APPUNTI DI ALGEBRA LINEARE
CORSO DEL PROF. KIERAN O'GRADY
ROMA "LA SAPIENZA" - A.A. 2008/2009

MATTEO DUNEZ

Indice

1. Lunedì 29.9.2008 - Introduzione

I problemi che studieremo saranno:

(1) geometria di rette, piani, etc;
(2) soluzioni di sistemi di equazioni lineari del tipo

slin (1)
$$\begin{cases} x+y+z=m \\ 2x-y+3z=n \\ 4x+y+9z=p \end{cases}$$

dove m, n, p sono numeri assegnati ed x, y, z sono le incognite;
(3) relazioni tra i primi due problemi.

Inoltre ci chiederemo se esistono incognite tali che valga (1) e, in caso positivo, quante ve ne sono.

Definizione 1.1 (Segmento orientato). *Un segmento orientato in un piano π è una coppia ordinata di punti $p, q \in \pi$ ed è denotato come $\overrightarrow{pq}$.*

Definizione 1.2 (Segmenti equipollenti). *Posti $\overrightarrow{pq}$ e $\overrightarrow{rs}$ segmenti orientati, essi si dicono equipollenti se:*

(1) *$d(p, q) = d(r, s)$;*
(2) *la retta $\overline{pq}$ è parallela alla retta $\overline{rs}$;*
(3) *i versi di percorrenza delle due rette sono equivalenti;*

Definizione 1.3 (Vettore). *Un vettore nel piano è individuato da un segmento orientato; inoltre segmenti orientati equipollenti individuano lo stesso vettore.*

2. Proprietà geometriche dei vettori nel piano

Definizione 2.1 (Somma di vettori). *La somma di due vettori è data da*

$$\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr} \tag{2}$$

inoltre se si hanno due vettori v e w nel piano, individuati rispettivamente dai segmenti orientati $\overrightarrow{pq}$ e $\overrightarrow{p'q'}$, allora il vettore somma $v + w$ è individuato da $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{p'q'}$. Infine se si sceglie un altro segmento orientato che individui v si ottiene un altro segmento orientato equipollente al primo.

Definizione 2.2 (Moltiplicazione per uno scalare). *Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e v un vettore. Definiamo il vettore λv nel modo seguente: preso $\overrightarrow{pq}$ il segmento orientato che individua v allora*

$$\lambda\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr} \tag{3}$$

con r tale che

(1) *r appartiene alla retta che contiene $\overrightarrow{pq}$;*
(2) *$d(p, r) = |\lambda| \cdot d(p, q)$;*
(3) *il verso di percorrenza di $\overrightarrow{pr}$ è lo stesso di $\overrightarrow{pq}$ se $\lambda > 0$e quello opposto se $\lambda < 0$.*

Inoltre se $\lambda = 0$ oppure $p = q$ allora $r = p$.

prop **Definizione 2.3.** *Si ha che $\underline{0}$ è il vettore nel piano individuto da $\overrightarrow{pp}$. $-v$ è individuato da $\overrightarrow{qp}$ inoltre si ha che:*

(1) *$\underline{0} + v = v$;*
(2) *$\underline{0} + v = v + \underline{0} = v$*
(3) *$v + w = w + v$;*
(4) *$(u + v) + w = u + (v + w)$;*
(5) *$v + (-v) = \underline{0}$;*
(6) *$0v = \underline{0}$;*
(7) *$1v = v$;*
(8) *$(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$;*
(9) *$(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$;*
(10) *$\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$;*

Definizione 2.4 (Spazio vettoriale). *Uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ è un insieme V dotato di due operazioni ossia la somma e il prodotto per uno scalare:*

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow V \qquad & \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (v, w) &\longmapsto v + w \qquad & (\lambda, v) &\longmapsto \lambda v \end{aligned} \tag{4}$$

tali che valgano le proprietà della definizione (2.3).

Esempio 2.1. *Si ha che* $\mathbb{R}^n$ *è l'insieme i cui elementi sono le n-uple ordinate di numeri reali.*
Siano $x, y \in \mathbb{R}$ *dove* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ *ed* $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ *e sia* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Allora si ha che*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

e quindi tle insieme è uno spazio vettoriale.

Definizione 2.5 (Sottocampo). *Un* $K \in \mathbb{C}$ *è un sottocampo se si ha:*

(1) *esistenza di* 0 *e* 1 *ossia* $o, 1 \in K$;
(2) *esistenza dell'opposto ossia* $z, w \in K \Rightarrow (z - w) \in K$;
(3) *esistenza dell'inverso ossia* $z, w \in K$ *con* $w \neq 0 \Rightarrow \frac{z}{w} \in K$.

Esempio 2.2. $K = \mathbb{R}$;
$K = \mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

Introdurremo adesso le definizioni di sottospazio vettoriale e combinazione lineare di vettori mostrandone alcuni esempi.

Definizione 2.6 (Combinazione lineare). *Sia* $V = S.V./K$ [1] *con* $v_1, \dots, v_n \in V$. *Allora il vettore* $v \in V$ *è combinazione lineare dei* v_i *se esistono dei* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ *tali che* $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Esempio 2.3. *Sia* $V = \mathbb{R}^3$ *e siano* $v_1 = (1, 2, 0)$ *e* $v_2 = (3, 1, 0)$. *Il vettore* $v = (4, 3, 0)$ *si scriverà come combinazione lineare dei precedenti e si ha* $v = v_1 + v_2$.

Definizione 2.7 (Sottospazio vettoriale). *Dato uno spazio vettoriale* V *allora* $W \subset V$ *è un sottospazio vettoriale se:*

(1) $\underline{0} \in W$;
(2) $v, w \in W \Rightarrow vw \in W$;
(3) $v \in W,\ \lambda \in K \Rightarrow \lambda v \in W$.

Esempio 2.4. $W = \{$*vettori paralleli ad una retta data*$\}$ *è un sottospazio;*
$V = \{v | v$ *ha lunghezza 1*$\}$ *non è un sottospazio.*

Continuiamo con la definizione di dipendenza lineare e con l'importante nozione di base di uno spazio vettoriale. Per farlo introduciamo la notazione atta ad indicare il sottospazio generato da dei vettori: $< v_1 \dots v_n >:= \{\lambda_i v_i\}$.

Definizione 2.8 (Dipendenza lineare). *Siano* $v_1, \dots, v_n \in V$ *con* $V = S.V./K$. *Tali vettori si dicono linearmente dipendanti se* $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ *non tutti nulli, tali che*
$\underline{0} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.

Definizione 2.9 (Base). *Siano* $v_1, \dots, v_n \in V$. *Essi costituiscono una base se:*

(1) *sono linearmente indipendenti;*
(2) $V =< v_1 \dots v_n >$.

3. Lunedì 6.10.2008 - Teoremi su basi e combinazioni lineari

th1 **Teorema 3.1.** *Data una sequenza* $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ *di vettori linearmente indipendenti, allora, le sottosequenze lo sono anch'esse.*

Dimostrazione. Supponiamo che i v_i siano linearmente dipendenti. Allora $\exists i$ tale che $1 \leq i \leq n$ ed un $v_i \in < v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n >$. Quindi senza di esso si ha che $\underline{0} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ e quindi c'è un $\lambda_i \neq 0$ tale che $\lambda_i v_i = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \dots + \lambda_n v_n$. Infine allora $v_i = \lambda_i^{-1}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) = \underline{0}$ □

Osserviamo che se $\mathcal{B} = \{v_1 \dots v_n\}$ è una base di V, dato un vettore $v \in V$, esso si scriverà come combinazione lineare dei vettori della base, quindi i coefficienti λ_i saranno univocamente determinati dal vettore stesso.

[1] Tale notazione sta ad indicare uno spazio vettoriale con scalari in un generico campo K.

Infatti, se per assurdo così non fosse, supponendo di avere $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ ed anche $v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n$ allora

$$\underline{0} = v - v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) v_i$$

con la quantità tra parentesi nulla per via dell'indipendenza lineare. Così facendo troviamo l'assurdo e quindi i coefficienti sono unici.
Adesso un importante

Teorema 3.2. *Sia $V = S.V./K$ e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V. Allora $|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}'|$ ed inoltre $\dim_K V = |\mathcal{B}|$.*

4. Mercoledì 8.10.2008

Diamo ora la definizione di spazio finitamente generato.

Definizione 4.1 (Spazi finitamente generati). *Uno spazio vettoriale V è finitamente generato se $\exists\, v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ tali che $V =< v_1 \dots v_n >$.*

Lemma 4.1. *Se V, spazio vettoriale, è finitamente generato allora ammette una base finita. Viceversa se V possiede una pase finita allora è finitamente generato.*

Dimostrazione. Il viceversa è ovvio. Supponiamo che V sia finitamente generato. Ciò significa che $V =< v_1 \dots v_n >$. Affinchè sia una base resta da mostrare che tali vettori siano linearmente indipendenti. Se così non fosse, $\exists\, 1 \leq i \leq n$ tale che $v_i \in < v_1 \dots v_n >$. Cambiando gli indici assumiamo $i = n$. Allora $V =< v_1 \dots v_{n-1} >$ e possiamo eliminare il v_i con $\lambda \neq 0$ per mutare la combinazione lineare da linearmente dipendente ad indipendente. □

propa **Proposizione 4.1.** *Sia V finitamente generato. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_m\}$ base di V e siano $w_1, \dots, w_n$ vettori linearmente indipendenti. Allora $n \leq m$.*

Dimostrazione. Partiamo dal caso $m = 1$. Allora $\mathcal{B} = \{v\}$ e supponiamo, per assurdo, che $n > 1$. Quindi avremo dei $w_1, \dots, w_n$ linearmente indipendenti ossia esiste $\lambda \in K$ tale che $w_1 = \lambda v$ e i $\lambda_i \neq 0$. Allora $v = \lambda_1^{-1} w_1$ ed inoltre $V =< w_1 >$. Di conseguenza si dovrà avere che $w_2 = \theta w_1$ ossia i due vettori sono linearmente dipendenti. Assurdo perchè le sottosequenze devono essere linearmente indipendenti per il teorema (3.1).
Passiamo ora al caso $m = 2$, supponendo sempre $n > 2$. Adesso avremo $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$. Siano $w_1, \dots, w_n$ linearmente indipendenti. Allora $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in K$ tali che $w_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, ma poichè $w_1 \neq 0$ allora almeno uno dei due $\lambda_i \neq 0$. Possiamo assumere $\lambda_1 \neq 0$.

a1
$$\lambda_1 v_1 = w_1 - \lambda_2 v_2 \Longrightarrow v_1 = \lambda_1^{-1}(w_1 - \lambda_2 v_2) \tag{5}$$

Quindi $V =< w_1, v_2 >$ infatti $v_1 \in < w_1, v_2 >$ per la (5) e v_2 per definizione. Siccome $V =< v_1, v_2 >$ ne consegue che $\exists\, \theta_1, \theta_2 \in K$ tali che $w_2 = \theta_1 v_1 + \theta_2 v_2$ con $\theta_2 \neq 0$. Questo perchè, se così non fosse, w_1 e w_2 sarebbero linearmente dipendenti. E' assurdo quindi $v_2 = \theta_2^{-1}(w_2 - \theta_1 w_1)$ quindi il sottospazio generato da $< w_1, v_2 > \subset < w_1, w_2 >$. E così via per n arbitrario. □

Osservazione 4.1.
1. *Se $V =< v_1 \dots v_n > \Rightarrow \exists\, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_k \leq \cdots \leq n$ tali che $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\}$ è una base per V. Da ciò segue che la cardinalità della base può essere al più uguale alla dimensione dello spazio vettoriale;*
2. *se $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti allora $\exists\, v_{n+1}, \dots, v_m$ tali da formare una base di V, a patto comunque che essi generino.*

5. Operazioni tra sottospazi e formula di Grassmann

Siano $U, W \in V$ sottospazi. Allora $U \cap W$ è ancora un sottospazio? Si ha che $\underline{0} \in U, W \Rightarrow \underline{0} \in U \cap W$ e se due vettori v_1, v_2 stanno nello spazio intersezione allora stanno nei singoli spazi, per cui $U \cap W$ è un sottospazio vettoriale.
Al contrario $U \cup W$ in genere non è un sottospazio, a meno che i singoli sottospazi non siano già incapsulati uno all'interno dell'altro. Infine, posto $U + W := \{u + w | u \in U, w \in W\}$, si ha che esso è un sottospazio perchè $\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}$ ed anche $(u_1 + w_1) - (u_2 + w_2) = (u_1 - u_2) + (w_1 - w_2)$. Rendiamo rigoroso il tutto con la seguente

Definizione 5.1 (Somma diretta). *$U + W$ è la somma diretta dei due sottospazi se $U \cap W = \{\underline{0}\}$.*

Introduciamo adesso una formula utile per calcolare la dimensione dei sottospazi, la formula di Grassmann.

grass **Teorema 5.1.** *Sia $K \in \mathbb{C}$ e sia $V = S.V./K$ finitamente generato. Supponiamo che $U, W \subset V$ siano suoi sottospazi. Allora si ha che*

f1
$$\boxed{\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)} \tag{6}$$

dove l'ultimo termine è nullo nel caso si tratti di una somma diretta.

Dimostrazione. Siano $\{v_1, \ldots, v_n, u_1, \ldots u_a\}$ base di U ed $\{v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots w_b\}$ base di W. E' immediato osservare che $\dim U = n + a$, $\dim W = n + b$ ed infine $\dim(U \cap W) = n$. □

6. Giovedì 9.10.2008 - Matrici

Definizione 6.1. *Una matrice $m \times n$ a valori in K è un'applicazione*

$$\begin{aligned} A : \{(i, j)|1 \le i \le m, 1 \le j \le n\} &\longrightarrow K \\ (i, j) &\longmapsto a_{ij} \end{aligned}$$

e si indica con

matrix
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

Si hanno le matrici riga ossia $1 \times n$ e le matrici colonna $m \times 1$ e si indicano rispettivamente come

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

inoltre si usa la seguente notazione: A_i = i-esima riga di A ed A^j =j-esima colonna di A. Sia ora A una matrice $n \times m$ e B una matrice colonna; si ha che $x = (x_1, \ldots, x_n)$ è soluzione di

line
$$Ax = B \tag{8}$$

solo se $x_1 A^1 + x_2 A^2 + \cdots + x_n A^n = B$.

Definizione 6.2. *Il sistema (8) si dice sistema di equazioni lineari omogeneo se $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.*

Si osservi che l'insieme delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogeneo, ossia

$$\mathcal{S} = \{Sol\} := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 A^1 + \cdots + x_n A^n = \underline{0} \right\}$$

è un sottospazio vettoriale di K^n perchè $\underline{0} \in \mathcal{S}$ e se $x, y \in \mathcal{S} \Rightarrow x + y \in \mathcal{S}$.

Proposizione 6.1. *Se (8) è un sistema lineare omogeneo ed $m < n$ allora esso possiede soluzioni non banali.*

Dimostrazione. Siccome $m < n$ allora i vettori A^i sono linearmente dipendenti per la proposizione (4.1). □

Da qui in poi supporremo sempre, per comodità, $K \subseteq \mathbb{C}$. Introduciamo il seguente tipo di matrici con la

Definizione 6.3 (**Matrici a scala**). *Una matrice A di dimensioni $n \times m$ è detta a scala se è della forma*

scala

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

A cosa ci servono queste matrici? Bè, se la matrice A associata a (8) è a scala, allora il problema di trovare soluzioni non banali si risolve facilmente. Questo perchè con una serie di operazioni elementari, che vedremo a breve, troviamo un sistema a scala con le stesse soluzioni di (8).

7. Lunedì 13.10.2008 - Eliminazione di Gauss

Abbiamo il sistema

lin2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{10}$$

con i coefficienti $a_{ij} \in M$. La si ridurrà a scala attraverso le seguenti operazioni elementeri:

(1) scambio di righe;
(2) moltiplicazione di riga per uno scalare $\lambda \neq 0$;
(3) aggiunta ad una riga un multiplo di un'altra purchè $i \neq j$.

Si ha adesso il problema di trovare, dati $v_1, \dots, v_m \in K^m$, una base del sottospazio $W \subset K^m$ dove $W =< v_1 \dots v_m >$. Trovare la risposta è abbastanza semplice: sia A la matrice $m \times n$ le cui righe sono i vettori A_i. Osserviamo che se A viene modificata attraverso le precedenti operazioni elementari e diventa la matrice a scala B allora $< A_1 \dots A_m >=< B_1 \dots B_m >$. Si dimostra notanto che

(1) ovvio;
(2) si può avere
$$B_i = \begin{cases} A_i & \text{se } i \neq i_0 \\ \lambda A_i & \text{se } i = i_0 \end{cases}$$
così si ha nel primo caso che ogni generatore del primo insieme è contenuto nel secondo insieme e nel secondo caso che ogni generatore del secondo insieme è contenuto nel primo;
(3) sostituiamo A_{i_0} con λA_{i_1} se $i_0 \neq i_1$. Bisogna vedere se A_{i_0} sta nel secondo insieme di generatori. In effetti ci sta perchè $A_{i_0} = (A_{i_0} + \lambda A_{i_1}) - \lambda A_{i_1}$ ed entrambi i termini a secondo membro appartengono al secondo insieme di generatori.

Osserviamo infine che se S è una matrice a scala, con $m > n$, allora una base di $W =< S_1 \dots S_n >$ è data dalel righe non nulle di S. Questo si ha perchè $< S_1 \dots S_k >=< S_1 \dots S_m >$ (con $k \leq m$) e perchè le k righe sono linearmente indipendenti. Enunciamo il tutto nella seguente

Proposizione 7.1. *Supponiamo di trasformare la matrice A in S attraverso delle operazioni elementari. Siano $S_1, \dots, S_k$, dove $k \leq m$, le righe non nulle di S. Allora $\{S_1 \dots S_k\}$ costituisce una base di $< A_1 \dots A_m >$ ed in particolare si ha che*

$$\dim < A_1 \dots A_m >= k.$$

Esempio 7.1.

Determinare

$$\dim < (1, 0, 3, -4), (0, 1, -1, 0), (3, -1, -1, 1), (1, -1, -2, 2) > .$$

Si ha la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & -1 & -10 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siam oarrivati alla seconda matrice sottraendo alla seconda riga la prima, poi alla terza tre volte la prima. Adesso partendo da quest'ultima matrice arriveremo alla prossima sottraendo alla terza riga la seconda e sommando la seconda alla quarta così da avere

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'ultima matrice, a scala finalmente, si è avuta moltiplicando per $-\frac{6}{5}$ la terza riga e sommandola alla quarta. Adesso scopriamo che la dimensione del sottospazio generato dai quattro vettori iniziali è 3 e che le righe non nulle costituenti l'ultima matrice formano una possibile base per tale spazio.

8. Proprietà algebriche e operazioni tra matrici

Si ha lo spazio $M_{m,n}(K) := \{\text{matrici } m \times n \text{ a valori in } K\}$ che è un K-spazio vttoriale dove lo $\underline{0}$ è la matrice identicamente nulla. Sono definite le seguenti operazioni:

(1) somma di matrici

$$\begin{aligned} M_{m,n}(K) \times M_{m,n}(K) &\longrightarrow M_{m,n}(K) \\ (A, B) &\longmapsto A + B \end{aligned}$$

con $(a+b)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$;

(2) moltiplicazione per uno scalare

$$\begin{aligned} K \times M_{m,n}(K) &\longrightarrow M_{m,n}(K) \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda A \end{aligned}$$

con $(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}$;

(3) moltiplicazione tra matrici

$$\begin{aligned} M_{m,n}(K) \times M_{n,p}(K) &\longrightarrow M_{m,p}(K) \\ (A, B) &\longmapsto AB \end{aligned}$$

dove si faccia attenzione al fatto che in numero di colonne della prima matrice deve essere uguale al numero di riche della seconda; inoltre i coefficienti della matrice prodotto saranno del tipo

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

con $1 \leq i \leq m$ ed $1 \leq k \leq p$.

Vediamo ora alcune proprietà di cui godono tali operazioni. Innanzitutto la moltiplicazione per uno scalare $\lambda \in K$ con una matrice $A \in M_{m,n}(K)$ è commutativa ossia $\lambda A = A\lambda$; se $A \in M_{m,n}(K)$ ed $B, C \in M_{n,p}(K)$ allora vale la proprietà distributiva ossia $A(B+C) = AB + AC$. Infine osserviamo che, in genere, per $n \geq 2$ il prodotto tra matrici non gode della commutatività ossia $AB \neq BA$.

9. Matrci e Applicazioni lineari

Soffermiamoci ancora sul prodotto tra matrici al fine di verificare l'associatività. Siano $A \in M_{m,n}(K)$, $B \in M_{n,p}(K)$ e $C \in M_{p,q}(K)$. Vogliamo verificare che $(AB)C = A(BC)$. Poniamo $AB := D = d_{ik}$. Allora avremo

$$DC := (dc)_{ih} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik} c_{kh} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) c_{kh} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} a_{ij} b_{jk} c_{kh}.$$

Invece adesso si ha

$$(BC)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} b_{ik} c_{kj} \Longrightarrow A(BC)_{sj} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ik} c_{kj} \right) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq k \leq p}} a_{si} b_{ik} c_{kj}$$

e quindi è palese la coincidenza tra le due scritture.

Torniamo adesso alla ricerca di soluzioni per sistemi di equazioni lineari del tipo $Ax = B$

con $A = (a_{ij})$ matrice fissata e B vettore colonna variabile. Per capire di che tipo saranno le x soluzione di un tale sistema bisogna studiare l'applicazione

applin
$$\begin{aligned} K^n &\xrightarrow{L_A} K^m \\ x &\longmapsto Ax \end{aligned} \tag{11}$$

Inziamo a farlo introducendo la definizione di applicazione lineare.

Definizione 9.1 (Applicazione lineare). *Un'applicazione $f : A \longrightarrow B$ è una legge che ad ogni $a \in A$ associa $f(a) \in B$.*
Siano V, W degli S.V./K e sia $f : V \longrightarrow W$. Allora essa è lineare se $\forall v_1, v_2 \in V$ e $\forall \lambda \in K$ si ha che

alin
$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) \tag{12}$$

Esempio 9.1. *Sia $L_A(x) = Ax$. Essa è lineare poichè $L_A(x + y) = L_A(x) + L_A(y) = Ax + Ay$. Al contrario sia per esempio*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y^2) \end{aligned} .$$

Si ha che $f(\lambda(x, y)) = f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x, \lambda^2 y^2) \neq (\lambda x, \lambda y^2) = \lambda(x, y^2) = \lambda f(x, y)$.

Osserviamo che se $f : V \longrightarrow W$ è lineare allora $f(\underline{0}v) = \underline{0}w$ ossia deve mandare il vettore nullo in se stesso. Di conseguenza un'applicazione del tipo $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $f(x, y) = (x + 1, y)$ non è un'applicazione lineare dato che $f(0, 0) = (1, 0)$.

Proposizione 9.1. *Siano V, W degli S.V./K e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di V. Allora, dati $w_1, \dots, w_n \in W$ esiste una e una sola $f : V \longrightarrow W$ lineare e tale che $f(v_i) = w_i \, \forall i$.*

Dimostrazione. Supponiamo, senza imostrarlo, che f esista e dimostriamo la sua unicità. Sia $v \in V$. Esisteranno $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ tali che $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$. Questi scalari sono unici dato che si tratta delle coordinate di v nella base $\mathcal{B}$. Allora si avrà

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i.$$

Quindi f può essere definita in questo modo e di conseguenza è lineare. □

LA **Corollario 1.** *Sia $f : K^n \longrightarrow K^m$. Allora esiste $A \in M_{m,n}(K)$ tale che $f = L_A$.*

10. Giovedì 16.10.2008 - Risultati sulle applicazioni lineari

Supponiamo di avere $f : U \longrightarrow V$ e $g : V \longrightarrow W$ lineari. Allora $g \circ f$ è lineare. Si dimostra facilmente con i seguenti calcoli:

$$\begin{aligned} g \circ f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= g(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) = g(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) = \\ &= \lambda_1 g(f(v_1)) + \lambda_2 g(f(v_2)) = \lambda_1 g \circ f(v_1) + \lambda_2 g \circ f(v_2) \end{aligned}$$

Con il prossimo esempio espliciteremo il legame tra composizione di applicazioni lineari e prodotto tra matrici. Questo non dovrà sorprendere dato che, come visto nel corollario (1) ogni aplicazione lineare è in ultima analisi rappresentabile per mezzo di una matrice.

Esempio 10.1. *Siano $B \in M_{m,n}(K)$ e $A \in M_{p,m}(K)$ e si abbia la seguente situazione:*

$$K^n \xrightarrow{L_B} K^m \xrightarrow{L_A} K^p$$

con $x \mapsto Bx = y \mapsto Ay$. Vogliamo verificare che l'applicazione lineare $L_C = L_A \circ L_B : K^n \longrightarrow K^p$ sia riconducibile ad una matrice $C \in M_{p,n}(K)$ tale che $C = AB$. Si ha

$$L_A \circ L_B(x) = L_A(L_B(x)) = L_A(Bx) = A(Bx) = (AB)x = L_{AB}(x) = Cx$$

Adesso un pò di notazioni: siano A, B degli insiemi qualsiasi ed $f : A \longrightarrow B$ un'applicazione lineare tra essi. Essa si dice

- *iniettiva* se $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$;
- *suriettiva* se $Im(f) = B$;
- *biunivoca* se è sia iniettiva che suriettiva.

Osserviamo che f è biunivoca se e solo se esiste un'altra $g : B \longrightarrow A$ tale che $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$.

Definizione 10.1 (**Isomorfismi**). *Un isomorfismo tra spazi vettoriali V e W è un'applicazione lineare $f : V \longrightarrow W$ tale che esiste una $g : W \longrightarrow V$ e tali che $f \circ g = 1_W$ e che $g \circ f = 1_V$. Questo significa richiedere che f sia lineare e biunivoca.*

Esempio 10.2. *Sia V tale che $\dim V = n$. Mostreremo che V è isomorfo a K^n ossia che $V \simeq K^n$.*
Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di V e poniamo l'applicazione

$$\begin{array}{c} K^n \xrightarrow{f} V \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longmapsto (\lambda_1 v_1, \ldots, \lambda_n v_n) \end{array} .$$

Bisoga mostrare che si tratta di un isomorfismo ossia che è lineare e biunivoca. Il fatto che sia lineare è evidente. Dimostrare la biunivocità significherà mostrare che f sia iniettiva e suriettiva.
Se $f(x_1 \ldots x_n) = f(y_1 \ldots y_n)$ allora

$$\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \Longrightarrow x_i = v_i \, \forall i$$

perchè i v_i sono nella base e per definizione sono linearmente indipendenti. Quindi f è iniettiva. Infine, è anche suriettiva ossia $Im(f) = V$ perchè $V =< v_1 \ldots v_n >$.

E' il momento di richiamare alcune nozioni di algebra che a breve ci torneranno utili.

Definizione 10.2. *Sia A un insieme. Allora una relazione tra gli elementi di A è un sottoinsieme $R \subset A \times A$. Si ha che $a \overset{R}{\sim} b$ se $(a, b) \in R$.*

Definizione 10.3 (**Relazione d'equivalenza**). *Una relazione R è di equivalenza se:*

(1) *è* **riflessiva** *ossia $\forall a \in A$ si ha $a \overset{R}{\sim}$;*
(2) *è* **simmetrica** *ossia $a \overset{R}{\sim} b \Rightarrow b \overset{R}{\sim} a$;*
(3) *è* **transitiva** *ossia se $a \overset{R}{\sim} b$ e $b \overset{R}{\sim} c$ allora $a \overset{R}{\sim} c$.*

Definizione 10.4 (**Classi di equivalenza**). *Dato $x \in A$ definiamo la classe di equivalenza di x come $[x]$ossia $\{y \in A | x \overset{R}{\sim} y\} \subset A$.*

11. Lunedì 20.10.2008 - Isomorfismi ed Endomorfismi

Una conseguenza immediata del fatto che due spazi vettoriali siano isomorfi è che essi abbiano la stessa dimensione. Diamo adesso una nuova definizione che ci servirà ad affrontare un nuovo problema.

Definizione 11.1 (**Endomorfismo**). *Sia V uno S.V./K. Un endomorfismo di V è un'applicazion lineare $f : V \longrightarrow V$.*

Poichè sappiamo che $V^n \overset{\sim}{=} K^n$ lo studio degli endomorfismi di V^n in se stesso si riduce allo studio delle $f : K^n \longrightarrow K^n$. La cosa più importante è capire quando si tratta di un isomorfismo. Ancora una volta le matrici fanno al caso nostro: supporremo di prendere $f = L_A$ con $A \in M_{n,n}(K)$.

Teorema 11.1. *L_A è un isomorfismo se e solo se $A^1, \ldots, A^n$ (colonne di A) sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Cominciamo dimostrando il viceversa, quindi, supponendo che le colonne di A siano linearmente indipendenti. La cosa da mostrare è ch L_A sia un iomorfismo. La linearità si ha per costruzione. Resta la biunivocità. L_A è iniettiva? Prendiamo $x, y \in K^n$ tali che $Ax = Ay \Rightarrow Ax - Ay = \underline{0} \Rightarrow A(x - y) = \underline{0}$ con $(x - y)$ matrice colonna. In termini di righe significa che $A_1(x_1 - y_1) + \cdots + A_n(x_n - y_n) = \underline{0}$ ma siccome la soluzione del sistema è non banale allora deve esser necessariamente $x_i - y_i = 0 \, \forall i$ e quindi L_A è iniettiva. Per la surittività basta osservare che $K^n =< A^1 \ldots A^n >$ e che prendendo le colonne come elementi della base si ha $|\mathcal{B}| = n$.
Dimostriamo ora l'altro verso dell'enunciato. Supponiamo che L_A sia un isomorfismo. Se per assurdo le A^i non fossero linearmente indipendenti avremmo che $K^n =< A^1 \ldots A^n >$ ma al contempo esisterebbe una base con un numero strettamente minore di elementi, il che è assurdo. $\square$

Corollario 2. *L_A è un isomorfismo se e solo se $A_1, \dots, A_n$ (righe di A) sono linearmente indipendenti.*

Definizione 11.2 (Rango). *Sia $A \in M_{m,n}(K)$. Il rango per righe di A è la dimensione del sottospazio da esse generato ossia* $\dim < A_1 \dots A_m >$ *mentre il rango per colonne è* $\dim < A^1 \dots A^n >$. *Essi si indicano rispettivamente con $Rg_r(A)$ ed $Rg_c(A)$.*

Premettiamo al prossimo teorema il seguente esempio.

Esempio 11.1. *Sia*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi scopriamo che $Rg_r(A) = 2$. Ora ci calcoliamo il rango per colonne: basta applicare le solite operazioni elementari alla trasposta A^T.

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

così da trovare, finalmente, che $Rg_c(A) = 2 = Rg_r(A)$. Ci sarà un motivo per tale sospetta coincidenza?

Per capire perchè quello che abbiamo visto nel precedente esempio non deve sorprendere, abbiamo bisogno di passare per alcune definizioni e risultati alquanto importanti.

nuc_im **Definizione 11.3 (Nucleo e immagine).** *Sia $f : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tra sottospazi vettoriali. Si hanno l'immagine e il nucleo di f ossia*

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(v) | v \in V\} \subset W \qquad \ker(f) = f^{-1}(\underline{0}) = \{v \in V | f(v) = \underline{0}\} \subset V \tag{13}$$

Si osservi che un'applicazione $f = L_A$ è iniettiva se e solo se $\ker(f) = \underline{0}$. La verifica di ciò è lasciata al lettore.

dime **Proposizione 11.1.** *Vale la seguente equazione:*

$$\dim V = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) \tag{14}$$

Dimostrazione. Siano $\{v_1, \dots, v_k\}$ base di $\ker(f)$ e $\{w_1, \dots, w_d\}$ base di $\mathrm{Im}(f)$. Vogliamo dimostrare che $\dim V = k + d$. Supporremo, ma non è limitante, $k < d$. Prendiamo dei $u_1, \dots, u_d \in V$ tali che $f(u_i) = w_i$ e dimostriamo che $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_d\}$ è una base di V. Si ha che $V =< v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_d >$. Adesso prendiamo un $v \in V$. Quindi

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i w_i\right) \Longrightarrow f\left(v - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i\right) = \underline{0}_W \Longrightarrow v - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i \in \ker(f)$$

di conseguenza

$$v - \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i = \sum_{j=1}^{k} \mu_j w_j \Longrightarrow v = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{k} \mu_j w_j$$

quindi generano. Adesso vediamo se sono linearmente indipendenti. Sia

$$\sum \alpha_i w_i + \sum \beta_j w_j = \underline{0}_V \Longrightarrow \sum \alpha_i \underbrace{f(v_i)}_{\underline{0}_W} + \sum \beta_j \underbrace{f(u_j)}_{w_j} = \underline{0}_W \Longrightarrow \sum \beta_j w_j = \underline{0}_W$$

ossia $\beta_j = 0 \, \forall j$. □

12. Mercoledì 22.10.2008 - Risultati sul rango e Cambi di base

Teorema 12.1. *Sia $A \in M_{m,n}(K)$. Allora $Rg_c(A) = Rg_r(A)$.*

Dimostrazione. Sapiamo dalla proposizione (11.1) che $n = \dim\ker(L_A) + \dim \mathrm{Im}(L_A)$. Si faccia attenzione al fatto che $\dim \mathrm{Im}(L_A) = Rg_c(A)$ perchè per ogni base, oltre a quella standard, si ha $\mathrm{Im}(L_A) =< A^1 \dots A^n >$ e quindi l'immagine è data dai generatori contenuti nella base.
Quindi dimostrare l'uguaglianza tra i due tipi di rango equivale a voler dimostrare che

$$Rg_r(A) = n - \dim\ker(L_A) \Longrightarrow \dim\ker(L_A) = n - Rg_r(L_A)$$

ma sappiamo anche che $\ker(L_A) = \ker(L_S)$ dove S è la matrice che otteniamo da A per mezzo di operazioni elementari. Per S il rango per righe è proprio il numero di righe diverso da 0. Infine $\dim\ker(L_S)$ è il numero di righe nulle. □

E' il momento di generalizzare ulteriormente le cose. Supponiamo di avere due spazi vettoriali finitamente generati V, W con $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ loro rispettive basi. Supponiamo anche che $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Vogliamo trovare una corrispondenza biunivoca

$$M_{m,n}(K) \longleftrightarrow \mathscr{L}(V, W)$$

dove $\mathscr{L}$ è l'insieme delle applicazioni lineari da V a W.

Definizione 12.1. *L'applicazione $L_A(\mathcal{B}, \mathcal{B}') : V \longrightarrow W$ è l'unica tale che*

$$L_A(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

che è il vettore di W con coordinate A^j nella base $\mathcal{B}'$.

Spieghiamo meglio cosa sta ad indicare la precedente definizione. Sia $v \in V$ e $X(v)$ vettore colonna delle coordinate di v in $\mathcal{B}$ e sia $w \in W$ con $Y(w)$ vettore colonna delle coordinate di w in $\mathcal{B}'$. Allora $Y(L_A(v)) = A \cdot X(v)$. Questo perchè

$$L_A(v) = L_A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j L_A(v_j)$$

ma si ha anche che

$$L_A(v) \sum_{j=1}^{n} (a_{1j}x_j)w_1 + \sum_{j=1}^{n} (a_{2j}x_j)w_2 + \dots = (A_1 \cdot x)w_1 + (A_2 \cdot x)w_2 + \dots + (A_m \cdot x)w_m$$

quindi $Y(L_A(v)) = AX$.

13. Giovedì 23.10.20008 - Ancora sui cambi di base

Abbiamo precedentemente visto che si ha la corrispondenza

corr

$$\begin{gathered} \mathscr{L}(V, W) \longrightarrow M_{m,n}(K) \\ f \longmapsto M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) \end{gathered} \tag{15}$$

Vedremo adesso in che modo agisce la composizione di applicazioni lineari ossia il prodotto di tali matrici sui cambi di base. Siano U, V, W spazi vettoriali su $K \subset \mathbb{C}$ e siano $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow W$. Le rispettive dimensioni siano $\dim U = n = |\mathcal{B}|$, $\dim V = m = |\mathcal{B}'|$ ed infine $\dim W = p = |\mathcal{B}''|$. Allora avremo

$$\begin{matrix} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = M_{m,n} \\ M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(g) = M_{p,m} \end{matrix} \Longrightarrow M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{p,n}$$

ossia vale la seguente formula:

prod_basi

$$M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}}(g \circ f) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(g) \tag{16}$$

Perchè? Siano $u \in U$ ed $X(u)$ il vettore colonna delle coordinate di u in $\mathcal{B}$, $v \in V$ ed $Y(v)$ il vettore colonna delle coordinate di v in $\mathcal{B}'$ ed infine sia $w \in W$ con $Z(w)$ il vettore colonna delle coordinate di w in $\mathcal{B}''$. Sappiamo già che

$$Y(f(u)) = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) \cdot X(u) \qquad Z(g(v)) = M_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}(g) \cdot Y(v)$$

e che la composizione sarà

$$Z(g \circ f(u)) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}''}(g \circ f) \cdot X(u)$$

ma in effetti

$$Z(g(f(u))) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g) \cdot Y(f(u)) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}''}(g) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) \cdot X(u) = Z(g \circ f(u))$$

dove l'ultima uguaglianza si è avuta per l'associatività del prodotto di matrici.
Supponiamo ora di avere un endomorfismo $f : V \longrightarrow V$. In genere la matrice ad esso associata è scelta nella stessa base. Vediamo perchè. Supponiamo di avere $\dim V = n$, allora $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = 1_V$ quindi $f(v_i) = v_i$. Al contrario se avessimo avuto $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(f) = 1_V$ avremmo potuto unicamente affermare che f è un isomorfismo.

Osservazione 13.1. *Ricordiamo che*

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V)^{-1} = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V).$$

coord_endo **Proposizione 13.1.** *Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V. Allora vale la seguente relazione:*

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) \tag{17}$$

Definizione 13.1 (Matrici coniugate). *Siano $A, b \in M_{n,n}(K)$. Esse si dicono coniugate se esiste $C \in M_{n,n}(K)$ invertibile e tale che $A = CBC^{-1}$.
La relazione di coniugio è una relazione di equivalenza ed inoltre se due matrici sono coniugate allora $A^k = CB^kC^{-1}$.*

14. Mercoledì 5.11.2008 - Determinanti

Definizione 14.1. *Sia $K \subset \mathbb{C}$ ed $M_n = M_n(K) := M_{n,n}(k)$. Il determinante è un'applicazione tale che*

$$\begin{aligned} M_i(K) &\longrightarrow K \\ A &\longmapsto \det A \end{aligned}$$

con le proprietà:

(1) $\det A$ *è un polinomio di grado n nelle a_{ij};*
(2) $\det A = 0$ *se e solo se le righe o le colonne di A sono linearmente dipendenti.*

Avviciniamoci a questo nuovo argomento con i casi base. Nel caso $n = 1$ si ha $A = (a_{11})$ e banalmente coincide con il suo determinante; se $n = 2$ allora

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A = ad - bc.$$

Valgono le due proprietà? La prima è evidente. Per quanto riguarda la seconda, supponiamo, per assurdo, che $\{A_1, A_2\}$ siano linearmente dipendenti ossia $A_1 = \lambda A_2$ e verifichiamo che $\det A = 0$. Se $A_1 = \lambda A_2$ ciò significa che $(a, b)\lambda(c, d)$ e di conseguenza

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda c & \lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = (\lambda c)d - (\lambda d)c = 0.$$

Un calcolo simile si ha se $A_2 = \mu A_1$.
Ora, al contrario, supponiamo che $\det A = 0$ e dimostriamo che $\{A_1, A_2\}$ sono linearmente dipendenti. Se $0 = \det A = ad - bc$ ed $(a, b) = (0, 0)$ la cosa è ovvia, quindi supponiamo che così non sia. Per esempio si abbia $a \neq 0$. Di conseguenza $0 = ad - bc \Rightarrow ad = bc \Rightarrow d = \frac{bc}{a}$ e quindi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \frac{bc}{a} \end{pmatrix}$$

e si trova che $A_2 = \frac{c}{a} A_1$ e le righe sono linearmente dipendenti. Il caso $b \neq 0$ è similare.

In generale vedremo che il determinante di una matrice è somma di prodotti del tipo $\pm a_{1j(1)} \cdot a_{2j(2)} \cdot \dots \cdot a_{nj(n)}$ dove $1 \leq j(i) \leq n$ ed $j(i) \neq j(i')$.

15. Permutazioni e Determinanti

Sarà ora necessario richiamare alcune nozioni riguardanti le permutazioni. Prendiamo un insieme di elementi $I_n = \{1, \dots, n\}$; una permutazione σ di I_n è un riordinamento degli elementi dell'insieme come

$$\{1, \dots, n\} \longrightarrow \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}.$$

Definizione 15.1. *L'insieme delle permutazioni di n elementi è un gruppo ed è definito come*

$$\mathcal{S}_n := \{ \text{ permutazioni di } I_n\}$$

Esempio 15.1. *Sia $n = 3$. Si hanno*

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \sigma \circ \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Definizione 15.2 (Trasposizione). *Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$ un riordinamento di n elementi. E' una trasposizione se esistono $leqi \leq j \leq n$ tali che $\sigma(i) = j, \sigma(j) = i, \sigma(k) = k$ con $k \in I_n \setminus \{i, j\}$.*

Esempio 15.2. *Per $n = 2$ si ha che σ è una trasposizione mentre l'identità non lo é:*

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ Id = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Per quanto riguarda $n = 3$ abbiamo:

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{array}{rr} Id = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \sigma_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ \sigma_{1,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} & \sigma_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \rho = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \rho^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

Osserviamo che qui le trasposizioni sono solo i $\sigma_{i,j}$.

Proposizione 15.1. *Ogni σ è prodotto di trasposizioni ossia è della forma*

$$\sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k.$$

Inoltre se una $\tau \in \mathcal{S}_n$ è una trasposizione allora il suo ordine è 2 ossia $\tau \circ \tau = \tau^2 = Id$.

Proposizione 15.2. *Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e supponiamo che $\sigma = \tau_1 \cdot \dots \cdot \tau_k = \theta_1 \cdot \dots \cdot \theta_h$. Allora $k - h$ è pari e si definisce il segno della permutazione come*

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^k.$$

La permutazione si dice pari se $\varepsilon(\sigma) = 1$, si dice dispari se $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Definizione 15.3. *Sia $A \in M_n(K)$. Il determinante di A è*

deter (18)
$$\boxed{D(A) = \det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)}}$$

16. Giovedì 6.11.2008 - Determinanti e loro proprietà

Osservazione 16.1. *Poichè $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$ si ha*

$$\varepsilon(\sigma \circ \sigma') == (-1)^{k+h} = (-1)^k \cdot (-1)^h = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma').$$

Inoltre si ha che

$$\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$$

perchè $\varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot \varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \varepsilon(Id) = 1$.

E' il momento di un esempio chiarificatore...

Esempio 16.1. *Sia $\mathcal{S}_3$ ed $A \in M_3(\mathbb{R})$.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \mathcal{S}_3 = \{\underbrace{Id, \rho, \rho^2}_{\varepsilon=1}, \underbrace{\sigma_{2,3}, \sigma_{1,3}, \sigma_{1,2}}_{\varepsilon=-1}\}.$$

Far agire gli elementi di $\mathcal{S}_3$ sugli elementi di A ha il seguente significato:

$$\begin{aligned} &Id = (1,2,3) \longrightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ &\rho^2 = (3,1,2) \longrightarrow a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} \\ &\rho = (2,3,1) \longrightarrow a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ &\sigma_{2,3} = (1,3,2) \longrightarrow -a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \\ &\sigma_{1,3} = (3,2,1) \longrightarrow -a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ &\sigma_{1,2} = (2,1,3) \longrightarrow -a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} \det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma(n)} &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} + \\ + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} &- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}$$

Esempio 16.2. *Se A è diagonale ossia se*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

E' arrivato il momento di guardare il determinante come applicazione ossia

$$\det : \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n\text{volte}} \longrightarrow K$$

(19)
$$(A_1, A_2, \dots, A_n) \longmapsto \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Esso gode delle seguenti proprietà:

(1) dati $E_1 = (1,0,\dots 0), E_2 = (0,1,\dots,0), E_n = (0,\dots,1)$ si ha $\det(E_1,\dots,E_n)^T = 1$;

(2) il determinante è lineare in ciascuna variabile ossia, con $B, C \in K^n$, si ha

$$\det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ \lambda B + \mu C \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ B \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ C \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix};$$

(3) il determinante è antisimmetrico cioè lo scambio di due righe ne inverte il segno.

La dimostrazione della prima proprietà è banale in quanto basta partire dal caso $n = 2$ e poi procedere per induzione; per quanto riguarda la seconda abbiamo ,posto $\sigma_i = 1$ che

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \\ &= a_{i1} Q_1(A_1 \dots A_{i-1}, A_{i+1} \dots A_n) + \dots + a_{in} Q_n(A_1 \dots A_{i-1}, A_{i+1} \dots A_n). \end{aligned}$$

Se fissiamo gli A_j argomenti dei vari Q segue la linearità del determinante.
Supponiamo ora di effettuare le ben note operazioni elementari tali da mandare A nella matrice a scala B. Ci chiediamo che relazione intercorra tra $\det A$ e $\det B$. Si hanno tre evenienze:

(1) scambio di una riga quindi $\det B = -\det A$;
(2) moltiplicazione per uno scalare non nullo quindi $\det B = \mu \det A$;
(3) righe uguali quindi $\det B = 0$.

17. Lunedì 10.11.2008 - Matrice di Vandermonde e Proprietà algebriche del determinante

Siano $x_1 \dots x_n \in \mathbb{C}$. Definiamo la matrice di Vandermonde come

vander

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \tag{20}$$

Si tratta di una matrice $n \times n$ per la quale dimostreremo che vale la seguente formula:

$$\boxed{\det A(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} (x_j - x_i)} \tag{21}$$

Per induzione si porta a scala partendo dal basso e avendo

$$x_i^{n-k} - x_i \cdot x_1^{n-k-1} = x_i^{n-k-1}(x_i - x_1)$$

fino ad arrivare, al primo passo, ad aver portato a scala la prima colonna ed avere una

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & * & \dots & * \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ora il calcolo del determinante si è ridotto a moltiplicare il termine b_{11} per il blocco $n-1 \times n-1$ rimanente.
Passiamo ora a formalizzare le proprietà algebriche del determinante attraverso il seguente teorema.

Teorema 17.1. *Sia l'applicazione*

$$D : \underbrace{K^n \times \dots \times K^n}_{n volte} \longrightarrow K.$$

tale che

(1) $D(E^1, \dots, E^n) = 1$;
(2) D *è lineare in ciascuna variabile;*
(3) D *è antisimmetrica ossia tale che*
$D(A^1, \dots, A^i, A^j, \dots A^n) = -D(A^1, \dots A^{i-1}, A^j, A^{i+1}, A^{j-1}, A^i, \dots, A^n)$.

Allora

$$D(A^1, \dots, A^n) \doteq \det(A_1, \dots, A_n) \tag{22}$$

Dimostrazione. Proviamo a calcolarci

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

ma se $\lambda_n \neq 0$ allora $\lambda_i \neq 0 \, \forall i$ perchè la matrice è quadrata. Se supponiamo che $\lambda_n = 0$ allora l'ultima riga è nulla e siccome D è lineare allora $D(A) = 0$.
Per quanto riguarda la seconda e la terza proprietà, partiamo dal notare che abbiamo dimostrato che $D(S^1, \dots, S^n) = \det(S_1, \dots, S_n)$ se S è a scala. Ma se in generale volessimo calcolare $D(A^1, \dots, A^n)$ dovremmo ridurla a scala attraverso k scambi di righe e moltiplicando le righe per $\mu_1 \dots \mu_d$ scalari non nulli. Allora avremmo

$$\det A = (-1)^k \prod_{i=1}^{d} \mu_i = \det S$$

ma anche

$$D(A^1, \dots, A^n) = (-1)^k \left(\prod_{i=1}^{d} \mu_i \right) D(S^1, \dots, S^n) = (-1)^k \left(\prod_{i=1}^{d} \mu_i \right) \det(S_1, \dots, S_n)$$

quindi

$$\det(S_1, \dots, S_n) = (-1)^{-k} \left(\prod_{i=1}^{d} \mu_i^{-1} \right) \det A$$

ci porta a

$$D(A^1, \dots, A^n) = (-1)^{-k} \left(\prod_{i=1}^{d} \mu_i^{-1} \right) (-1)^k \left(\prod_{i=1}^{d} \mu_i \right) \det A = \det A$$

□

Osservazione 17.1. *Sia $A \in M_n(K)$. Mostriamo che $\det A = \det A^T$. Tali matrici sono rappresentabili come $A(a_{ij})$ ed $A^T(b_{ij})$ con $b_{ij} = a_{ji}$. Si ha che*

$$\begin{aligned}
\det A^T &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \cdot \dots \cdot b_{n\sigma(n)} = \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdot \dots \cdot b_{\sigma(n)n} = \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{=\varepsilon(\sigma^{-1})} a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdot \dots \cdot a_{n\sigma^{-1}(n)} = \det A
\end{aligned}$$

18. Mercoledì 12.11.2008 - Complementi algebrici e determinanti

Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$.

Definizione 18.1 (Complemento algebrico). *Il complemento algebrico di a_{ij} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$*

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} & & * & & \\ & & * & & \\ * & * & * & * & * \\ & & * & & \\ & & * & & \end{pmatrix}$$

dove i termini contrassegnati con l'asterisco non vanno considerati.

Esempio 18.1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & \sqrt{5} \\ 1 & \pi & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow A_{12} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{5} \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposizione 18.1. *Sia $A \in M_n(K)$. Allora*

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}} \tag{23}$$

Dimostrazione. Dimostrare la validità della proposizione significa dimostrare che valgono le tre proprietà che caratterizzano il determinante di una matrice. Per quanto riguarda la prima si ha

$$D(E^1, \dots, E^n) = (-1)^{i+i} \cdot \det A_{ii} = 1$$

dove osserviamo che il complemento algebrico è ancora esso stesso la matrice identica ma di dimensione $n-1$.
La seconda proprietà è ovvia per costruzione della formula. Resta da mostrare che D è antisimmetrica. Sia $D(A^1, \dots, A^{j_1 - 1}, B, A^{j_1+1}, A^{j_2-1}, B) = 0$ con $B = \{A^{j_1} + A^{j_2}\}$. Se $j \neq j_1, j_2$ allora $\det A_{ij} = 0$ perchè in A_{ij} le colonne A^{j_1} e A^{j_2} sono uguali. Allora

$$\begin{gathered}
D(A) = a_{ij_1} (-1)^{i+j_1} \det A_{ij_1} + a_{ij_2} (-1)^{i+j_2} \det A_{ij_2} = \\
= a^i_{ij_1} [(-1)^{j_1} \det A_{ij_1} + (-1)^{j_2} \det A_{ij_2}] \Longrightarrow \det A_{ij_2} = (-1)^{j_1+j_2-1} det A_{ij_1}
\end{gathered}$$

□

Definizione 18.2 (**Matrice inversa).** *Sia $A \in M_n(K)$. La matrice inversa B è la matrice tale che $AB = Id$ e si indica con A^{-1}. Inoltre una matrice è invertibile se e solo se* $\det A \neq 0$.

Definizione 18.3 (**Matrice aggiunta).** *Sia $A \in M_n(K)$. Si definisce la matrice aggiunta A^c la matrice che sulla riga i-esima e colonna j-esima è così formata:*

$$A^c_{ij} \doteq (-1)^{i+j} \det A_{ji}. \tag{24}$$

Essa si costruisce sostituendo al termine a_{ij} il termine $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ e prendendo la trasposta.

Esempio 18.2. *Calcoliamoci l'aggiunta di*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{c^T} = \begin{pmatrix} -12 & 8 & 5 \\ 9 & -6 & 6 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow A^c = \begin{pmatrix} -12 & 9 & 3 \\ 8 & -6 & -5 \\ 5 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

E' utile avere a disposizione alcune utili formule:

$$A \cdot A^c = (\det A) Id \qquad (A \cdot A^c)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} (-1)^{s+j} \det A_{js} \tag{25}$$

da cui deriva la seguente espressione per l'inversa di una matrice.

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^c} \tag{26}$$

Passiamo adesso alla formula di Binet.

binet **Teorema 18.1.** *Siano $A, B \in M_n(K)$. Allora si ha che*

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \tag{27}$$

Dimostrazione. Supponiamo il caso in cui $\det A = 0$, (farlo con B è del tutto equivalente). Allora A non è invertibile e di conseguenza $L_A : K^n \to K^n$ non è suriettiva. Di conseguenza non lo sarà nemmeno $L_A \circ L_B = L_{AB} \Rightarrow \det(A \cdot B) = 0$. Supponiamo ora, invece, che $\det A \neq 0$ e definiamo L'applicazione

$$\begin{aligned} D : \underbrace{K^n \times \cdots \times K^n}_{nvolte} &\longrightarrow K \\ (B^1, \ldots, B^n) &\longmapsto \tfrac{\det(A \cdot B)}{\det A} \end{aligned} .$$

Fatto questo è evidente come l'applicazione appena definita sia proprio $\det B$ e questo conclude la dimostrazione. □

19. Giovedì 13.11.2008 - Determinante di un endomorfismo

Sia V uno spazio vettoriale su K campo e con $\dim_K V < \infty$. Sia $f : V \longrightarrow V$ un endomorfismo e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ basi di V. Dimostriamo che sussiste la seguente uguaglianza:

d_end
$$\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \det M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) \tag{28}$$

Questo perchè vale la (coord_endo 13.1) che qui riportiamo e sulla quale applichiamo il teorema (binet 18.1).

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \det M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V) \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \det M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V)$$

ma sappiamo che $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V) M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) = M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(1_V) = 1_V$. Per Binet $\det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(1_V) \det M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}(1_V) = 1$.

Scopriamo che, grazie alla (d_end 28) ha senso definire

$$\det f := \det M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f). \tag{29}$$

ed ora vedremo un esempio pratico del suo calcolo.

Esempio 19.1. *Sia $K = \mathbb{Q}$ e $V = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Si abbia*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] &\longrightarrow \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \\ x &\longmapsto (3+\sqrt{2})x \end{aligned}$$

con $\mathcal{B} = \{1, \sqrt{2}\}$ e $\mathcal{B}' = \{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$. Nella prima base si ha

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

inoltre si ha $f(1+\sqrt{2}) = (3+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 5+4\sqrt{2}$ ed $f(1-\sqrt{2}) = (3+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1-2\sqrt{2}$. Ora calcoliamoci le coordinate nella base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{cases} 5+4\sqrt{2} = x(1+\sqrt{2}) + y(1-\sqrt{2}) \Rightarrow x = \frac{9}{2} \quad y = \frac{1}{2} \\ 1-2\sqrt{2} = x(1+\sqrt{2}) + y(1-\sqrt{2}) \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

e di conseguenza

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Alla fine scopriamo che

$$\det M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \det M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f).$$

20. Determinanti e Volumi

Scegliamo una base ortonormale di V_2 ossia una $\mathcal{B} = \{i, j\}$ con i vettori di pari lunghezza e $i \perp j$. Dati $v, w \in V_2$ sia $\mathrm{Vol}(v, w) = \mathrm{Vol}(\{p_0 + av + bw | 0 \leq a \leq 1, 0 \leq b \leq 1\})$ dove p_0 è un punto nel piano e $p_0 + v$ è il segmento orientato che parte in p_0 e rappresenta v. Abbiamo di conseguenza un isomorfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V_2 \\ (x, y) &\longmapsto xi + yj \end{aligned} .$$

Allora vale il seguente teorema:

Teorema 20.1. *Dati gli elementi precedentemente nominati, vale la seguente formula*

$$\boxed{\mathrm{Vol}(v, w) = \left|\det \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(v) \\ \varphi^{-1}(w) \end{pmatrix}\right|} \tag{30}$$

ed inoltre si ha che

1. $\mathrm{Vol}(i, j) = 1$;
2. $\mathrm{Vol}(v, w) = \mathrm{Vol}(v, w + \lambda v)$;
3. $\mathrm{Vol}(v, w) = \mathrm{Vol}(w, v)$.

Dimostrazione. Diamo per buona la validità delle proprietà elencate e mostriamo la validità della formula. Partiamo dall'osservare che $\varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w)$ sono le coordinate dei vettori nella base $\mathcal{B}$; attraverso le ben note operazioni elementari possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} \varphi^{-1}(v) \\ \varphi^{-1}(w) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

quindi si deve dimostrare che

$$\mathrm{Vol}(v, w) = \left|\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right|.$$

Se v, w sono linearmente dipendenti allora $\mathrm{Vol} = 0 = \det$. Supponiamo, invece, che siano linearmente indipendenti. Sfruttando la prima e la secondaproprietà possiamo scrivere $\mathrm{Vol}(v, w) = |\lambda\mu| = \mathrm{Vol}(\lambda i, \mu j)$ e ricomponendo il tutto abbiamo che

$$\mathrm{Vol}(v, w) = \mathrm{Vol}(\lambda i, \mu j) = |\lambda\mu| = \left|\det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\right| = \left|\det \begin{pmatrix} \varphi^{-1}(v) \\ \varphi^{-1}(w) \end{pmatrix}\right|$$

$\square$

21. Lunedì 24.11.2008 - Prodotto scalare

Da qui in poi, salvo avviso contrario, porremo V spazio vettoriale reale ossia con $K = \mathbb{R}$.

Definizione 21.1 (Prodotto scalare). *Un prodotto scalare su V è una legge*

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, w) &\longmapsto \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

(1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *è lineare in ciascuna variabile ossia*

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle$$

$$\langle v, \mu_1 w_1 + \mu_2 w_2 \rangle = \mu_1 \langle v, w_1 \rangle + \mu_2 \langle v, w_2 \rangle;$$

(2) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$;

(3) $\langle v, w \rangle \geq 0$ *ed è uguale a zero solo se* $v \equiv \underline{0}$.

Esempio 21.1. *Sia $V = \mathbb{R}^n$ ed $X, Y \in V$. Allora*

$$\langle X, Y \rangle = X^T \cdot Y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Un altro esempio di prodotto scalare si può avere con $V = \mathcal{C}^0[a, b] := \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua $\}$. Su tale spazio si pone come prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx$$

Sia ora $v \in V$. La sua norma è

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

Proposizione 21.1 (Disuguaglianza di Schwarz). *Vale la seguente disuguaglianza:*

$$\boxed{|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|} \tag{31}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se i due vettori sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Supponiamo che $\{v, w\}$ siano linearmente dipendenti ossia $w = kv$. Si ha

$$\langle v, w \rangle = \langle kv, v \rangle = k \langle v, v \rangle = k \|v\|^2.$$

Osserviamo che $\|\lambda w\| = \sqrt{\langle \lambda w, \lambda w \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle w, w \rangle} = |\lambda| \|w\|$ quindi

$$\|v\| \|w\| = \|v\| \|kv\| = |k| \|v\|^2$$

e l'uguaglianza sussiste. Supponiamo ora, invece, di prendere i due vettor ilinearmente indipendenti. Sappiamo anche che $\langle xv + w, xv + w \rangle > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$ e che uguale a zero non può essere dato che stiamo supponendo l'indipendenza lineare. Si ha

$$\begin{aligned} \langle xv + w, xv + w \rangle &= x \langle v, xv + w \rangle + \langle w, xv + w \rangle = \\ = \langle v, v \rangle x^2 + x \langle v, w \rangle + x \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle &= \underbrace{\langle v, v \rangle}_{a} x^2 + \underbrace{2 \langle v, w \rangle}_{b} x + \underbrace{\langle w, w \rangle}_{c}. \end{aligned}$$

Adesso si ha che $b^2 - 4ac < 0$ e non è mai nullo $\forall x \in \mathbb{R}$ ed infine $4 \langle v, w \rangle^2 \leq 4 \|v\|^2 \|w\|^2$. $\square$

Il prodotto scalare è utile nel formulare osservazioni riguardanti angoli e relazioni tra vettori. Supponiamo di avere $v, w \in V$ entrambi non nulli. Per Schwarz si ha

$$-1 \leq \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \leq +1 \tag{32}$$

quindi esite un ϑ unico tale che $0 \leq \vartheta \leq \pi$ con

$$\cos \vartheta = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \tag{33}$$

E' il momento di capire qual'è il legame tra la geometria e il prodotto scalare. Supponiamo di avere un isomorfismo e una base ortonormale $\mathcal{B}$ di V_2. Definiamo

$$\begin{aligned} V_2 \times V_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle x_1 i + x_2 j, y_1 i + y_2 j \rangle &\longmapsto x_i y_1 + x_2 y_2 \end{aligned}$$

Si ha che se due vettori $v, w \in V_2$ allora $\langle , v, w\rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cos\vartheta$ dove ϑ è l'angolo individuato dai due vettori.

22. Mercoledì 26.11.2008 - Isometrie tra spazi vettoriali euclidei

Definizione 22.1 (Spazio vettoriale euclideo). *Uno spazio vettoriale euclideo (s.v.e.) è uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare e si indica come* $(V, \langle , \rangle)$.

Il concetto di prodotto scalare ci sarà utile nel definire quello di isometria nel senso che segue.

Definizione 22.2 (Isometria tra spazi vettoriali). *Siano* $(V, \langle , \rangle_V)$ *e* $(W, \langle , \rangle_W)$. *Un isomorfismo tra spazi vettoriali* $f : V \overset{\sim}{\longrightarrow} W$ *è un' isometria se* $\forall\, v_1, v_2 \in V$ *si ha che*

$$\langle v_1, v_2\rangle_V = \langle f(v_1), f(v_2)\rangle_W .$$

Osservazione 22.1. *Sia ancora* $f : \overset{\sim}{\longrightarrow} W$. *Se* f *è un'isometria allora*

$$\|v\| = \|f(v)\|$$

. Questo perchè

$$\|f(v)\|_W = \langle f(v), f(v)\rangle_W^{\frac{1}{2}} = \langle v, v\rangle_V^{\frac{1}{2}} = \|v\|_V .$$

Definizione 22.3 (Base ortonormale). *Sia* $(V, \langle , \rangle)$ *uno s.v.e.. Una base* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *è ortonormale se*

delta

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \tag{34}$$

Esempio 22.1. *Supponiamo di avere* V, W *s.v.e. con* $\dim V = n = \dim W$ *e che le rispettive basi* $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ *e* $\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_n\}$ *siano ortonormali. Sia* $f : V \longrightarrow W$ *l'unica applicazione lineare tale che* $f(v_i) = w_i$. *Vedremo che* f *è un'isometria. Prendiamo* $v, v' \in V$. *Si ha che*

$$\langle v, v'\rangle = \left\langle \sum_i a_i v_i, \sum_j a_j v_j \right\rangle = \sum_{ij} a_i a'_j \langle v_i, v_j\rangle = \sum_{ij} a_i a'_j \delta_{ij}$$

$$\langle f(v), f(v')\rangle = \left\langle \sum_i ai f(v_i), \sum_j a'_j f(v'_j) \right\rangle = \sum_{ij} a_i a'_j \langle w_i, w_j\rangle = \sum_{ij} a_i a'_j \delta_{ij}$$

quindi l'uguaglianza sussiste.

Proposizione 22.1. *Dato uno s.v.e.* V*, esiste una base ortonormale di* V.

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla dimensione di V. Sia $n = 1$. In questo caso è ovvio. Sia ora $n > 1$ ed $0 \neq v \in V$. E' possibile normalizzare con $\|v\|$ ed avere

$$w = \frac{v}{\|v\|}.$$

Prendiamo adesso

$$V^{\perp} := \{w \in V | \langle v, w\rangle = 0\}$$

il quale è un sottospazio vettoriale. Quindi, al momento, possiamo affermare che $\dim W \leq \dim V$. Per ipotesi induttiva abbiamo $\dim W = n - 1$ e $\dim V = n$ e quindi pe W esiste una base ortonormale. □

23. Giovedì 27.11.2008 - Non unicità del prodotto scalare

Supponiamo di avere due s.v.e. $(V; \langle , \rangle_V)$ e $(W, \langle , \rangle_W$ con $\dim W = n = \dim V$. Sappiamo già che esiste un'isometria tra V e W, vedremo che ciò non implica l'unicità del prodotto scalare. Per esempio su V dato il prodotto scalare di partenza si può definire $\langle , \rangle_2 = \lambda \langle , \rangle$ con $\lambda > 0$.

Cercando di addentrarsi di più nella questione stiamo cercando un modo di associare una matrice simmetrica Q

$$(V, \langle , \rangle, \mathcal{B}) \longmapsto Q \in M_n(\mathbb{R}).$$

Si osservi che data la simmetria di Q abbiamo gratuitamente che $\langle v_i, v_j\rangle = \langle v_j, v_i\rangle$. Una volta trovata Q si ha che il prodotto scalare si scriverà come

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \right\rangle = \underbrace{X^T}_{1\times n} Q \underbrace{Y}_{n\times 1} \tag{35}$$

Il problema è diverso nel momento in cui dati V e $\mathcal{B}$ vogliamo defire un prodotto scalare su tale spazio. Come procediamo? Assegnamo $Q \in M_N(\mathbb{R})$ e vediamo se l'applicazione B che ne risulta è un prodotto scalare:

$$\begin{aligned} V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v, v') &\longmapsto B(v, v') \end{aligned}$$

con

$$B\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{j=1}^{n} y_j v_j\right) = X^T Q Y = X(v)^T Q Y(v').$$

Ci chiediamo se B sia bilineare. Si ha che

$$\begin{aligned} B(\lambda u + \mu w, v') &= (\lambda X(u) + \mu X(w))^T Q Y(v') = (\lambda X(u)^T + \mu X(w)^T) Q Y(v') = \\ &= \lambda X(u)^T Q Y(v') + \mu X(w)^T Q Y(v') = \lambda B(u, v') + \mu B(w, v') \end{aligned}$$

quindi lo è. Resta da vedere se B è simmetrica. Ed infatti lo è perchè

$$B(v, w) = X(v)^T Q X(w) \qquad B(w, v) = X(w)^T Q X(v)$$

ma sfruttando il fatto che date due matrici allora

$$(AB)^T = B^T A^T$$

, troviamo che

$$(X(v)^T Q X(w))^T = X(w)^T Q^T X(v) = X(w)^T Q X(v)$$

. Infine è abbastanza evidente che $B(v, v) \leq 0$ ed è uguale a 0 se e solo se $v = 0$.

24. Algoritmo di Gram - Schmidt

Sia $(V, \langle,\rangle)$ uno s.v.e. e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una sua base. Cerchiamo un algoritmo che ci consenta di arrivare ad una nuova base ortonormale. Il primo di questi vettori, tutti quindi di norma unitaria, può essere preso come

$$w_1 = v_1.$$

Il secondo si dovrà proiettare su w_1 ossia $w_2 = v_2 - x v_1$ inoltre deve valere

$$0 = \langle w_2, v_1\rangle = \langle v_2 - x v_1, v_1\rangle = \langle v_2, v_1\rangle - x\|v_1\|^2$$

da cui segue che

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} v_1.$$

Introduciamo adesso il gruppo ortogonale

$$\mathcal{O}(V) = \{f : V \longrightarrow V | \langle v, v'\rangle = \langle f(v), f(v')\rangle\} \tag{36}$$

Bisogna capire ora di che tipo saranno le matrici rappresentanti le isometrie ossia gli elementi di questo gruppo. Supponiamo di avere una base ortonormale. Sappiamo già che $\langle v, w\rangle = X(v)^T X(w)$. Sia $f : V \longrightarrow V$ lineare e prendiamo $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. Imponendo che si tratti di un'isometria cosa succede? Abbiamo che $X(f(v)) = MX(v)$ ed $X(f(w)) = MX(w)$ quindi

$$\begin{aligned} \langle f(v), f(w)\rangle = X(v)^T M^T M X(w) \Longrightarrow X(v)^T M^T M X(w) = X(v)^T X(w) \Longrightarrow \\ \Longrightarrow M^T M = Id \Longrightarrow M^T = M^{-1}. \end{aligned}$$

Se per una matrice vale l'ultima uguaglianza, allora essa è un'isometria. Infine, ricordiamo la notazione:

$$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n).$$

25. Lunedì 1.12.2008 - Duale di uno spazio vettoriale

Sia V spazio vettoriale su K. Il suo duale V^* è definito come:

$$V^* = \{f : V \longrightarrow K | f \text{ lineare}\} \tag{37}$$

ed è anch'esso uno spazio vettoriale dato che, con $\lambda \in K$ e $f, g \in V^*$ si ha

$$(\lambda f)(v) = \lambda(fv) \qquad (f+g)(v) = f(v) + g(v).$$

Sia $n = \dim V < \infty$ e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Allora per $1 \leq i \leq n$ i v_i^* saranno tali che

$$v_i^*(v_j) = \delta_{ij}.$$

Osserviamo che $V \sim V^*$ ma non esiste un modo naturale per scegliere un isomorfismo tra essi! Per farlo bisogna avere uno s.v.e. perchè, come vedremo, è proprio il prodotto scalare l'isomorfismo che cerchiamo. Si ha

$$\begin{aligned} B : V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto w \end{aligned}$$

dove si ha $w = \langle v, w\rangle$. Adesso ci chiediamo se B sia lineare:

$$B(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)(w) := \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w\rangle = \lambda_1\langle v_1, w\rangle + \lambda_2\langle v_2, w\rangle = (\lambda_1 B(v_1) + \lambda_2 B(v_2))(w).$$

Infine c'è da dimostrare che B è un isomorfismo, ma sapendo che $\dim V = \dim V^*$ resta solo da mostrare che sia iniettiva. Sia $v \neq 0$; allora $B(v) \neq 0$ perchè $B(v) = \langle v, v\rangle > 0$.

26. Mercoledì 3.12.2008 - Basi duali e Annullatori

Supponiamo di avere V e W spazi vettoriali tali che $\dim V = n$ e $\dim W = m$ con basi rispettivamente $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Sia f un'applicazione lineare da V a W e si abbia $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f) = (a_{ij})$. Indipendentemente dalle basi si può associare ad f un'applicazione lineare

$$\begin{aligned} f^* : W^* &\longrightarrow V^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

quindi

$$\varphi \circ f : V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{\varphi} K$$

Si ha che quest'applicazione è lineare dato che

$$\begin{aligned} f^*(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(v) &= (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) \circ f(v) = (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)(f(v)) = \\ &= (\lambda_1\varphi_1)(f(v)) + (\lambda_2\varphi_2)(f(v)) = \lambda_1\varphi_1 f(v) + \lambda_2\varphi_2 f(v) = \\ &= \lambda_1\varphi_1 \circ f(v) + \lambda_2\varphi_2 \circ f(v) = (\lambda_1 f^*(\varphi_1) + \lambda_2 f^*(\varphi_2))(v) \end{aligned}$$

infine, date $\mathcal{C}^*$ e $\mathcal{B}^*$ basi di W^* e V^*, vale la seguente relazione:

$$\boxed{M_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}(f^*) = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)^T} \tag{38}$$

Supponiamo ora di avere V spazio vettoriale su K e $W \subset V$.

Definizione 26.1 **(Annullatore).** *L'annullatore di W è il sottospazio di V^* definito come*

ann

$$\operatorname{Ann}(W) := \{f \in V^* : f_{|W} = 0\} \tag{39}$$

Proposizione 26.1. *Valgono le seguenti formule:*

$$\boxed{\begin{aligned} \dim \operatorname{Ann}(W) + \dim W = \dim V \\ \dim \operatorname{Ann}(W) = \dim V - \dim W \end{aligned}} \tag{40}$$

Dimostrazione. Prendiamo l'applicazione lineare Φ tale che

$$\begin{aligned} V^* &\xrightarrow{\Phi} W^* \\ f &\longmapsto f_{|W} \end{aligned}$$

quindi $\operatorname{Ann}(W) = \ker\Phi$. Inoltre sappiamo che $\dim V^* = \dim V = \dim\ker\Phi + \dim\operatorname{Im}\Phi$ e che $\operatorname{Im}\Phi \subset W^*$. Resta da mostrare che Φ è suriettiva. Siano $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_d\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_d, u_1, \ldots, u_n\}$ basi rispettivamente di W e V. Si ha che $w_i^* \in \mathcal{C}^*$ e quindi $w_i^* \in \operatorname{Im}\Phi$; siccome Φ è generata da $\{w_1^*, \ldots, w_d^*\}$ allora è suriettiva. $\square$

27. Giovedì 4.12.2008 - Spazi affini

Definizione 27.1 (Spazio affine). *Uno spazio affine con spazio vettoriale associato V è un insieme $\mathbb{A}$ provvisto di un'azione di V (traslazione) ossia*

$$\begin{aligned} \mathbb{A} \times V &\longrightarrow \mathbb{A} \\ (p, v) &\longmapsto p + v \end{aligned}$$

Definizione 27.2 (Combinazione lineare di punti). *Siano $p_0, \ldots, p_d \in \mathbb{A}$ e $\lambda_0, \ldots, \lambda_d \in K$ tali che*

$$\sum_{i=0}^{d} \lambda_i = 1.$$

Una combinazione lineare di punti è

$$\sum_{i=0}^{d} \lambda_i p_i = q + \sum_{i=0}^{d} \lambda_i \overrightarrow{qp_i}$$

Le due proposizioni seguenti non saranno dimostrate.

Proposizione 27.1. *Sia $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ un sottospazio affine. Allora esiste $W \subset V$ tale che, dato $p \in \mathbb{B}$, si ha $p + W = \mathbb{B}$.*

Definizione 27.3 (Giacitura). *Sia $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$. La giacitura di $\mathbb{B}$ è definita come*

$$\mathscr{G}(\mathbb{B}) = \{\overrightarrow{qr} | q, r \in \mathbb{B}\}. \tag{41}$$

Proposizione 27.2. *Sia $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ un sottospazio affine. Allora:*

1. *$V_p(\mathbb{B}) = \{\overrightarrow{pq} | q \in \mathbb{B}\} \subset V$ è un sottospazio vettoriale;*
2. *$V_p(\mathbb{B}) = \mathscr{G}(\mathbb{B})$.*

Definizione 27.4. *Siano $p_0, \ldots, p_d \in \mathbb{A}$. Essi sono linearmente indipendenti se $\dim < p_0, \ldots, p_d >= d$.*

Supponiamo ora di avere uno spazio affine $\mathbb{A}$ tale che $\dim \mathbb{A} < \infty$. Siano, inoltre, $\mathbb{S}, \mathbb{T} \subset \mathbb{A}$ sottospazi affini. Risulta definito $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ e quindi ha senso chiedersi che dimensione abbia tale sottospazio affine: stiamo cercando un equivalente della formula di Grassmann. Il problema è che nel caso affine non può esistere; basti pensare, per esempio, alle rette nello spazio ordinario le quali possono essere sghembe o parallele. Però qualcosa si può affermare.

Proposizione 27.3. *Siano $\mathbb{S}, \mathbb{T}$ sottospazi affini di $\mathbb{A}$ tali che $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq 0$. Allora si ha che*

$$\boxed{\dim \mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \dim \mathbb{S} + \dim \mathbb{T} - \dim \mathbb{S} \cup \mathbb{T}} \tag{42}$$

Dimostrazione. Sia $p \in \mathbb{S} \cap \mathbb{T}$. Sappiamo che $\mathbb{S} = p + \mathscr{G}(\mathbb{S})$ e $\mathbb{T} = p + \mathscr{G}(\mathbb{T})$. Allora abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \cap \mathbb{T} = p + \mathscr{G}(\mathbb{S}) \cap \mathscr{G}(\mathbb{T}) \Rightarrow \dim \mathbb{S} \cap \mathbb{T} &= \dim \mathscr{G}(\mathbb{S}) \cap \mathscr{G}(\mathbb{T}) = \\ &= \dim \mathscr{G}(\mathbb{S}) + \dim \mathscr{G}(\mathbb{T}) - \dim \mathscr{G}(\mathbb{S}) + \mathscr{G}(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

□

Definizione 27.5 (Sottospazi sghembi e paralleli). *Siano $\mathbb{S}, \mathbb{T} \subset \mathbb{A}$ sottospazi affini di $\mathbb{A}$. Essi si dicono sghembi se:*

1. $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} \neq 0$*;*
2. $\dim \mathscr{G}(\mathbb{S}) + \mathscr{G}(\mathbb{T}) = \dim \mathscr{G}(\mathbb{S}) + \dim \mathscr{G}(\mathbb{T})$.

Essi si dicono paralleli se la giagitura di uno dei due sottospazi è contenuta nell'altra, ossia se

1. $\dim \mathscr{G}(\mathbb{S}) + \mathscr{G}(\mathbb{T}) = \max\{\dim \mathscr{G}(\mathbb{S}), \dim \mathscr{G}(\mathbb{T})\}$.

Definizione 27.6 (Affinità). *Siano $\mathbb{A}, \mathbb{A}'$ spazi affini. Un'affinità è un'applicazione $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ tale che, dati $p, q \in \mathbb{A}$ e $\lambda, \mu \in K$ (con $\lambda + \mu = 1$), si abbia $f(\lambda p + \mu q) = \lambda f(p) + \mu f(q)$.*

Poichè $\mathbb{A}$ e $\mathbb{A}'$ avranno rispettivamente come spazi vettoriali associati V e V', un'affinità f sarà sempre del tipo

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &\xrightarrow{f} \mathbb{A}' \\ p &\longmapsto r_0 + \varphi(\overrightarrow{p_0 p}) \end{aligned}$$

dove $\varphi : V \longrightarrow V'$ è un'applicazione lineare. Possiamo vedere che è vero, per esempio, nel caso in cui $\mathbb{A}$ sia il piano ordinario. Si ha

$$\begin{aligned} f(\lambda p + \mu q) &= r_0 + \varphi(\lambda\overrightarrow{p_0 p} + \mu\overrightarrow{p_0 q}) = r_0 + \lambda\varphi(\overrightarrow{p_0 p}) + \mu\varphi(\overrightarrow{p_0 q}) = \\ &= r_0 + \lambda\overrightarrow{r_0 f(p)} + \mu\overrightarrow{r_0 f(q)} = \lambda f(p) + \mu f(q) \end{aligned}$$

Osservazione 27.1. *Un'affinità $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ è un isomorfismo se è biunivoca e questo implica che anche f^{-1} sia un'affinità.*

Definizione 27.7 (Riferimento affine). *Sia $\mathbb{A}$ spazio affine di dimensione finita. Un riferimento affine di $\mathbb{A}$ consiste di:*

1. *un'origine $0 \in \mathbb{A}$;*
2. *una base di V.*

Esso si indica come $RA(0, v_1, \dots, v_n)$.

Veniamo ora ai modi in cui è possibile descrivere un sottospazio affine $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$ e gli elementi che ad esso appartengono.

1. *Equazioni parametriche*
   Si scriva $\mathbb{B}$ come $\mathbb{B} = p_0 + W$ dove $p_0 \in \mathbb{A}$ e $W \subset V$. Sia $\{w_1, \dots, w_d\}$ una base di W. Allora si ha

$$\mathbb{B} = \left\{ p_0 + \sum_{i=1}^{d} t_i w_i | t_i \in K \right\}; \tag{43}$$

2. *Equazioni cartesiane*
   Si scrivono le coordinate dei punti di $\mathbb{B}$ come soluzioni di un sistema di equazioni lineari ossia

$$\mathbb{B} = \left\{ p(x_1, \dots, x_n) | \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{array} \right\}. \tag{44}$$

Esempio 27.1. *Siano il punto $p_0 = (1, 2, -1)$ e la retta $r_0 = (t, 1-3t, 2+t)$. Cerchiamo le equazioni parametriche e quelle cartesiane della retta r contenente p_0 e parallela ad r_0. Pe quanto riguarda le equazioni parametriche si avrà sicuramente*

$$\begin{cases} x = 1 + lt \\ y = 2 + mt \\ z = -1 + nt \end{cases}$$

Poichè dobbiamo imporre anche che $r \parallel r_0$ allora stiamo richiedendo che $\mathscr{G}(r) = \mathscr{G}(r_0)$ ma abbiamo pure che $\mathcal{B}_{\mathscr{G}(r_0)} =< (1, -3, 1) >$. E' immediato porre $l = 1, m = -3, n = 1$. Passiamo ora alle equazioni in forma cartesiana ponendo

$$\begin{cases} x - 1 = t \\ y - 2 = -3t \\ z + 1 = t \end{cases}$$

Adesso si devono trovare tutti gli (a, b, c) tali che

$$a(x-1) + b(y-2) + c(z+1) = 0 \Longrightarrow (a - 3b + c)t = 0 \Longrightarrow a - 3b + c = 0.$$

Presi $a = 3, b = 1, c = 0$ ed $a = 1, b = 0, c = 1$ si trova

$$\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \end{cases}$$

Supponiamo di avere un'applicazione affine $f : \mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{T}$ e che $\dim \mathbb{S} = n$, $\dim \mathbb{T} = m$. Siano, inoltre, $RA(0, v_1, \dots, v_n)$, $RA(0, w_1, \dots, w_m)$ i riferimenti affini dei rispettivi spazi con associate le coordinate $X = (x_1 \dots x_n)$, $Y = (y_1 \dots y_m)$. Esisteranno B ed $A \in M_{m,n}(K)$ tali che

af
$$Y(f(p)) = AX(p) + B \tag{45}$$

Bisogna capire il perchè di una tale scrittura e soprattutto come produciamo B ed A. Partiamo dal dall'osservare che se vale la (af 45) allora in $p = 0$ abbiamo il punto di coordinte $B = q + b_1 w_1 + \dots + b_m w_m$. E A? Per capirlo passiamo dall'associare ad f un'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \mathscr{G}(\mathbb{S}) &\longrightarrow \mathscr{G}(\mathbb{T}) \\ \overrightarrow{r_1 r_2} &\longmapsto \overrightarrow{f(r_1)f(r_2)} \end{aligned}.$$

Di conseguenza A sarà la matrice associata ad $\tilde{f}$ nelle basi scelte per $\mathscr{G}(\mathbb{S})$ e $\mathscr{G}(\mathbb{T})$. Osserviamo che se φ è un isomorfismo, per costruzione, lo sarà se e solo se lo è $\tilde{f}$. Infine, ricordiamo che nel caso in cui i due spazi affini coincidano è d'uso utilizzare lo stesso riferimento affine per dominio e codominio.

28. Giovedì 18.12.2008 - Spazi euclidei

Definizione 28.1 (Iperpiano). *Sia $\mathbb{H} \subset \mathbb{S}$ un sottospazio affine. Esso è detto iperpiano se*

$$\dim \mathbb{H} = \dim \mathbb{S} - 1 \tag{46}$$

Definizione 28.2 (Spazio euclideo). *Uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ è uno spazio affine su $\mathbb{R}$ la cui giacitura associata $\mathscr{G}(\mathbb{E})$, in quanto spazio vettoriale, è dotata di prodotto scalare.*

Esempio 28.1. *Lo spazio ordinario diventa euclideo una volta scelta l'unità di misura.*

Esempio 28.2. *Sia $\mathbb{E}^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}$. Allora $\mathscr{G}(\mathbb{A}^n_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}^n$ con prodotto scalare standard*

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Definizione 28.3 (Distanza). *Siano $P, Q \in \mathbb{E}$. La distanza tra P e Q è*

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| \tag{47}$$

inoltre vale la disuguaglianza triangolare

tri
$$d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R). \tag{48}$$

Definizione 28.4 (Orientazione di una retta). *Una orientazione di una retta $r \subset \mathbb{E}$ è un vettore non nullo $v \in \mathscr{G}(r)$. Due orientazioni v e w della stessa retta sono equivalenti se $v = kw$ con $k > 0$. Di conseguenza ogni retta possiede al più due orientazioni a meno di equivalenza.*

Definizione 28.5 (Angolo). *L'angolo tra due rette orientate (r, v) e (r', v') è determinato da*

$$\cos \vartheta = \frac{\langle v, v' \rangle}{\|v\| \|v'\|}.$$

e dipende solo dalla classe di equivalenza.

Cerchiamo ore di generalizzare la definizione di angolo tra due rette per passare a quella di angolo tra due iperpiani. La prima cosa da fare sarà dar loro un'orientazione. Sia $\mathbb{H} \subset \mathbb{E}$ un iperpiano. Si ha che

$$\dim \operatorname{Ann} \mathbb{H} = \dim \mathbb{E} - \dim \mathscr{G}(\mathbb{H}) \Longrightarrow \dim \operatorname{Ann} \mathbb{H} = 1.$$

Definizione 28.6 (Orientazione di un iperpiano). *L'orientazione di un iperpiano$\mathbb{H}$ è un vettore non nullo $v \in \operatorname{Ann} \mathscr{G}(\mathbb{H})$. Due vettori v e w sono equivalenti se $v = kw$ con $k > 0$.*

Adesso segue in maniera naturale la definizione di angolo tra due iperpiani.

Definizione 28.7 (Angolo tra due iperpiani). *La stessa che vale per le rette ma tra due iperpiani orientati $(\mathbb{H}_1, v_1)$ e $(\mathbb{H}_2, v_2)$.*

Definizione 28.8 (Riferimento ortonormale). *Un riferimento ortonormale di uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ è un sistema di riferimento affine dove la base di V è ortonormale ossia*

$$RO(0, v_1, \ldots, v_n) \text{ ma si deve avere } \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Esempio 28.3. *Sia $\mathbb{E}$ lo spazio ordinario ed $RO(0, i, j, k)$ il suo riferimento ortonormale. Siano*

$$\mathbb{H}_1 = 3x - y + z + 1 = 0$$
$$\mathbb{H}_2 = x + y - 3z + 5 = 0$$

e ci chiediamo se $\mathbb{H}_1 \perp \mathbb{H}_2$. Scegliamo le loro orientazioni come

$$\mathscr{G}(\mathbb{H}_1) = \{xi + yj + zk | 3x - y + z = 0\} \quad v_1 = (3, -1, 1)$$
$$\mathscr{G}(\mathbb{H}_2) = \{xi + yj + zk | x + y - 3z = 0\} \quad v_2 = (1, 1, -3)$$

e di conseguenza abbiamo due informazioni: per prima cosa scopriamo che i due iperpiani non sono ortogonali dato che $\langle, v_1, v_2 \rangle = -1$ e poi che

$$\cos \vartheta = \frac{-1}{\sqrt{11}\sqrt{11}}.$$

29. Mercoledì 7.1.2009 - Introduzione alla diagonalizzazione

Sia V uno spazio vettoriale su K con $\dim_K V = n < \infty$. Il problema che ci accingiamo a studiare riguarda il comportamento degli endomorfismi $\varphi : V \longrightarrow V$. In particolare cercheremo di rispondere a due quesiti.

(1) Come si comporta $\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k\text{volte}}$ con $k \gg 0$?

(2) Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ vase di V ed $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$. Come calcoliamo A^k ?

Se possiamo scrivere

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ allora } A^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

e di conseguenza abbiamo una buona risposta ad entrambe le domande.

Definizione 29.1 (Diagonalizzabilità). *Un endomorfismo $\varphi : V \longrightarrow V$ è diagonalizzabile se esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che*

dia (49)
$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Inoltre A è diagonalizzata se

$$L_A : K^n \longrightarrow K^n$$
$$x \longmapsto AX$$

è diagonalizzabile ossia se $\exists C \in GL_n(K)$ tale che $A = C\Lambda C^{-1}$ dove Λ è diagonale.

Per capire la definizione abbiamo bisogno di introdurre novità nella notazione:

ggg (50)
$$GL(V) = \{\varphi : V \longrightarrow V \text{ invertibili }\} \qquad GL_n(K) = GL(K^n) = \{A \in M_n(K) | \det A \neq 0\}$$

Osservazione 29.1. *Se $A = C\Lambda C^{-1}$ con Λ diagonale allora*

$$A^k = \underbrace{(C\Lambda C^{-1}) \ldots (C\Lambda C^{-1})}_{n \text{ volte}} = C\Lambda^k C^{-1}$$

Si ha che se φ è diagonalizzabile allora $\exists \mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ tale che

$$M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} \varphi(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ \varphi(v_2) = \lambda_2 v_2 \end{matrix}.$$

Definizione 29.2 (**Autospazio**). *Sia $\varphi : V \longrightarrow V$ e $\lambda \in K$. L'autospazio associato a λ è l'insieme*

eigsp (51)
$$V_\lambda(\varphi) := \{v \in V | \varphi(v) = \lambda v\}.$$

Osserviamo che $V_\lambda(\varphi)$ è un sottospazio vettoriale di V dato che
$$\varphi(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w) = \alpha\lambda v + \beta\lambda w = \lambda(\alpha v + \beta w).$$
Inoltre si ricordi che
$$V_0(\varphi) := \ker\varphi.$$

Definizione 29.3 (**Autovalore**). *Sia $V_\lambda(\varphi)$ l'autospazio associato a λ. Allora λ è un autovalore di φ se $V_\lambda(\varphi) \neq \{\varnothing\}$.*

Osserviamo che φ è diagonalizzabile se esiste $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ i cui elementi sono autovettori di φ.

Definizione 29.4 (**Autovettore**). *Sia $v \in V$. Esso è un autovettore se $\exists\, \lambda \in K$ tale che $v \in V_\lambda$ ossia tale che $\varphi(v) = \lambda v$.*

Vogliamo ora trovare un metodo esplicito per calcolare gli autovalori di un'applicazione lineare φ. Partiamo dall'osservare che $\lambda \in K$ è un autovalore se esolo se $\varphi - \lambda Id_V : V \longrightarrow V$ è invertibile. Infatti se v è non nullo e $\varphi(v) = \lambda v$ allora $(\varphi - \lambda Id_V)(v) = \underline{0}$ e di conseguenza

kl (52)
$$\ker(\varphi - \lambda Id_V)(v) \neq \underline{0}.$$

Quindi se $A \in M_n(K)$ e $\lambda \in K$ allora λ è autovalore di A se e solo se $A - \lambda Id$ non è invertibile ossia quando $\det(\lambda Id - A) = 0$. Introduciamo ora un nuovo strumento molto utile.

Definizione 29.5 (**Polinomio caratteristico n=2**). *Data una matrice $A \in M_n(K)$ (in questo caso n=2) il polinomio caratteristico ad essa associato è*
$$P_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - (a_{12}a_{21}) =$$
$$= \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda \operatorname{Tr} A + \det A$$
Inoltre $\deg P_A(\lambda) = n$.

Quindi grazie all'ultima definizione abbiamo che le radici del polinomio caratteristico sono in realtà gli autovalori di A.

30. Giovedì 8.1.2009 - Calcolo esplicito di autovalori e Criteri di diagonalizzazione

Supponiamo di avere $\varphi : V \longrightarrow V$ e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi distinte di V. Siano inoltre $A := M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ ed $A' := M_{\mathcal{B}'}(\varphi)$. Affermiamo che $P_A = P_{A'}$. Si ha che
$$P_A(\lambda) = \det(\lambda - A) = \det(\lambda - CA'C^{-1}) = \det(C\lambda C^{-1} - CA'C^{-1}) =$$
$$= \det(C(\lambda - A')C^{-1}) = \det(\lambda - A') = P_{A'}(\lambda)$$

Esempio 30.1. *Sia*
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Vogliamo calcolarci A^{11} ma prima dobbiamo capire se A è effettivamente diagonalizzabile. Procediamo calcolandoci il polinomio caratteristico:
$$P_A = \det\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$$
che si annulla con $\lambda_{1,2} = \{2, -1\}$. Vediamo ora chi è l'autospazio associato al primo dei due autovalori:
$$V_2(L_A) = \{X \in \mathbb{R}^2 | (A - 2)X = \underline{0}\} \Longrightarrow A - 2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$
e quindi
$$V_2(L_A) = \left\{ (x_1, x_2) | \begin{array}{r} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right\} = < (1,1) > .$$

Un calcolo analogo ci porta a trovare che $V_{-1}(L_A) =< (2,-1) >$. Scopriamo che A è diagonalizzabile dato che $\mathcal{B} = \{(1,1),(2,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori. Adessso si ha

$$L_A(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (2,2) = 2(1,1) = \lambda_1 v_1.$$

$$L_A(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2,1) = -1(2,-1) = \lambda_2 v_2.$$

Inoltre

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Adesso poniamo $\mathcal{B}_0 = \{(1,0),(0,1)\}$ ossia la base standard e abbiamo che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_0}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned} A = M^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}_0}(L_A) &= M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}_0}(Id_{\mathbb{R}^2}) M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_A) M^{\mathcal{B}_0}_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^2}) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ = & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Infine

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 2048 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

E' arrivato il momento di introdurre dei criteri di natura algebrica che ci consentano di affermare se una matrice è o meno diagonalizzabile. Sarà necessario un lemma preliminare.

Lemma 30.1. *Siano $v_1 \dots v_k \in V$ autovettori di φ associati rispettivamente agli autovalori $\lambda_1 \dots \lambda_k$ a due a due distinti. Allora $\{v_1, \dots, v_k\}$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Se $k = 1$ allora va tutto bene dato che per definizione un autovalore è non nullo. Sia $k \geq 2$ e procediamo per assurdo. Allora esiste in $a \geq 2$ e $v_1 \dots v_a$ autovettori di φ e $\lambda_1 \dots \lambda_a$ autovalori a due a due distinti tali che:

(1) $v_1 \dots v_a$ sono linearmente dipendenti;
(2) $v_1 \dots v_k$ con $k \geq a$ sono autovettori linearmente dipendenti.

Ciò significa che $\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_a v_a = 0$ con i $\mu_i \neq 0 \, \forall i$. Allora

$$\begin{aligned} \varphi(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_a v_a) = \varphi(0) = 0 &= \mu_1 \varphi(v_1) + \cdots + \mu_a \varphi(v_a) = \\ &= \mu_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \mu_a \lambda_a v_a \end{aligned}$$

inoltre $\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_a v_a$ non è multiplo di $\mu_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \mu_a \lambda_a v_a$ perchè i λ_i sono tutti distinti per ipotesi. E questo è assurdo perchè, dato che $a \geq 2$ e quindi esiste almeno un $\lambda_a \neq 0$ ed un $\lambda_i \neq 0$, si ha che

$$\begin{aligned} (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_a v_a) - \lambda_a(\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_a v_a) = 0 = \\ \underbrace{\mu_1}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_a)}_{\neq 0} v_1 + \cdots + \underbrace{\mu_{a-1}}_{\neq 0} \underbrace{(\lambda_{a-1} - \lambda_a)}_{\neq 0} v_{a-1} \end{aligned}$$

□

Teorema 30.1 (Criterio di diagonalizzazione). *Una φ è diagonalizzabile se e solo se*

$$\boxed{\sum_{\lambda \in K} \dim V_\lambda(\varphi) = \dim V} \tag{53}$$

Dimostrazione. Siano $\{\lambda_1 \dots \lambda_d\}$ autovalori di φ, siano $\mathcal{B}_i$ le rispettive basi dei singoli $V_{\lambda_i}(\varphi)$. Dimostreremo che $\{v_{i1} \dots v_{id}\}$ con $1 \leq i \leq n$ è una base di V. Sicuramente abbiamo che

$$|\mathcal{B}| = |\mathcal{B}_1| + \cdots + |\mathcal{B}_d| = \dim V_{\lambda_1}(\varphi) + \cdots + V_{\lambda_d}(\varphi) = \dim V.$$

Inoltre

$$\sum_{ij} \mu_{ij} v_{ij} = \underline{0}$$

ossia

$$\left(\sum_j \mu_{1j} v_{1j}\right) + \cdots + \left(\sum_j \mu_{dj} v_{dj}\right) = \underline{0}$$

dove ogni sommatoria appartiene ai rispettivamente ai $V_{\lambda_1} \dots V_{\lambda_d}$ e per il precedente lemma tutti i $\mu_{ij} \, \forall j$.
Viceversa, supponiamo che φ sia diagonalizzabile. Sappiamo che ciò vuol dire che esiste una base $\mathcal{B}$ di V tale che $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ sia diagonale. Quindi $m_1 + \cdots + m_d = \dim V$ dove i $m_i = \dim V_{\lambda_i}(\varphi)$ e questo conclude. □

31. Lunedì 12.1.2009 - Polinomi e Molteplicità

Diamo qui alcuni elementari risultati di algebra in merito ai polinomi.
Sia $K[x] := \{c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0 | c_i \in \mathbb{C}\}$.

Lemma 31.1. *Sia $p \in K[x]$. Supponiamo che $a \in K$ sia tale che $p(a) = 0$. Allora esiste $q \in K[x]$ tale che $p = (x-a)q$.*

Dimostrazione. Se $a = 0$ allora $p = xq$ e tutto va bene. Supponiamo che $a \neq 0$. Possiamo scrivere $x = a + (x-a)$ e quindi

$$\begin{aligned} p = c_n x^n + \dots c_1 x + c_0 &= c_n((x-a)+a)^n + \cdots + c_1((x-a)+a) + c_0 = \\ &= d_n(x-a)^n + d_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + d_1(x-a) + d_0 \end{aligned} \tag{54}$$

ma poichè per ipotesi $p(a) = 0$ allora necessariamente $d_0 = 0$ e quindi

$$p = (x-a)(d_n(x-a)^{n-1} + d_{n-1}(x-a)^{n-2} + \cdots + d_1)$$

□

Definizione 31.1 (Molteplicità). *Sia $0 \neq p \in K[x]$ e sia $a \in K$. La molteplicità di a in p è definita come*

mult

$$\mathrm{Mult}_a(p) := \left\{\max_K d | p = (x-a)^d q\right\} \tag{55}$$

ossia il massimo grado con cui a annulla p.

Proposizione 31.1. *Sia $0 \neq p \in K[x]$ e siano $a_1 \dots a_m$ radici a due a due distinte di p. Supponiamo che $\mathrm{Mult}_{a_i}(p) = d_i > 0$. Allora dato $0 \neq q \in K[x]$ si ha che*

$$p = (x-a_1)^{d_1} \cdot \dots \cdot (x-a_m)^{d_m} q.$$

La dimostrazione è molto semplice per cui la si lascia al lettore. Ciò detto, da tutto questo, segue un corollario che ci consentirà di fare alcune osservazioni interessanti.

Corollario 3. *Sia $0 \neq p \in K[x]$. Allora*

$$\sum_{a \in K} \mathrm{Mult}_a(p) \leq \deg p \tag{56}$$

Si noti che la scelta del campo in cui si trovano le radici del polinomio è importante e può persino portarci a rendere stretta la disuguaglianza precedente. Basti pensare a $p(x) = (x^2+1)^{100}$ in $\mathbb{R}[x]$. E' evidente che $\sum_{a \in \mathbb{R}} \mathrm{Mult}_a(p) = 0$. Non solo, se si considera il campo $\mathbb{C}$ allora avremo sempre un'uguaglianza e questo si ha perchè vale il seguente risultato, la cui dimostrazione esula dagli obiettivi del corso.

Teorema 31.1 (Teorema fondamentale dell'algebra). [2] *Sia $0 \neq p \in K[x]$. Allora esiste una radice complessa di p.*

Proposizione 31.2. *Sia $a \in K$. Allora*

$$\boxed{\dim V_a(\varphi) \leq \mathrm{Mult}_a(P_\varphi(a))} \tag{57}$$

[2] In realtà il teorema afferma, più precisamente, che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso.

Dimostrazione. Sia $d = \dim V_a(\varphi)$. Supponiamo che $\mathcal{B}' = \{v_1, \dots, v_d\}$ sia una base di $V_a(\varphi)$ ed estendiamola ad una base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_d, v_{d+1}, \dots, v_n\}$ di V. Si ha che

$$M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & a & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Osserviamo per un momento questa matrice. La sottomatrice in alto a sinistra è quella che rappresenta $V_a(\varphi)$ e quindi è una matrice quadrata di dimensione d, la sottomatrice in basso rispetto alla precedente è ovviamente tutta nulla. Le altre due restanti non sappiamo ancora cosa abbiano al loro interno. Adesso abbiamo che

$$P_\varphi(\lambda) = \det(\lambda - M_{\mathcal{B}}(\varphi)) = \begin{pmatrix} \lambda - a & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda - a & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - a & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & \lambda - * \end{pmatrix}.$$

Quindi $P_\varphi)(\lambda) = \det((\lambda - a)^d q(\lambda))$ e quindi $d \leq \mathrm{Mult}_a(P_\varphi(a))$. □

E adesso l'ultimo risultato...

Corollario 4. *Sia V spazio vettoriale su $K = \mathbb{C}$ e $\dim_{\mathbb{C}} V = n < \infty$. Allora φ è diagonalizzabile se e solo se*

$$\dim V_a(\varphi) = \mathrm{Mult}_a(P_\varphi) \quad \forall a \in K \tag{58}$$

Dimostrazione. Sappiamo che $\dim V = \deg P_\varphi$ ma per il teorema fondamentale dell'algebra abbiamo che

$$\deg P_\varphi = \sum_{a \in \mathbb{C}} \mathrm{Mult}_a(P_\varphi)$$

ma sappiamo anche che $\dim V_a(\varphi) \leq \mathrm{Mult}_a(P_\varphi)$, quindi per il Criterio di diagonalizzazione bisogna aggiungere che

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \dim V_a(\varphi) = \dim V = \deg P_\varphi.$$

Mettendo insieme tutto questo troviamo che

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \dim V_a(\varphi) \leq \sum_{a \in \mathbb{C}} \mathrm{Mult}_a(P_\varphi) = \deg P_\varphi \Longrightarrow \dim V_a(\varphi) = \mathrm{Mult}_a(P_\varphi) \quad \forall a \in K$$

□

FINE[3]
md

[3]Le presenti sono frutto della pazienza e della voglia di riordinare i propri appunti di uno studente, il quale, non garantisce sulla bontà di ciò che vi è in esse scritto. Certamente non sono il migliore strumento di apprendimento presente in giro ma...magari possono tornare utili a qualcuno...