiera

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in B_{\frac{1}{n}}(x) \cap E$$

chiaramente $x_n \to x$ dunque $x \in E$.
Dalla caratterizzazione precedente E chiuso

0.1 Punti accumulazione

Definizione 0.6. Sia $E \subset \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in E$.
x_0 si dice **punto di accumulazione per** E se

$$\forall r > 0 \quad B_r(x_0) \cap E \neq \{x_0\}$$

Osservazione 1. Se x_0 è punto di accumulazione per E allora per ogni raggio r, $B_r(x_0) \cap E$ contiene infiniti punti

Dimostrazione. Se esistesse r con

$$B_r(x_0) = \{x_0, \dots, x_k\}$$

allora preso

$$s = \min_{i=1\dots,k} \{d(x_0, x_i)\}$$

si ha $B_s(x_0) \cap E = \{x_0\}$ contro la definizione di punto di accumulazione

Teorema 0.6 (Teorema di Cantor per intervalli dimezzati).
Siano $I_k = [a_k, b_k] \subset \mathbb{R}$ *tali che*

1. $I_{k+1} \subseteq I_k$
2. $b_{k+1} - a_k = \frac{b_k - a_k}{2}$

allora esiste unico $x \in \bigcap I_k$

Dimostrazione. Sia $A = (a_k)$ e $B = (b_k)$ allora si ha $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ $a < b$.
Osserviamo che A non vuoto è limitato, dunque ammette estremo superiore, sia

$$x = \sup A$$

Chiaramente $\forall n$ si ha

$$a_n \leq x \leq b_n$$

(la prima disuguaglianza è la definizione di estremo superiore, mentre se fosse $\sup A < b_n$ allora $b_n \in A$ il che è assurdo).
Dunque abbiamo trovato x che appartiene all'intersezione, mostriamo la sua unicità.
Supponiamo $y \neq x$ che appartiene all'intersezione, allora posta $d = |y - x|$ otteniamo che $\exists k$ con

$$\frac{b_0 - a_0}{2^k} < d \quad \Rightarrow \quad y \notin I_k$$

se fosse $y \in I_k$ si avrebbe che I_k avrebbe ampiezza maggiore di $\frac{b_0 - a_0}{2^k}$ (contiene x, y l'ampiezza maggiore di d

Teorema 0.7 (di Bolzano-Weistrass).

$$E \subseteq \mathbb{R} \textit{ infinito e limiitato} \quad \Rightarrow \quad E \textit{ ammette punto di accumulazione}$$

Dimostrazione. Essendo E limitato, esistono $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ con $E \subseteq [a_0, b_0]$.
Andiamo a generare una successione di intervalli dimezzati per ricorsione numerabile.

$$I_0 = [a_0, b_0]$$

Supponiamo di aver definito $I_k = [a_k, b_k]$ allora poniamo

$$I_{k+1} = \begin{cases} \left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right] & \text{se tale intervallo contiene infiniti punti di } E \\ \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right] & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Abbiamo dunque una successione di intervalli dimezzati da cui $\exists x \in \bigcap I_k$.
Mostriamo che x è un punto di accumulazione per E.
Sia $r > 0$ allora esiste k tale che

$$r < \frac{b_0 - a_0}{2^k}$$

dunque otteniamo $B_r(x) \cap E \neq \{x\}$ infatti $I_k \subseteq B_r(x)$ e $I_k \cap E$ contiene infiniti punti

Definizione 0.7. $x \in E$ si dice **punto isolato** se non è di accumulazione, ovvero

$$\exists r > 0 \quad B_r(x) \cap E = \{x\}$$

Parte II
Limiti

0.2 Funzioni

Definizione 0.8. Diciamo che U è **intorno** di $x_0 \in R \cup \{+\infty, -\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$.

- $x_0 \in \mathbb{R}$ allora
$$\exists r > 0 \quad B_r(x_0) \subseteq U$$
- Se $l = +\infty$ allora
$$\exists M \in \mathbb{R} \quad (M, +\infty) \subseteq U$$
- Se $l = -\infty$ allora
$$\exists M \in \mathbb{R} \quad (-\infty, M) \subseteq U$$

Definizione 0.9. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ $l, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ scriveremo
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$
se accade
$$\forall V \text{ intorno di } l \quad \exists U \text{ intorno di } x_0 \quad f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$$

Teorema 0.8. *Supponiamo*
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$$
allora $l_1 = l_2$

Teorema 0.9 (Proprietà algebriche)**.**
Sia x_0 un punto di accumulazione, supponiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$ allora
$$\lim_{x \to x_0} (f \pm g) = l_1 \pm l_2$$

Dimostrazione.

- Se $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ allora in un intorno di x_0 otteniamo
$$|f(x) + g(x) - (l_1 + l_2)| \leq |f(x) - l_1| + |g(x) - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
- $l_1 \in \mathbb{R}$ e $l_2 = +\infty$, fissati M, ε in un intorno di x_0 abbiamo
$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$
$$g(x) > M - l + \varepsilon \text{ in un intorno di } x_0$$
Dunque
$$f(x) + g(x) > M - l + \varepsilon + l - \varepsilon > M$$
dunque $f(x) + g(x)$ ha come limite $+\infty$
- Il caso $l_1, l_2 = \infty$ si fa in maniera analoga

Proposizione 0.10. *Sia x_0 di accumulazione, se $f(x) \to l$ per $x \to x_0$ allora f è limitata in un intorno di x_0*

Lemma 0.11. *Se $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$ e $g(x)$ è limitata allora $(fg)(x) \to 0$ per $x \to x_0$*

Teorema 0.12 (Proprietà algebriche)**.**
Sia x_0 un punto di accumulazione, supponiamo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l_2$ allora

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g) = l_1 \pm l_2$$

Teorema 0.13 (Dei carabinieri)**.**
Siano $f, g, h : E \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per E. Se

- *$\exists U$ intorno di x_0 con*
$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\}$$
- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$

allora $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$

Teorema 0.14. *Siano $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{R}$ con $f(E) \subseteq F$.*
Sia x_0 punto di accumulazione per E con $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.
Supponiamo l punto di accumulazione per F con $\lim_{y \to l} g(y) = m$.
Se $\exists U$ intorno di x_0 con $f(x) \neq l$ per $x \in U \cap (E \setminus \{x_0\})$ allora

$$\lim_{x \to x_0} f \circ g(x) = m$$

0.3 Successioni

Definizione 0.10. Sia x_n una successione

$$x_n \to x_\infty \in \overline{R}$$

se

$$\forall U \text{ intorno di } x_\infty \quad x_n \in U \text{ definitivamente}$$

Osservazione 2. Le successioni sono funzioni con dominio $\mathbb{N}$, dunque valgono gli stessi teoremi per i limiti di funzione ricordando che $\mathbb{N}$ ha solo $+\infty$ come punto di accumulazione

Teorema 0.15. *Sia x_n una successione monotona crescente, allora $x_n \to \sup\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*

Dimostrazione. Il sup garantisce un superamento, la monotonia i successivi.
Distinguiamo 2 casi

- $\sup = +\infty$
  Sia $M \in \mathbb{R}$ allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ con $a_{n_0} > M$ (M non è un maggiorante).
  Ora $\forall n \geq n_0$ si ha $a_n \geq M$
  Abbiamo dunque mostrato che $a_n \to +\infty$

- $\sup = l \in \mathbb{R}$.
  Essendo $\sup = l$ si ha $l - \varepsilon$ non è un maggiorante, dunque $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ con $a_n > l - \varepsilon$ per $n > n_0$.
  Dalla monotonia abbiamo $\forall n > n_0$ si ha

  $$l - \varepsilon < a_n < l < l + \varepsilon$$

  dove la seconda disuguaglianza deriva dal fatto che ε è un maggiorante

Proposizione 0.16. *Sia A un insieme non vuoto allora esiste una successione in A convergente all'estremo superiore (similmente inferiore)*

Dimostrazione. Distinguiamo 2 casi

- $\sup A = +\infty$.
  Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in \mathbb{N}$ con $x_n \geq n$
  Chiaramente tale successione converge a $+\infty$

- $\sup A = l \in \mathbb{R}$.
  Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n > l - \frac{1}{n}$.
  Abbiamo dunque $l - \frac{1}{n} \leq a_n \leq l$ per il teorema dei carabinieri tale successione converge a l

0.4 Il numero e

Teorema 0.17. *La successione*
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
ha limite reale, tale limite prende il nome di numero di Nepero

Dimostrazione. Mostriamo che la successione è superiormente limitatata e crescente

- Dimostriamo che$a_n \geq a_{n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} a_n \geq a_{n-1} &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \left(1 + \frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n-1}{n}\right) \\ &\Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$
  L'ultima disuguaglianza è vera per Bernoulli con $x = -\frac{1}{n^2}$.
- Dimostriamo che $a_n \leq 3$.
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 2 - \frac{1}{1 - 2^{n-1}} \leq 3.$$

Allora dato che a_n è limitata e monotona essa ammette limite,

0.5 Alcuni criteri

Teorema 0.18 (del rapporto)**.**
Sia a_n una successione definita positiva allora se esiste

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$$

otteniamo

- $l > 1$ *allora* $a_n \to +\infty$
- $l < 1$ *allora* $a_n \to 0$

Teorema 0.19 (della readice)**.**
Sia a_n una successione definita positiva allora se esiste

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

otteniamo

- $l > 1$ *allora* $a_n \to +\infty$
- $l < 1$ *allora* $a_n \to 0$

1 Compattezza

Definizione 1.1. Sia x_n una successione, diciamo che x_{n_k} è una **sottosuccessione** di x_n se esiste una successione di indici $(n_k)_k$ estratta da $\mathbb{N}$ tale che $n_k \to +\infty$

Definizione 1.2. Sia $E \subset X$.
X si dice **compatto** se ogni successione contenuta in E ammette una sottosuccessione convergente in E

Lemma 1.1. *Sia x_n una successione*

$$x_n \to x_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x_{n_k})_k \quad x_{n_k} \to x_\infty$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ (quello che fa la successione lo farà la sottosuccessione).
Sia U intorno di x_∞ allora $x_n \in U$ per ogni $n > \overline{n}$
Essendo $n_k \to \infty$ esiste $\overline{k}$ tale che $n_{\overline{k}} \geq \overline{n}$ dunque $x_{n_k} \in U$ definitivamente .
$\Leftarrow$ Supponiamo che esiste una sottosuccessione $x_{n_k} \not\to x_\infty$.
Allora esiste un intorno U di x_∞ con $x_{n_k} \notin U$ frequentemente (per infiniti indici)
Dunque anche $x_n \notin U$ frequentemente, da cui $x_n \not\to x_\infty$

Teorema 1.2.

$$E \subseteq \mathbb{R} \text{ compatto} \quad \Rightarrow \quad E \text{ chiuso e limitato}$$

Dimostrazione. Supponiamo E non sia chiuso.
Per la caratterizzazione di insieme chiuso si ha

$$\exists \{x_n\} \subseteq E \text{ convergente a } x_\infty \text{ con } x_\infty \notin E$$

per il lemma precedente si ha che ogni sottosuccessione non converge in E, dunque E non compatto.

Supponiamo E illimitato, andiamo a costruire una successione che tende a $+\infty$.
Essendo E illimitato $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in E$ con $x_n > n$.
Chiaramente tale funzione diverge a $+\infty$ dunque tutte le estratte divergono a $+\infty$.

Teorema 1.3.

$$E \subseteq \mathbb{R} \text{ chiuso e limitato} \quad \Rightarrow \quad E \text{ compatto}$$

Dimostrazione. Sia $I = \{x_n\} \subseteq E$.
Iè infinita e limitata, dunque per Bolzano-Weistrass, I ha un punto di accumulazione x.
Andiamo a costruire una sottosuccessione che converge ad x, seguirà dalla caratterizzazione degli insiemi chiusi che $x \in E$.
Essendo x punto di accumulazione

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \exists x_{n_k} \in B_{\frac{1}{m}}(x) \cap \{x_n\}$$

chiaramente tale sottosuccessione converge a x

Corollario 1.4. *Una successione limita ammette una sottosuccesione convergente*

2 Successioni di Cauchy e completezza

Definizione 2.1. Sia (X, d) uno spazio metrico x_n si dice **successione di Caucy** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \forall n, m > n(\varepsilon)$$

Osservazione 3. Se $x_n \to x$ allora x_n è convergente

Definizione 2.2. Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di Cauchy è convergente

Lemma 2.1. *Le successioni di Cauchy reali sono limitate.*

Dimostrazione. Applichiamo la definizione con $\varepsilon = 1$ otteniamo che $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ con

$$x_{n_0} - 1 \leq x_n \leq x_{n_0} + 1 \quad \forall n > n_0$$

dunque posto $M = \max\{|x_0|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |x_{n_0} - 1|, |x_{n_0} + 1|\}$ si ha $|x_n| \leq M$

Teorema 2.2. $\mathbb{R}$ *è completo*

Dimostrazione. Sia x_n una successione di Cauchy.
Dal lemma sappiamo che x_n è limitata, dunque ammette una sottosuccessione x_{n_k} convergente ad un certo limite $\overline{x}$.
Mostriamo che x_n converge al medesimo limite, fissato $\varepsilon > 0$.
Dalla definizione di successione di Cauchy

$$|x_n - x_m| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n > \overline{n}$$

Essendo $n_k \to +\infty$ esiste $\overline{k}$ tale che $x_{n_{\overline{k}}} > \overline{n}$.
Ora essendo $x_{n_k} \to \overline{x}$ esiste y tale che

$$|x_{n_k} - \overline{x}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k > y$$

Ora per $n > \overline{n}$ e per $k > \max\{\overline{k}, y\}$ abbiamo

$$|x_n - \overline{x}| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - \overline{x}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Corollario 2.3.

$$x_n \to x \quad \Leftrightarrow \quad x_n \text{ di Cauchy}$$

3 Funzioni continue

Definizione 3.1. Sia $f : E \to \mathbb{R}$.
f si dice **continua** in x_0 se

- x_0 è un punto isolato per E
- x_0 è un punto di accumulazione per E e

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Teorema 3.1.

$$f \text{ continua in } x_\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_n \to x_\infty \quad f(x_n) \to f(x_\infty)$$

Dimostrazione. $\Rightarrow$ Sia V un intorno di $f(x_0)$.
Dalla continuità di f si ha

$$\exists U \text{ intorno di } x_0 \quad f(U) \subseteq V$$

Ora poichè $x_n \to x_\infty$ si ha $x_n \in U$ definitivamente, dunque $f(x_n) \in f(U) \subseteq V$ definitivamente.
$\Leftarrow$ Supponiamo per assurdo f non continua in x_∞ allora

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\gamma \ |x_\delta - x_\infty| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_\infty)| > \varepsilon$$

dunque ponendo $\gamma = \frac{1}{n}$ si e $x_\delta = x_n$ si ha $x_n \to x_\infty$ ma $f(x_n) \not\to f(x_\infty)$

Teorema 3.2 (di Weistrass)**.** *Una funzione continua su un compatto assume massimo e minimo.*

Dimostrazione. Sia $f : K \to \mathbb{R}$ continua con K compatto.
Sia $A = f[K]$, dunque esiste una successione y_n contenuta in A convergente all'estremo superiore.
Resta da mostrare che tale estremo superiore è un massimo.
Essendo $\{y_n\} \subseteq A$ allora esiste una successione x_n contenuta in K tale che $y_n = f(x_n)$.
Essendo K compatto, esiste una sottosuccessione $x_{n_k} \to x_\infty \in K$.
Dalla continuità di f segue che $f(x_{n_k}) \to f(x_\infty) \in A$.
Ora essendo x_n convergente all'estremo superiore anche $f(x_{n_k})$ converge all'estremo superiore dunque $\sup A = f(x_\infty) \in A$.
Analoga dimostrazione per l'esistenza del minimo (sostituendo sup con inf)

Corollario 3.3. *Una funzione continua manda compatti in compatti*

Teorema 3.4 (Permanenza del segno)**.** *Sia f continua in un punto x_0 e tale che $f(x_0) > 0$ allora esiste un intorno in cui f è positiva*

Dimostrazione. Essendo f continua in x_0 si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Per ogni V intorno di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che $f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V$.
Ponendo $V = \left(\frac{f(x_0)}{2}, \frac{3}{2} f(x_0) \right)$ si ha la tesi

Teorema 3.5 (degli zeri)**.**
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $f(a)f(b) < 0$ allora f ammette uno zero in (a, b)

Dimostrazione. Supponiamo senza perdere di generalità $f(a) < 0$.
Sia

$$A = \{x \in [a,b] \,|\, f(x) < 0\}$$

tale insieme è non vuoto $a \in A$ e superiormente limitato $A \subseteq [a,b]$ dunque ammette estremo superiore. Sia $c = \sup A$.
Mostriamo che $f(c) = 0$

- Supponiamo per assurdo $f(c) < 0$ allora per permanenza del segno, esiste U intorno di x_0 tale che $f(x) < 0$ per $x \in U$.
  Essendo U intorno di x_0 si ha

  $$\exists \varepsilon > 0 \quad (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap [a,b] \subseteq U$$

  Essendo $x_0 \neq b$ si h $\exists a' \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap [a,b]$ dunque $f(a') < 0$.
  Abbiamo trovato $a' \in A$ con $a' > x_0 = \sup A$, il che è assurdo

- Il caso $f(c) > 0$ si fa in maniera analoga

Teorema 3.6. *Le funzioni continue mandano intervalli in intervalli.*

Dimostrazione. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua.
Ora $[a,b]$ è un chiuso e limitato, da cui compatto, dunque per Weistrass f ammette massimo M (raggiunto da a_1) e minimo m (raggiunto da b_1).
Possiamo supporre senza perdere di generalità $a_1 \leq b_1$.

Supponiamo $M \neq m$ (altrimenti f costante e manda $[a,b] \in \{M\}$ che è un intervallo).
Sia $y \in \mathbb{R}$ tale che $m < y < M$.
Consideriamo la funzione

$$g : [a_1, b_1] \to \mathbb{R} \quad g(x) = f(x) - y$$

Osserviamo che $g(a_1) < 0$ mentre $g(a_2) > 0$ dunque esiste un punto $c \in (a_1, b_1) \subseteq [a,b]$ con

$$g(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) - y = 0 \quad \Rightarrow \quad f(c) = y$$

Abbiamo provato che $Imf = [m, M]$

4 Lipschitzianità e teorema delle contrazioni

Definizione 4.1. Sino (X, d) e (Y, d') spazi metrici, una funzione $f : X \to Y$ è **K-lipschitz** se

$$\forall x, y \in X \quad d'(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y)$$

Osservazione 4. Una funzione lipschitziana è continua

Definizione 4.2. Sia (X, d) uno spazio metrico completo.
Una **contrazione** è una funzione $f : X \to X$ lipschitziana di costante $C < 1$

Teorema 4.1 (delle contrazioni)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico completo.
Sia f una contrazione allora f ammette un unico punto fisso.*

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$ definiamo una successione per ricorsione ponendo $x_{n+1} = f(x_n)$.
Mostriamo che tale successione è di Cauchy.

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq Cd(x_{n-1}, x_n) \leq C^n d(x_0, x_1)$$

dove l'ultima disuguaglianza si prova per induzione.
Siano $n > m$ allora

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{i=m}^{n-1} C^i = d(x_0, x_1) C^m \sum_{i=0}^{n-m-1} C^i$$

Per $m \to +\infty$ il termine a destra converge dunque

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_0, x_1) \frac{C^m}{1 - C} \quad \text{per } m \to +\infty$$

dunque abbiamo mostrato che la successione è di Cauchy.
Essendo X completo si ha $x_n \to \overline{x}$.
Ora $f(x_n) = x_{n+1} \to \overline{x}$.
Essendo f continua $f(x_n) \to f(\overline{x})$ e per unicità del limite $f(\overline{x}) = \overline{x}$.
Mostriamo che non esistono altri punti fissi, se fosse $f(y) = y$ allora

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$$

dunque $d(x, y) = 0$ ovvero $x = y$

5 Uniforme continuità

Definizione 5.1. Una funzione f si dice **uniformemente continua** se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Osservazione 5. Chiaramente se f uniformemente continua, allora è continua.
Nella definizione di continuità δ dipendeva dal punto x_0 su cui era stata definita la continuità

Teorema 5.1 (Heine-Borel)**.** *Una funzione continua su un compatto è uniformemente continua*

Dimostrazione. Supponiamo f non uniforme continua dunque

$$\exists \varepsilon \quad \forall n d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad d(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon$$

Ora x_n ammette una sottosuccessione convergente $x_{n_k} \to \overline{x}$ similmente $y_{n_k} \to \overline{y}$.
Ora $d(x_n, y_n) \to 0$ quindi $\overline{x} = \overline{y}$.
Essendo f continua

$$f(x_{n_k}) \to f(\overline{x})$$
$$f(y_{n_k}) \to f(\overline{y})$$

dunque otteniamo

$$d(f(x_{n_k} - y_{n_k})) \leq d(x_{n_k}, \overline{x}) + d(\overline{y}, y_{n_k}) \leq \varepsilon$$

ma avevamo supposto $d(f(x_{n_k} - y_{n_k})) > \varepsilon$ il che è assurdo

Parte III
Serie

Sia a_n una successione.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ denotiamo

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} a_n$$

se esiste $l = \lim_{n\to\infty} a_n$ reale, diremo che la serie di a_n converge e lo denoteremo con

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = l$$

se il limite è infinito, diremo che la serie diverge.

Proposizione 5.2. *Se* $\sum a_n$ *converge allora* $a_n \to 0$

Dimostrazione. $a_n = S_n - S_{n-1} \to l - l = 0$

6 Criteri per successioni positive

Proposizione 6.1. *Siano a_n, b_n due successioni positive tali che $a_n < b_n$ definitivamente allora*

- *$\sum b_n$ converge allora $\sum a_n$ converge*
- *$\sum a_n$ diverge allora $\sum b_n$ diverge*

Dimostrazione. Supponiamo che $\sum b_n$ converge allora se indichiamo con S_n^b le somme parziali della serie di b_n otteniamo che definitivamente $S_n^b \leq M$ da cui $S_n^a < S_n^b < M$.
Ora S_n^a è una successione crescente e limitata dunque converge.
Supponiamo che $\sum a_n$ diverge, allora per ogni M si ha $S_n^a > M$ definitivamente, dunque anche $S_n^b > M$.
Ora S_n^b è una successione monotona, dunque ha limite , non potendo tendere ad un limite reale, tende a $+\infty$

Proposizione 6.2. *Siano a_n, b_n successioni positive tali esiste* $\lim \frac{a_n}{b_n} = l \neq 0$.
Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ si comportano nello stesso modo

Dimostrazione. Essendo $a_n, b_n > 0$ anche $l > 0$.
Dalla definizione di limite sappiamo che definitivamente

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq l+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{l}{2}b_n \leq a_n \leq (l+1)b_n$$

se $\sum b_n$ converge guarda la disuguaglianza di destra, senno quella di sinistra

Proposizione 6.3. *Sia $a_n > 0$ una successione decrescente allora $\sum a_n$ e $\sum 2^n a_{2^n}$ hanno lo stesso comportamento. Da mettere un disegno che spiega bene*

Osservazione 6. Si applica nei casi

$$\sum \frac{1}{n^a \log(n)^b}$$

$$\sum \frac{1}{n^a \log(\log(n))^b}$$

Proposizione 6.4. *Sia a_n una successione positiva, se esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup +\{\infty\}$$

allora $l < 1$ la serie converge, $l > 1$ la serie diverge

Dimostrazione. $l < 1$ allora dalla definizione di limite si ha

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{l+1}{2}$$

da cui

$$a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^n$$

si conclude per confronto (serie geometrica di ragione minore di 1).
$l > 1$ allora dalla definizione di limite si ha

$$\frac{l}{2} \leq \sqrt[n]{a_n}$$

da cui

$$\left(\frac{l}{2}\right)^n \leq a_n$$

si conclude per confronto (serie geometrica di ragione maggiore di 1)

Proposizione 6.5. *Sia a_n una successione positiva, se esiste*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \mathbb{R} \cup +\{\infty\}$$

allora $l < 1$ la serie converge, $l > 1$ la serie diverge

Dimostrazione. $l < 1$ allora dalla definizione di limite si ha

$$\frac{a_n{+}1}{a_n} \leq \frac{l+1}{2} \quad \forall n \geq n_0$$

da cui

$$a_n \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0}$$

si conclude per confronto (serie geometrica di ragione minore di 1).
$l > 1$ allora dalla definizione di limite si ha

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \forall n \geq n_0$$

da cui

$$\left(\frac{l}{2}\right)^{n-n_0} a_{n_0} \leq a_n$$

si conclude per confronto (serie geometrica di ragione maggiore di 1)

Proposizione 6.6 (Criterio di Rabae). *Sia a_n una successione positiva, supponiamo che esista*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$$

se $l < 1$ la serie diverge, se $l > 1$ la serie converge.

Dimostrazione. Se $l < 1$ allora per definizione di limite, esiste $\overline{n}$ tale che $\forall n \geq \overline{n}$ si ha

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$$

da cui con manipolazioni algebriche si arriva

$$na_n \leq (n+1)a_{n+1}$$

dunque la successione $\{na_n\}$ è crescente dunque per ogni $n \geq \overline{n}$ si ha

$$na_n \geq \overline{n}a_{\overline{n}} \quad \Rightarrow \quad a_n \geq \frac{\overline{n}a_{\overline{n}}}{n}$$

che diverge per confronto con la serie geometrica.
Nel caso $l > 1$ A BREVE

7 Altri criteri di convergenza

Definizione 7.1. Una successione si dice assolutamente convergente se

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

è convergente

Proposizione 7.1. *Una seria assolutamente convergente è convergente*

Dimostrazione. Osserviamo che $|a_n| \geq a_n$ da cui la serie $\sum |a_n| - a_n$ è a termini positivi. Ora $|a_n| - a_n \leq 2|a_n|$ dunque per confronto la serie $\sum |a_n| - a_n$ converge, dunque anche $\sum a_n$ converge infatti

$$a_n = |a_n| - (|a_n| - a_n)$$

dunque e somma di 2 serie convergenti

Proposizione 7.2 (Criterio di Leibnitz)**.** *Sia $b_n = (-1)^n a_n$ con a_n positiva, se*

- $a_n \to 0$
- a_n *decrescente*

allora la serie di b_n converge

Dimostrazione. È un caso particolare del criterio di Dirichlet

Lemma 7.3 (Lemma di Abel)**.**
Siano a_n e b_n due successioni allora

$$\sum_{k=n}^{m}(a_{k+1} - a_k)b_k = a_{n+1}b_{n+1} - a_m b_m - \sum_{k=n}^{m} a_{k+1}(b_{k-1} - b_k)$$

Dimostrazione.

$$a_{m+1}b_{m+1} - a_n b_n = \sum_{j=n}^{m}(a_{j+1}b_{j+1} - a_j b_j) = \sum_{j=n}^{m}(a_{j+1}b_{j+1} - a_{j+1}b_j + a_{j+1}b_j - a_j b_j) =$$

$$= \sum_{j=n}^{m}(a_{j+1}(b_{j+1} - b_j) - b_k(a_{k+1} - a_k))$$

Proposizione 7.4 (Criterio di Dirichlet)**.** *Siano a_n, b_n due successioni tali che*

- *Esiste c tale che $|A_n| \leq c$*
- $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| < +\infty$
- $b_n \to 0$

Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

converge.

Dimostrazione. Sia $A_k = \sum_{i=0}^{k-1} a_i$ ovvero la somma dei primi n termini dove poniamo $A_0 = 0$
Osserviamo dunque

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n}((A_{k+1} - A_k)b_k) = A_{n+1}b_{n+1} - A_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n} A_{k+1}(b_{k+1} - b_k)$$

Osserviamo che il primo termine tende a 0 essendo A_{n+1} limitata e $b_{n+1} \to 0$, il secondo è un uguale a 0 essendo $A_0 = 0$ e b_0 un numero, resta da studiare l'ultimo termine.
Studiamo il modulo

$$\sum_{k=0}^{n} |A_{k+1}| \, |b_{k+1} - b_k| \leq M \sum_{k=0}^{n} |b_{k+1} - b_k| = M \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1})$$

dove abbiamo usato che b_n è decrescente, osserviamo che l'ultima somma è telescopica da cui

$$\sum_{k=0}^{n} |A_{k+1}| \, |b_{k+1} - b_k| \leq M(b_0 - b_{n+1}) \to M b_0$$

dunque la serie iniziale converge

8 Serie dei reciproci dei primi

Lemma 8.1.

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n} \geq \log(k+1)$$

Dimostrazione. Dalla definizione di e sappiamo

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \leq e$$

dunque applicando il logaritmo otteniamo

$$n \log(n+1) - \log(n) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \log(n+1) - \log(n) \leq \frac{1}{n}$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{k} (\log(n+1) - \log n) = \log(k+1)$$

Inoltre da uno studio di funzioni sappiamo che se $0 < y < \frac{1}{2}$ si ha

$$y \geq -\frac{1}{2} \log(1-y)$$

dunque se denotiamo con p i primi

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \geq -\frac{1}{2} \sum_{p \leq x} \log\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{2} \sum_{p \leq x} \log\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

e per le proprietà dei logaritmi si ha

$$= \frac{1}{2} \log \prod_{p \leq x} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1}$$

Osserviamo che

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{n}}$$

dunque per ogni $n \leq x$, n si scrive come prodotto di primi minori o uguali ad x da cui

$$\prod_{p \leq x} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} \geq \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} > \log(x+1)$$

abbiamo dunque mostrato che

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \geq \frac{1}{2} \log(\log(x+1))$$

che dunque diverge per confronto

9 Riordinamento di serie

Proposizione 9.1. *Se la serie di a_n è assolutamente convergente, allora la somma di ogni suo riordinamento converge alla stessa somma degli a_n*

Dimostrazione. Supponiamo che a_n a termini positivi.
Allora detta $S = \sum a_n$ e posta per ogni n $B_n = \sum_{i=0}^{n} a_{\sigma(n)}$ otteniamo

$$B_n < S$$

dunque passando al limite otteniamo $\sum a_{\sigma(n)}$ converge a S' con $S' \leq S$.
Osserviamo che a_n è un riordinamento di $a_{\sigma(n)}$ dunque possiamo fare lo stesso ragionamento del punto precedente ottenendo $S \leq S'$. Nel caso generale a_n a termini variabili definiamo

$$a_n^+ = \max\{0, a_n\} \quad a_n^- = \min\{0, a_n\}$$

Dall'assoluta integrabilità otteniamo che $\sum a_n^+$ e $\sum a_n^-$ convergono rispettivamente a S^+ e S^- infatti

$$|a_n| = a_n^+ - a_n^-$$

dunque posta

$$b_n^+ = \max\{0, a_{\sigma(n)}\} \quad b_n^- = \min\{0, a_{sigma_n}\}$$

si ha dunque $\sum b_n^+ = S^+$ e $\sum b_n^- = S^-$

Proposizione 9.2. *Se $\sum a_n$ è convergente ma non assolutamente convergente, allora per ogni $x \in \overline{R}$ si ha che esiste una bigezione σ con*

$$\sum a_{\sigma(n)} = x$$

Dimostrazione. Osserviamo che $\sum a_n^+ = +\infty$ e $\sum a_n^- = -\infty$.
Infatti se convergesse una sola di quelle serie, allora $\sum a_n$ divergerebbe, se ne convergessero entrambe si avrebbe $\sum |a_n|$ convergente.
Inoltre le somme parziali di $\sum a_n^-$ sono negative definitivamente, da cui non può convergere a $+\infty$.
Mostriamo solamente il caso $x$reale, il resto è analogo.
Sommiamo i termini positivi fino a quando non superiamo il valore di x, a questo punto continuamo a sommare termini negativi fino a che non scendiamo sotto x, poi i positivi e così via.
Otteniamo così delle somme parziali che oscillano intorno ad x e si avvicinano sempre di più essendo i termini della successione infinitesimi (la distanza da x è inferiore all'ultimo termine sommato)

10 e come serie dei reciproci e sua irrazionalità

Proposizione 10.1.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Dimostrazione.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k-1}\frac{n-j}{n} = 1+\sum_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

Passando al limite per $n\to+\infty$ otteniamo $e\leq\sum\frac{1}{k!}$.
Per ogni $N\in\mathbb{N}$ si ha che per $n>N$ vale

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \leq e-1$$

ovvero

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}\left(1-\frac{j}{n}\right) \leq e-1$$

passando al limite per $n\to+\infty$ la produttoria tende a 1 da cui

$$e-1\geq\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!} \quad\Rightarrow\quad e\geq\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

dove l'implicazione deriva passando al limite $N\to+\infty$

Proposizione 10.2. *e è irrazionale.*

Dimostrazione. Come prima cosa stimiamo l'errore di approssimazione della serie ovvero

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1+j)!} = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1+j)!}$$

osserviamo ora che

$$\frac{(n+1)!}{(n+1+j)!} = \frac{1}{(n+1+1)\cdot(n+1+j)} \leq \frac{1}{(n+2)^j}$$

ora ricordando la somma di una serie geometrica si ottiene

$$e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} < \frac{1}{n\cdot n!}$$

infatti

$$\frac{n+2}{(n+1)(n+1)!} < \frac{1}{n\cdot n!} \quad\Leftrightarrow\quad (n+2)n\cdot n! < (n+1)(n+1)! \quad\Leftrightarrow\quad n^2+2n < n^2+2n+1$$

Possiamo ora dimostrare l'irrazionalità di e.
Supponiamo, per assurdo $e=\frac{p}{q}$ ridotta ai minimi termini. Osserviamo $q\neq 1$ in quanto e non è un intero

$$0 < e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q! \cdot q}$$

Moltiplicando per $q!$ otteniamo

$$0 < q\left(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right) < \frac{1}{q} \leq 1$$

dunque $x = q\left(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right)$.
Se mostriamo che x è un intero abbiamo concluso

$$x = p(q-1) - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k}$$

dunque x è un intero con $0 < x < 1$ il che è assurdo

11 Serie di potenze

Definizione 11.1. Le serie di potenze sono espressioni della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

dove $z \in \mathbb{C}$ è la variabile e z_0 è costante e nota.

Applicando il criterio della radice si deduce che se

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

(con la convenzione $\frac{1}{0} = +\infty$) allora si ha

$$|z-z_0| < R \quad \Rightarrow \quad \text{convergenza assoluta}$$

$$|z-z_0| > R \quad \Rightarrow \quad \text{non converge}$$

R prende il nome di raggio di convergenza della serie

Proposizione 11.1. *La funzione somma*

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

con raggio di convergenza R è continua in $B_R(z_0)$

Dimostrazione. Sia $\overline{z} \in B_R(z_0)$ allora mostriamo che $\lim_{z\to\overline{z}} S(z) = S(\overline{z})$.
Fissato $\varepsilon > 0$ poichè la serie converge per $z = \overline{z}$ si ha

$$\exists n_\varepsilon \quad \left| S(\overline{z}) - \sum_{n=0}^{N} a_n(\overline{z}-z_0)^n \right| \text{ per } N > n_\varepsilon$$

Parte IV
Derivabilità

Definizione 11.2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, diciamo che f è **derivabile** in x_0 se esiste finito il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

equivalentemente se

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \to x_0$$

Proposizione 11.2. *Una funzione derivabile in x_0 è continua in x_0*

Dimostrazione. Dalla derivabilità segue

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ per } x \to x_0$$

dunque

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = f(x_0)$$

da cui la tesi

Da aggiungere parte su non deruvabiliotà e operazioni algebriche

Teorema 11.3 (di Fermat)**.** *Sia* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *se* x_0 *è un punto di massimo o minimo locale allora se esiste* $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione. Poichè esiste la derivata allora necessariamente

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

supponiamo x_0 punto di massimo locale allora il numeratore è negativo.
La prima frazione ha denominatore positivo dunque $l \leq 0$ mentre la seconda ha denominatore negativo da cui $l \geq 0$.
Da quanto detto sopra si conclude osservando che $l = 0$ da cui la tesi

Teorema 11.4 (di Rolle)**.** *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *supponiamo*

- f *continua su* $[a, b]$
- f *derivabile su* (a, b)
- $f(a) = f(b)$

allora esiste $\xi \in (a, b)$ *con* $f'(\xi) = 0$

Dimostrazione. Per Weistrass f ammette massimo e minimo locali

- Se esiste $\xi \in (a, b)$ con $f(\xi)$ massimo o minimo, allora per il Teorema di Fermat, si ha $f'(\xi) = 0$
- Sia massimo che minimo, sono agli estremi dell'intervallo, dunque il massimo e il minimo della funzione coincidono, dunque f costante, da cui ogni punto ha derivata nulla

□

Teorema 11.5 (di Cauchy)**.** *Sia* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *supponiamo*

- f, g *continue su* $[a, b]$
- f, g *derivabili su* (a, b)

allora esiste $\xi \in (a, b)$ *con*

$$f'(\xi)(g(a) - g(b)) = g'(\xi)(f(a) - f(b))$$

sotto un ulteriore ipotesi: $g'(x) \neq 0 \in (a, b)$ *allora esiste* ξ *come sopra tale che*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\psi(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$$

tale funzione soddisfa le ipotesi di Rolle, in $[a, b]$ da cui esiste $\xi \in (a, b)$ con $\psi'(\xi) = 0$ che equivale alla tesi.
Supponiamo adesso che $g'(x) \neq 0$ in (a, b) allora $g(b) - g(a) \neq 0$ altrimenti, per Rolle, esisterebbe $\ni \in (a, b)$ con $g'(\ni) = 0$ il che è assurdo.
Essendo $g(b) - g(a), g'(\xi) \neq 0$ posso dividere e ottenere la tesi

Teorema 11.6 (di Lagrange)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *supponiamo*

- f *continua su* $[a,b]$
- f *derivabile su* (a,b)

allora $\exists \xi \in (a,b)$ *con*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dimostrazione. Segue dal teorema di Cauchy, ponendo $g(x) = x$, infatti $g'(x) = 1$ e non è nulla in (a,b)

Corollario 11.7 (Monotonia e segno della derivata prima)**.** *Sia* $f : E \to \mathbb{R}$ *derivabile. Allora*

- f *crescente se e solo se* $f'(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in E$
- f *crescente se e solo se* $f'(x) \leq 0$ *per ogni* $x \in E$
- *Se* $f'(x) > 0$ *allora* $f(x)$ *strettamente crescente*
- *Se* $f'(x) < 0$ *allora* $f(x)$ *strettamente decrescente*

Dimostrazione. Mostriamo la prima e la terza, le altre sono analoghe.
Sia $x_1, x_2 \in E$ con $x_1 < x_2$ allora nell'intervallo $[x_1, x_2]$ sono soddisfatte le ipotesi di Lagrange, da cui $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ con

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$$

Mostriamo che $f'(x) > 0$ allora la monotonia è stretta.
Con dimostrazione analoga al caso precedente f è crescente.
Supponiamo, per assurdo, che $f(x_1) = f(x_2)$ allora in $[x_1, x_2]$ sono soddisfatte le ipotesi di Rolle, dunque $\exists \ni \in (x_1, x_2)$ con $f'(\ni) = 0$ il che contraddice $f'(\ni) > 0$ □

Osservazione 7. Con la nozione di derivata diventa piuttosto semplice capire se una funzione è Lischitziana infatti lo è se e solo se la sua derivata è limitata in modulo, inoltre la costante di Lipschitz è proprio il sup del modulo della derivata.

Proposizione 11.8. *Sia* $f : E \to \mathbb{R}$ *derivabile e* $f'(x_0) = 0$ *allora se esiste* $f''(x_0)$ *si ha*

- $f''(x_0) > 0$ *allora* x_0 *è un minimo locale*
- $f''(x_0) < 0$ *allora* x_0 *è un massimo locale*
- x_0 *è un minimo locale allora* $f'(x_0) \geq 0$
- x_0 *è un massimo locale allora* $f'(x_0) \leq 0$

Dimostrazione. Mostriamo 1 e 3, gli altri sono analoghi

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

dunque in un intorno di x_0 si ha in $[x, x_0]$ la funzione è decrescente, in $[x_0, x]$ la funzione è crescente.
Supponiamo x_0 minimo locale, allora in un intorno di x_0 si ha $f(x) > f(x_0)$ da cui se prendiamo $x_n \to x_0$ con $x_n > x_0$ otteniamo che esiste la successione

$$f'(y_n) = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} > 0$$

da cui al limite $f''(x_0) > 0$

In modo analogo si prova che

Proposizione 11.9. *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ derivabile $k-1$ volte in E.*
Se esiste $x_0 \in E$ con $f^{(i)}(x_0) = 0$ per $i \leq k_1$ ed esiste $f^k(x_0)$ allora

- *$f^{(k)} > 0$ con k pari, allora x_0 è un punto di minimo*
- *$f^{(k)} < 0$ con k dispari, allora x_0 è un punto di massimo*

Teorema 11.10 (di Darboux)**.** *Sia f derivabile su (a, b) allora f' assume tutti i valori tra $f'(a)$ e $f'(b)$.*

Dimostrazione. Supponiamo $f'(a) < t < f'(b)$ e consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - tx$$

dunque $g'(a) < 0$ mentre $g'(b) > 0$.
Per Weistrass tale funzione ammette un massimo locale.
Il minimo non viene assunto in a in quanto in a la funzione è localmente decrescente, non viene assunto nemmeno in b, in b la funzione è localmente decrescente, da cui $\exists \xi \in (a, b)$ con $g'(\xi) = f'(x) - t = 0$ da cui la tesi

Teorema 11.11 (di de l'Hopital)**.** *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ tali che*

- *f, g continue su $[a, b]$*
- *f, g derivabili in (a, b) eccetto al più un punto x_0*
- *$g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ con $x \neq x_0$*
- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
- *Esiste il seguente limite* $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Poichè esiste il seguente limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

allora $f'(x), g'(x)$ sono ben definite in un intorno I di x_0.
Sia $x \in I$ allora per il teorema di Cauchy in $[x, x_0]$ esiste $\xi_x \in (x, x_0)$ tale che

$$\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

essendo le funzioni continue in x_0 si ha $f(x_0) = g(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ da cui

$$\frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

ora se $x \to x_0$ si ha $\xi_x \to x_0$ da cui la tesi

11.1 Simboli di Landau e Taylor

Definizione 11.3. Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in E$, diremo

- o-piccolo
$$f(x) = o(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$
se esiste $\omega : E \to \mathbb{R}$ con
$$f(x) = \omega(x) g(x) \quad \omega(x) \to 0 \text{ per } x \to x_0$$

- equivalenza asintotica
$$f(x) \sim g(x) \text{ per } x \to x_0$$
se esiste $\omega : E \to \mathbb{R}$ con
$$f(x) = \omega(x) g(x) \quad \omega(x) \to 1 \text{ per } x \to x_0$$

- O-grande
$$f(x) = O(g(x)) \text{ per } x \to x_0$$
se esiste $\omega : E \to \mathbb{R}$ con
$$f(x) = \omega(x) g(x) \quad \omega(x) \text{ limitata in un intorno di } x_0$$

Definizione 11.4. Sia $f : E \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in E$, se f è derivabile $n-1$ volte in un intorno di x_0 e n volte in x_0, chiamiamo **polinomio di Taylor centrato in x_0 e di grado n** il polinomio

$$T_n(f, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Osservazione 8. Segue, dalla regola di derivazione dei polinomi che

$$T_n(f, x_0)' = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k \cdot (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!} \cdot (x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = T_{n-1}(f', x_0)$$

Teorema 11.12 (di Taylor con resto di Peano)**.** *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in E$*

- *se f è derivabile $n-1$ volte su E*
- *se f è derivabile n volte in x_0*

allora
$$f(x) = T_n(f, x_0) + o\left(((x - x_0)^n\right) \text{ per } x \to x_0$$

Dimostrazione. Mostriamolo per induzione su $n \geq 1$ che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T_n(f, x_0) - f(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Per $n = 1$ la tesi è la condizione di differenziabilità in x_0 ovvero

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = T_1(f, x_0) + o(x - x_0)$$

Supponiamo la tesi valga per un certo n allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T_n(f, x_0) - f(x)}{(x - x_0)^n}$$

applicando il teorema di De l'Hopital diventa

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T_n'(f, x_0) - f'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} = \frac{1}{n} \lim_{x \to x_0} \frac{T_{n-1}(f', x_0) - f'(x)}{(x - x_0)^{n-1}}$$

Ora f' è differenziabile $n - 2$ volte in E e $n - 1$ volte in x_0 dunque per ipotesi induttiva si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{T_{n-1}(f', x_0) - f'(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} \frac{T_n(f, x_0) - f(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Teorema 11.13 (di Taylor con resto di Lagrange)**.** *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivabile $n + 1$ volte in (a, b).*
Allora fissato $x_0 \in (a, b)$ si ha $\forall x \in (a, b)$ con $x \neq x_0$ esiste ξ in un intervallo di estremi x_0 e x tale che

$$f(x) = T_n(f, x_0) + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Dimostrazione. Mostriamo per induzione su $n \geq 1$ che $\forall x$ si ha $\exists \xi$ nell'intervallo di estremi x_0, x tale che

$$\frac{f(x) - T_n(f, x_0)(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = f^{(n+1)}(\xi)$$

per $n = 1$ è il teorema di Lagrange.
Supponiamo la tesi valida per n e sia f derivabile $n + 2$ volte.
Applicando il teorema di Cauchy alle funzioni $f(x) - T_{n+1}(f, x_0)(x)$ e $(x - x_0)^{n+1}$ otteniamo che esiste ξ nell'intervallo di estremi x_0 e x tale che

$$\frac{f(x) - T_{n+1}(f, x_0)(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f'(\xi) - T_{n+1}'(f, x_0)(\xi)}{(n + 1)(\xi - x_0)^n} = \frac{1}{n + 1} \frac{f'(\xi) - T_n(f', x_0)(\xi)}{(\xi - x_0)^n}$$

Ora f' è derivabile $n + 1$ volte da cui per ipotesi induttiva esiste ξ' nell'intervallo di estremi x_0 e ξ tale che

$$\frac{f'(\xi) - T_n(f', x_0)(\xi)}{(\xi - x_0)^n} = f^{(n+1)}(\xi)$$

da cui la tesi

Parte V
Integrale di Rieman

Definizione 11.5. Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, una **partizione** X è una sequenza finita $X = (x_0, \dots, x_n)$ tale che

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Definizione 11.6. Siano X, Y due partizioni, diciamo che X è un **raffinamento** di Y se accade $Y \subseteq X$

Definizione 11.7. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e $X = (x_0, \dots, x_n)$ una partizione di $[a, b]$. Definiamo la **somma superiore di f rispetto a X** come

$$S(f, X) = \sum_{k=1}^{n} L_k(x_k - x_{k-1}) \quad L_k = \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

similmente definiamo la **somma inferiore** come

$$s(f, X) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x_k - x_{k-1}) \quad l_k = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x)$$

Definizione 11.8. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata.
Definiamo **integrale superiore di f**

$$\overline{\int_a^b f\, dx} = \inf_{X \text{ partizioni di} [a,b]} S(f, X)$$

similmente **integrale inferiore di f**

$$\underline{\int_a^b f\, dx} = \sup_{X \text{ partizione di } [a,b]} s(f, X)$$

Se gli integrali superiori e inferiori coincidono, diciamo che f è **integrabile secondo Rieman** su $[a, b]$ e scriveremo

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Osservazione 9. Una definizione equivalente è la seguente.
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata si dice Rieman-integrabile se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists X \text{ partizione di } [a, b] \quad S(f, X) - s(f, X) \leq \varepsilon$$

Dimostriamo alcuni lemmi che "danno un senso" alla definizione di integrale

Lemma 11.14. *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata.*
Siano X, Y partizioni di $[a, b]$. Se X è un raffinamento di Y allora

$$s(f, Y) \leq s(f, X) \text{ \textit{le somme inferiori crescono aggiungendo punti}}$$

$$S(f, Y) \geq S(f, X) \text{ \textit{le somme superiori diminuiscono aggiungendo punti}}$$

Dimostrazione. Mostriamo il caso delle somme superiori, la tesi è equivalente a studiare come si comportano le somme aggiungendo un solo punto (se X è un raffinamento di Y, allora X contiene finiti punti non contenuti in Y), quindi non è restrittivo supporre $X = Y \cup \{\overline{x}\}$ ora $x \in [a, b]$ dunque esiste un certo k tale che $x_{k-1} < \overline{x} < x_k$ con $x_k, x_{k-1} \in Y$.
Sia

$$M_1 = \sup_{x_{k_1} \leq x \leq \overline{x}} f(x)$$

$$M_2 = \sup_{\overline{x} \leq x \leq x_k} f(x)$$

Chiaramente si ha $M_1, M_2 < L_k$ (in quanto si ha $L_k = \sup A$ e $M_1 = \sup B$ con $B \subseteq A$) dunque abbiamo

$$S(f,X) - S(f,Y) = (\overline{x} - x_{k-1})M_1 + (x_k - \overline{x})M_2 - (x_{k-1} - x_k)L_k = (\overline{x} - x_{k-1})(M_1 - L_k) + (x_k - \overline{x})(M_2 - L_k) \leq 0$$

dunque $S(f,X) \leq S(f,Q)$ □

Lemma 11.15. *Ogni somma superiore è maggiore o uguale di ogni somma inferiore.*

Dimostrazione. Siano X, Y due partizioni e consideriamo $X \cup Y$ ovvero la partizione che contiene tutti i punti di X e tutti i punti di Y

$$s(f, X) \leq s(f, X \cup Y) \leq S(f, X \cup Y) \leq S(f, Y)$$

dove chiaramente se le somma superiori e inferiori vengono fatte sulla stessa partizione, quelle superiori sono maggiori

Osservazione 10. Con l'ultimo lemma abbiamo mostrato che le somma superiori sono limitate inferiormente e quelle superiori sono limitate superiormente, dunque la definizione di Rieman-integrabile è ben posta

11.2 Classi di funzioni integrabili secondo Rieman

Teorema 11.16. *Le funzioni monotone sono integrabili secondo Riemann*

Dimostrazione. Mostriamolo nel caso che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sia crescente, chiaramente $f(b)$ è il massimo e $f(a)$ è il minimo, dunque f limitata.
Sia X una generica partizione, dalla monotonia segue

$$S(f, X)-s(f, X) = \sum_{k=1}^{n}[(x_k - x_{k-1})f(x_k)]-\sum_{k=1}^{n}[(x_k - x_{k-1})f(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})(f(x_k)-f(x_{k-1})$$

Se tutti gli intervalli hanno ampiezza δ allora

$$S(f, X) - s(f, X) = \delta \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \delta(f(b) - f(a))$$

dunque fissato $\varepsilon > 0$ la tesi segue ponendo $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

Teorema 11.17. *Le funzioni continue sono Rieman-integrabili*

Dimostrazione. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Essendo continua su un compatto è uniforme continua, dunque

$$\forall \eta > 0 \quad \exists \delta \quad |x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| \leq \ni$$

Fissata una partizione, osserviamo che L_k e l_k sono valori effettivamente raggiunti dalla funzione (per Weistrass ammette massimo e minimo), poniamo $l_k = f(m_k)$ e $L_k = f(M_k)$.
Allora se prendiamo una partizione X con punti consecutivi di distanza minore di δ si ha

$$S(f, X) - s(f, X) = \sum_{k=1}^{n}(x_{k-1} - x_k)(f(M_k) - f(m_k)) \leq \eta \sum_{k=1}^{n}((x_k - x_{k-1}) = \eta(b - a)$$

Ora l'ultima quantità è piccola a piacere, vista l'arbitrarietà di η □

Proposizione 11.18. *Un sottoinsieme$N \subseteq \mathbb{R}$ è trascurabile (ha misura nulla secondo Lesbegue) se e solo*

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\{I_n\}$ *successioni di intervalli con* $N \subseteq \bigcup I_n$ *e la lunghezza totale degli* I_n *minore di* ε

Osservazione 11. In $\mathbb{R}^n$ usiamo gli n-cubi

Teorema 11.19 (di Vitali-Lesbegue)**.**
Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ limitata e nulla al di fuori di un sottoinsieme limitato, allora è integrabile secondo Riemann se e solo se è l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla

11.3 Proprietà algebriche

Proposizione 11.20. *Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabile allora valgono i seguenti fatti:*

1. $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad \forall a < b < c$
2. $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \quad \forall \lambda$
4. $|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Lemma 11.21 (della media integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitata e integrabile. Posto*

$$m = \inf_{a \leq x \leq b} f(x) \quad M = \sup_{a \leq x \leq b} f(x)$$

si ha

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

inoltre se la funzione è continua, esiste un punto ξ compreso tra a e b tale che

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Dimostrazione. La partizione $X = (a, b)$ è una partizione di $[a, b]$ da cui per quanto abbiamo visto

$$s(X, f) = (b-a)m \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(X, f)(b-a)M$$

dove abbiamo usato solamente la caratterizzazione di estremo superiore ed inferiore.
Se la funzione è continua, per il teorema di Weistrass si ha che esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che $f(x_1) = m$ e $f(x_2) = M$.
Si conclude applicando il teorema dei valori intermedi

Teorema 11.22 (Fondamentale del calcolo integrale)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, la funzione* ***integrale*** *$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita come*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

è derivabile e si ha $F'(x) = f(x)$

Dimostrazione. Mostriamo che $F(x)$ è derivabile

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(x)\,dx$$

dunque per il lemma della media integrale esiste ξ_h compreso tra x e $x + h$, ora per $h \to 0$ si ha $\xi_h \to x$ dunque

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} f(\xi_h) = f(x)$$

Definizione 11.9. Sia f una funzione integrabile, definiamo una primitiva di f una qualsiasi funzione G tale che $G' = f$

Osservazione 12. Il teorema fondamentale del calcolo integrale dice che la funzione integrale è una primitiva di f.
Il prossimo teorema ci fornisce un modo per calcolare gli integrali conoscendo una primitiva

Lemma 11.23. *Siano G, H due primitive di f continua allora G e H differiscono per una costante*

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $g = G - H$ osserviamo che

$$g'(x) = G'(x) - H'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

dunque la funzione è costante (ogni punto è minimo e massimo locale) da cui $g(x) = a$ per ogni x da cui $G(x) = H(x) + a$

Teorema 11.24 (Secondo teorema fondamentale del calcolo). *Sia $f(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, allora*

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a)$$

dove G è una qualunque primitiva.

Dimostrazione. Dal primo teorema fondamentale del calcolo segue che la funzione integrale F è una primitiva ed inoltre

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

dove $F(a) = 0$.
Ora per il lemma precedente $F(x) = G(x) + k$ da cui

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = G(b) + k - G(a) - k = G(b) - G(a)$$

11.4 Metodi di integrazione

Proposizione 11.25 (Integrazione per parti)**.**

$$\int F(x)g(x)dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)dx$$

dove f, g sono continue e F, G sono rispettivamente le primitive

Dimostrazione. Dalla formula di integrazione delle funzioni composte

$$(F(x)G(x))' = F(x)g(x) + f(x)G(x)$$

integrando si ottiene la formula voluta

Proposizione 11.26 (Integrazione per sostituzione)**.**
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabile e sia g definita su un intervallo$[\alpha, \beta]$ a valori in $[a, b]$ tali che $f(\alpha) = a$ e $f(\beta) = b$ allora

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx$$

Dimostrazione. Sappiamo che

$$\int_a^b \phi(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

poniamo $\Phi(x) = G(F(x))$ abbiamo dunque che $\phi(x) = g(F(x))f(x)$ sostituendo si ottiene

$$\int_a^b g(F(x))f(x)dx = G(F(b) - G(F(a)) = [G(x)]_{F(a)}^{F(b)} = \int_{F(a)}^{F(b)} g(x)dx$$

11.5 Integrali impropri

Definizione 11.10. Sia $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Supponiamo che $\forall c < b$ la funzione f è integrabile su $[a, c]$ allora se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\, dx$$

diremo che f è integrabile in senso improprio e scriveremo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c \to b} \int_a^c f(x)\, dx$$

Se il limite è $+\infty$ diremo che l'integrale converge

Osservazione 13. Similmente a estremi invertiti, se l'integrale ha più problemi possiamo spezzarlo in integrali monoproblemi

11.5.1 Criteri di integrabilità

Proposizione 11.27. *Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ con $0 \leq f \leq g$ in un intorno di b*

$$\int_a^b g(x)\, dx \ \textit{converge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \ \textit{converge}$$

$$\int_a^b f(x)\, dx \ \textit{diverge} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx \ \textit{diverge}$$

Dimostrazione. Per ogni $c \in (a, b)$ per monotonia dell'integrale sappiamo

$$\int_a^c f(x)dx \leq \int_a^c g(x)dx$$

Passando al limite per $c \to b^-$ otteniamo

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b^-} f(x)dx \leq \lim_{x \to b^-} \int_a^c g(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

dall'ultima disuguaglianza discende la tesi

Proposizione 11.28. *Siano $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ positive in un intorno di b.*
Se $f \sim g$ allora $\int_a^b f(x)\, dx$ e $\int_a^b g(x)\, dx$ hanno lo stesso comportamente

Dimostrazione. Mostriamo solamente il caso in cui g abbia un integrale convergente.
Poichè $\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ per $x \to b^-$ esiste $c \geq a$ con

$$\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2} g(x) \text{ per } x \in [c, b)$$

dunque

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \geq \int_a^c f + \frac{1}{2} \int_c^b g$$

Ora $\int_c^b f$ è un numero, mentre $\frac{1}{2} \int_c^b g$ converge per ipotesi, dunque anche l'integrale di f è convergente

Proposizione 11.29 (confronto serie integrali)**.** *Sia $f : [n_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ limitata, debolmente decrescente e positiva allora*

$$\int_{n_0}^{+\infty} f(x)dx < +\infty \quad \implies \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) < +\infty$$

Definizione 11.11. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ si dice assolutamente integrabile se

$$\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$$

Proposizione 11.30. *Se f à assolutamente integrabile, è integrabile*

Dimostrazione. Definiamo $f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$ e $f^-(x) = -\min\{0, f(x)\}$.
Osserviamo che $f = f^+ - f^-$ dunque $|f| = f^+ + f^-$.
dunque se $|f|$ ha un integrale convergente, per confronto anche f^+ e f^- lo hanno da cui anche $f = f^+ - f^-$ ha un integrale convergente (somma di convergenti)

Proposizione 11.31 (Criterio di Dirichlet)**.** *Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tali che*

- *f è integrabile*
- *F è limitata in $[a, +\infty]$*
- *g è C^1*
- *g è definitivamente decrescente*
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$

Allora

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

converge

Dimostrazione. Basta integrare per parti e usare manipolazioni algebriche

$$\int_a^{\infty} f(x)g(x)dx = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)g(x)$$

Andiamo a studiare $\int_a^M f(x)g(x)$

$$\int_a^M f(x)g(x) = [F(x)g(x)]_a^M - \int_a^M F(x)g'(x)dx = F(M)g(M) - F(a)g(a) - \int_a^M F(x)g'(x)dx$$

Ora $F(M)g(M) \to 0$ per $M \to +\infty$ infatti F limitata e g infinitesima.
Mostriamo che l'ultimo integrale è assolutamente convergente

$$\int_A^m |F(x)g'(x)| \leq c \int_A^m |g'(x)|$$

dove abbiamo usato che $|F(x)| \leq c$ per ogni x (è limitata).
Ora g è decrescente dunque ha derivata prima negativa da cui

$$int_A^m |F(x)g'(x)| \leq -\int_a^M g(x)dx = g(a) - g(M) \to g(a) \text{ per } M \to +\infty$$

11.6 Funzione Gamma

Definiamo per ogni $x \in \mathbb{R}^+$

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Mostriamo che è una buona definizione, ovvero che l'integrale converge.
Osserviamo che la funzione è positiva, inoltre

$$\lim_{t+\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{t^2} \to 0$$

dunque

$$t^{x-1}e^{-t} \leq \frac{1}{t^2}$$

da cui in $+\infty$ l'integrale converge per ogni valore di x.
In 0 poichè $e^{-t} \sim 1$ si ha che l'integrale converge se $x > 0$ (confronto asintotico con t^{x-1}.
Tale funzione estende il fattoriale in quanto abbiamo

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{A \to +\infty} (-e^{-A} + e^0) = 1$$

osserviamo inoltre che se $x \in \mathbb{N}$ allora integrando per parti

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\, dt = \int_0^{\infty} nt^{n-1}e^{-t} - \lim_{A \to \infty} t^n e^{-t}\big]_0^{\infty} = n\Gamma(n)$$

dunque abbiamo mostrato che

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

11.7 Lunghezza di una curva

Definizione 11.12. Fissata una curva $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e fissata $X = (x_0, \ldots, x_n)$ partizione di $[a,b]$ chiamiamo **lunghezza di f rispetto a X** la quantità

$$L(f, X) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}$$

definiamo **lunghezza di f** la quantità

$$L(f) = \sup_{X \text{ partizione di } [a,b]} l(f, X)$$

Teorema 11.32. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 allora si ha*

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}$$

Dimostrazione. Fissiamo una partizione $X = (x_0, \ldots, x_n)$.
Per il teorema di Lagrange sappiamo che $\forall k \in \{1, \ldots n\}$ esiste $\xi_k \in (x_k, x_{k-1})$ tale che

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

dunque

$$(x_k - x_{k-1}) \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \sqrt{1 + f'(x)} \leq (x_k - x_{k-1})\sqrt{1 + f'(\xi_k)^2} \leq (x_k - x_{k-1}) \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} \sqrt{1 + f'(x)}$$

Ora
$$(x_k - x_{k-1})\sqrt{1+f'(\xi_k)^2} = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + f'(\xi_k)^2(x_k - x_{k-1})^2}$$
Supponiamo, dunque che X_ε sia una partizione dove

$$\max_{k\in\{1,\dots,n\}} x_k - x_{k-1} \leq \varepsilon$$

dalla disuguaglianza di sopra, sommando su k otteniamo

$$s(\sqrt{1+f'(x)^2}, X_\varepsilon) \leq L(f, X_\varepsilon) \leq S(\sqrt{1+f'(x)^2}, X_\varepsilon)$$

dunque passando al limite per $\varepsilon \to 0$ si ha

$$s(\sqrt{1+f'(x)^2}, X_\varepsilon) \to \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$

$$S(\sqrt{1+f'(x)^2}, X_\varepsilon) \to \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$

da cui per il teorema dei carabinieri si ha

$$L(f, X_\varepsilon) \to \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx$$

che è equivalente alla tesi

Parte VI
Equazioni differenziali

Teorema 11.33 (Esistenza e unicità).
Sia $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana in u uniformemente in t ovvero esiste $L > 0$ con

$$|f(t_1,u_1) - f(t_2,u_2)| \le L\,|u_1 - u_2|$$

allora per ogni scelta di $(x_0,u_0) \in [a,b] \times [c,d]$ esiste $\tau > 0$ tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(x) = f(x,u(x)) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $u \in C^1((x_0-\tau, x_0+\tau))$.
τ dipende solo da L e dal $\max f(t,u)$

Teorema 11.34 (di Peano).
Se f è solo continua allora la soluzione esiste ma non è unica

Proposizione 11.35. *Sia f come nelle ipotesi del teorema di esistenza e unicità e sia τ il massimo valore per cui u è soluzione in $x_0 + \tau$.*
Allora si possono verificare solamente 2 differenti possibilità

- $x_0 + \tau = b$
- $\lim_{x \to x_0+\tau} u(x) \in \{c,d\}$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo $x_1 = x_0 + \tau < b$ e $\lim_{x\to x_1} u(x) = u_1 \neq \{c,d\}$.
Allora per il teorema di esistenza e unicità esiste $\tilde{\tau} > 0$ tale che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v'(x) = f(x,v(x)) \\ v(x_1) = u_1 \end{cases}$$

ammette unica soluzione v definita su $(x_1 - \tilde{\tau}, x_1 + \tilde{\tau})$.
Dunque posso definire una soluzione in $(x_0 - \tau, x_0 + \tau + \tilde{\tau})$ (u, v coincidono nell'intersezione) il che è assurdo per la massimalità di τ □

Corollario 11.36 (Teorema dell'asintoto).
Sia $f : R \to \mathbb{R}$ localmente lipschitziana in u uniformemente in t allora la soluzione $u(x)$ per $x \ge x_0$ è

- *definita su ogni $x \ge x_0$ (esistenza globale)*
- *$\exists \tau$ massimale con*

  $$\lim_{x \to (x_0+\tau)^-} u(x) = \pm\infty$$

  ($u(x)$ ha un asintoto verticale in $x_0 + \tau$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che u non è definita globalmente, dunque $\exists \tau$ massimale ovvero $u(x)$ è definita in $(x_0, x_0+\tau)$ e si ha per la proposizione precedente

$$\lim_{x \to x_0+\tau} |u(x)| = \infty$$

ovvero si possono verificare 2 casi differenti

- $\lim_{x\to(x_0+\tau)^-} u(x) = \pm\infty$
- (la soluzione oscilla)
$$\limsup_{x\to x_0+\tau} u(x) = L_1 > \liminf_{x\to x_0+\tau} = L_2$$

Andiamo a mostrare che tale caso è assurdo, infatti in queste ipotesi, posso costruire una successione $x_n \to x_0+\tau$ con $u(x_n) \in [c,d]$ con $L_2 < c < d < L_1$.
Se considero il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v_n'(x) = f(x, v_n(x)) \\ v_n(x_0) = u(x_n) \end{cases}$$

ottengo che v_n è defínta su $(x_0, x_0+\tau_n)$.
Dal teorema di esistenza e unicità si ha che τ_n dipende solo da f dunque τ_n è costante.
Per n grandi ottengo dunque $x_0+\tau_n > x_0+\tau$ il che va contro la massimalità di τ $\square$

Definizione 11.13. Sia $u(x) : I \to \mathbb{R}$ di classe C^1 diciamo che u è

- sottosoluzione se $u'(x) \leq f(x, u(x))$ per $x \in I$
- soprasoluzione se $u'(x) \geq f(x, u(x))$ per $x \in I$

se la disuguaglianza è stretta si dicono rispettivamente sottosoluzione stretta e soprasoluzione stretta

Proposizione 11.37. *Sia f continua e siano u_1 sottosoluzione e u_2 soprasoluzione di cui almeno una stretta.*
Se esiste x_0 tale che $u_1(x_0) \leq u_2(x_0)$ allora $u_1(x) < u_2(x)$ per $x > x_0$.
Similmente se esiste x_0 tale che $u_1(x_0) \geq u_2(x_0)$ allora $u_1(x) > u_2(x)$ per $x < x_0$

Dimostrazione. Possiamo supporre senza perdere di generalità che $u_1(x_0) < u_2(x_0)$.
Se fosse $u_1(x_0) = u_2(x_0)$ allora

$$u_1'(x_0) \leq f(x_0, u_1(x_0)) = f(x_0, u_2(x_0)) \leq u_2'(x_0)$$

essendo almeno una delle due disuguaglianza strette si ha $u_1'(x_0) < u_2'(x_0)$ dunque $u_1(x) < u_2(x)$ in $(x_0, x_0+\delta)$.
Poniamo
$$\overline{x} = \sup\{x > x_0 \,|\, u_1(t) < u_2(t) \text{ per } t \in (x_0, t)\}$$
Negare la tesi equivale a supporre che $\overline{x} < +\infty$.
In tali ipotesi otteniamo che $u_1'(\overline{x}) \geq u_2'(\overline{x})$ il che è assurdo essendo una tra u_1 e u_2 stretta.
La disuguaglianza sopra mostrata deriva dal fatto che $v(x) = u_1(x) - u_2(x)$ è negativa per $x < \overline{x}$ e vale 0 in $\overline{x}$ dunque $v'(\overline{x}) \geq 0$ $\square$

Proposizione 11.38. *Se f è continua e localmente lipschitziana in u uniformemente in t. Allora se u_1 è una sottosoluzione e u_2 una soprasoluzione vale una ed una sola delle seguenti implicazioni*

- *$u_1(x_0) = u_2(x_0)$ allora $u_1(x) = u_2(x)$ per $x > x_0$*
- *$u_1(x_0) < u_2(x_0)$ allora $u_1(x) < u_2(x)$ per $x > x_0$*

- $u_1(x_0) > u_2(x_0)$ *allora* $u_1(x) > u_2(x)$ *per* $x < x_0$

in particolare vale se u_1 *e* u_2 *sono soluzioni*

Dimostrazione. Mostriamo che vale solamente nel caso siano soluzioni.
Consideriamo i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u_1'(x) = f(x, u(x)) \\ u_1(x_0) = u_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_2'(x) = f(x, u(x)) \\ u_2(x_0) = u_2 \end{cases}$$

- Se $u_1(x_0) = u_2(x_0)$ allora per unicità si ha $u_1(x) = u_2(x)$

- Possiamo definire come nella dimostrazione precedente

  $$\overline{x} = \sup\{x > x_0 \,|\, u_1(t) < u_2(t) \text{ per } t \in (x_0, x)\}$$

  come nella dimostrazione precedente se $\overline{x} < \infty$ allora si ha $u_1(\overline{x}) = u_2(\overline{x})$ e $u'(\overline{x}) = u_2'(\overline{x})$ dunque per unicità della soluzione ottengo $u_1(x) = u_2(x)$in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e ciò contro la definizione di $\overline{x}$

Proposizione 11.39 (Esistenza globale)**.**
Sia $u'(x) = f(x, u(x))$ *con* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continua e supponiamo*

$$|f(x, u)| \leq a(x) + b(x)\,|u(x)|$$

con a, b *continue e positive.*
Allora tutte le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $u(x)$ sia soluzione definita su (a, b) con $b < +\infty$ dunque per quanto osservato si ha

$$\lim_{x \to b^-} u(x) = \pm\infty$$

supponiamo $+\infty$ allora la funzione u in $(x_0 - \delta, x_0)$ risulta positiva e dunque

$$f(x, u(x)) \leq a(x) + b(x) \cdot u(x)$$

e aumentando a o b possiamo considerare la disuguaglianza stretta.
Per $(b - \delta, b)$ sia v la soluzione di

$$\begin{cases} v'(x) = a(x) + b(x)u(x) \\ v(x_0) = u(x_0) \end{cases}$$

$v(x)$ è una soprasoluzione stretta di $u' = f(x, u)$ inoltre v è definita globalmente (si scrive in modo esplicito).
Per confronto otteniamo $u(x) \leq v(x)$ per $x > x_0$ in particolare u non può avere un asintoto verticale in $x = b$ il che è assurdo $\square$

11.8 Equazioni lineri

Proposizione 11.40. *Le soluzioni di un equazione lineari omogenea di grado n formano uno spazio vettoriale di dimensione n*

Dimostrazione. Consideriamo u_1, u_2 soluzioni allora

$$(\alpha u_1 + \beta u_2)' = \alpha u_1' + \beta u_1' = A(x)(\alpha u_1 + \beta u_2)$$

Andiamo a costruire una base. Sia x_0, e andiamo a definire u_i come la soluzione di

$$\begin{cases} u_i' = A(x)u \\ u_i(x_0) = e_i \end{cases}$$

Osserviamo che sono n soluzioni linearmente indipendenti, resta da mostrare che generano. Sia $u : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbb{R}^n$ una soluzione allora si ha che esistono $a_i \in \mathbb{R}$ con

$$u(x_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

Sia

$$\overline{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x)$$

osserviamo che $\overline{u}$ è soluzione di

$$\begin{cases} \overline{u}'(x) = A(x)u(x) \\ \overline{u}(x_0) = u(x_0) \end{cases}$$

Per unicità di u e $\overline{u}$ si conclude che $u = \overline{u}$ □

Proposizione 11.41. *Le soluzioni di un equazione lineari non omogenea di grado n formano uno spazio affine di dimensione n*

Dimostrazione. Se u_1, u_2 sono soluzioni allora $u_1 - u_2$ è soluzione dell'omogenea.
Dunque tutte le soluzioni di $u' = A(x)u + b$ si scrivono

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i(x) + u_p(x)$$

dove u_i formano una base delle soluzioni dell'omoegenea e u_p è una qualunque soluzione della non omogenea □