PROBLEMI DI EVOLUZIONE
CORSO DEL PROF. NICOLA VISCIGLIA
UNIVERSITÀ DI PISA - A.A. 2012/2013

MATTEO DUNEZ

1. Giovedì 27.9.2012 - Metodi risolutivi per l'equazione di Schrödinger

Studieremo una famiglia di problemi di Cauchy con equazione d'evoluzione

sch
$$\boxed{i\partial_t u - \Delta_x u = f(u) \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \tag{1}$$

con dato iniziale assegnato. Per ora cerchiamo soluzioni di tipo classico ossia $u(x,t)$ differenziabili almeno una volta nella variabile temporale e due volte in quelle spaziali, ma tali che lo siano in ogni punto. Supporremo inoltre $f(u) = u|u|^{\alpha}$.

Osservazione 1.1. *Volendo ritornare per un momento alla teoria sulle EDO e per esempio alla più semplice $\dot{u} = f(u)$, fino ad ora abbiamo fatto le stesse richieste di regolarità. Inoltre come nel caso delle ODE, riuscire a formulare risultati riguardanti esistenza ed unicità delle PDE è equivalente al farlo per l'equazione integrale associata.*

Richiamiamo alcune questioni riguardanti le EDO. Sia

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

con $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Vediamo come si procede nella ricerca della soluzione tramite il metodo delle contrazioni. Partiamo dal notare che

$$u(t) - u_0 = \int_0^t f(u(s))ds$$

quindi la soluzione sarà

sint
$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(u(s))ds \tag{2}$$

Definiamo un operatore $T : v(t) \longmapsto u(t)$ dove $u(t)$ deve soddisfare la (2) e quindi tale da mandare $v(t)$ in

$$u_0 + \int_0^t f(v(s))ds.$$

Quindi nel caso delle EDO possiamo trovare una funzione tale che $T(v) = v$. Proviamo ora a fare la stessa cosa con l'equazione di Schrödinger. Si ha, considerando sempre la presenza del dato iniziale $u(0) = u_0$, che

$$iu_t - \Delta u = f(u) \iff u_t = -i\Delta u - if(u).$$

cerchiamo soluzioni che siano in $\mathscr{C}_t(X)$ dove X è un arbitrario spazio di Banach. Avremo

$$u(t) = u_0(x) + \int_0^t [-i\Delta u(s) - if(u(s))]ds$$

ossia anche in questo caso abbiamo un'applicazione tale che $v \longmapsto T(v) = u(t)$. Ancora una volta si vorrebbe trovare dei punti fissi ossia delle v tali che $T(v) = v$, ma si presenta un grave problema ossia il fatto che lo spazio di Banach in cui viene mappata v non è lo stesso e si ha, inoltre, perdita di regolarità della funzione stessa. Quindi il metodo delle contrazioni si rivela inefficace, o meglio inapplicabile, nel cercare le soluzioni.
L'idea ora è di avvicinarci all'equazione scrivendola in maniera leggermente diversa ossia in forma di

$$u_t + i\Delta u = -if(u).$$

Ora possiamo sperare di trovare un'applicazione tale che $u \mapsto f(u) \mapsto v$. Finalmente il problema si trasforma e diventa lineare ossia

$$v_t + i\Delta v = f(u(t,x)) \tag{3}$$

Ma non ci fermiamo qui dato che il metodo delle contrazioni può essere utile nel trattare questioni di buona positura, ma non è altrettanto utile per lo studio della stabilità della soluzione in un intorno di un punto di equilibrio.
Richiamiamoci ancora alle EDO. Supponiamo di avere $u' = f(u)$ e che $f(0) = 0$ sia un punto d'equilibrio[1]. Lo studio della stabilità avviene attraverso una linearizzazione ossia si scrive $f(u) = Au + r(u)$ dove A è una matrice e r è il resto. Quindi il problema linearizzato ora è

$$\begin{cases} u' = Au + r(u) \\ u(0) = u_0 \simeq 0 \end{cases}$$

Adesso possiamo trovare una mappa tale che $u \longmapsto r(u)$ con u soluzione del problema omogeneo

$$\begin{cases} u' - Au = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

così da poterlo formulare integralmente.

Definizione 1.1. *Sia $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si definisce $e^{tA}u_0$ come l'unica soluzione del problema $u' = Au$ con dato iniziale u_0.*

Teorema 1.1. *Sia $f(t) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$. L'unica soluzione del problema*

t1e
$$\begin{cases} u' - Au = f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4}$$

è

soltle
$$u(t) = e^{tA}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds \tag{5}$$

Dimostrazione. Per il teorema di esistenza ed unicità per le EDO basta calcolare a mano per vedere se è effettivamente soluzione del problema. Inoltre per definizione si ha

$$\begin{cases} (e^{tA}u_0)' = Ae^{tA}u_0 \\ e^{tA}u_0(0) = u_0 \end{cases}$$

quindi dobbiamo provare che

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds\right) = A\int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds + f(t) \\ \left(\int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds\right)(0) = 0 \end{cases}.$$

Osserviamo che la condizione iniziale è automaticamente soddisfatta dato che $\int_0^0 (\dots)$ è nullo. Prima di procedere, ricordiamo che $e^{tA}u_0$ gode della proprietà di gruppo ossia $e^{tA}u_0 e^{sA}u_0 = e^{(t+s)A}u_0$. Adesso procediamo con il rapporto incrementale:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t e^{(t-s)A} f(s)\,ds\right)_{|t=t_0} = \frac{d}{dt} e^{tA}\left(\int_0^t e^{-sA} f(s)\,ds\right)_{|t=t_0}$$

Il termine fuori dalla parentesi l'abbiamo potuto spostare perchè t è fissato. L'ultima quantità è uguale a

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[e^{(t_0+h)A}\int_0^{t_0+h} e^{-sA} f(s)\,ds - e^{t_0 A}\int_0^{t_0} e^{-sA} f(s)\,ds\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[e^{(t_0+h)A}\int_0^{t_0} e^{-sA} f(s)\,ds - e^{t_0 A}\int_0^{t_0} e^{-sA} f(s)\,ds + e^{(t_0+h)A}\int_{t_0}^{t_0+h} e^{-sA} f(s)\,ds\right] =$$

Adesso chiamiamo i primi due addendi I e l'ultimo II. Adesso per $h \to 0$ si ha che

$$II \longrightarrow e^{t_0 A} e^{-t_0 A} f(t_0) = f(t_0)$$

mentre

$$\frac{d}{dt} e^{tA}\left(\int_0^{t_0} e^{-sA} f(s)\,ds\right)_{|t=t_0} = Ae^{tA}\left(\int_0^{t_0} e^{-sA} f(s)\,ds\right) + f(t_0)$$

[1] Si ricordi che lo spazio delle fasi qui è $\mathbb{R}^n$.

quindi in definitiva abbiamo trovato che $\forall\ t_0$

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^{t_0} e^{(t-s)A} f(s)ds\right) = f(t) + A\int_0^{t_0} e^{-sA} f(s)ds.$$

$\square$

2. Il Gruppo di Schrödinger

In dimensione finita il gruppo $e^{tA}u_0$ è sempre ben definito, ma ora abbiamo bisogno di definirlo con $A = i\Delta$ per il problema omogeneo seguente:

id
$$\begin{cases} u_t = i\Delta u \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}. \tag{6}$$

Se il problema è ben posto possiamo ben definire il gruppo. Per farlo, comunque, sarà necessario introdurre gli spazi dove esisteranno le soluzioni del problema da noi opportunamente scelte. Definiamo ora gli spazi di Sobolev con esponente arbitrario: il primo di essi con con cui lavoreremo è

$$H^1(\mathbb{R}^n) := \{u \in L^2, \nabla u \in L^2\}$$

dove $\nabla u \in L^2$ è da intendersi nel senso delle distribuzioni. Più in generale avremo, dato $s \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{H^s(\mathbb{R}^n) := \left\{u \in \mathscr{S} | \hat{u} \in L^2_{loc}, \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty\right\}.} \tag{7}$$

Osserviamo che la precedente definizione di H^1 rientra in questa perchè, per le preoprietà di cui gode la trasformata di Fourier, si ha che

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \iff \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx < \infty$$

Teorema 2.1 (**Definizione di $e^{it\Delta}$**). *Sia il problema (6).*
Allora $\forall\ u_0(x) \in H^1(\mathbb{R}^n)\ \exists!\ u(t,x) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_t, H^s) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_t, H^{s-2})$ soluzione del problema.

Dimostrazione. Utilizziamo la trasformata di Fourier $\mathscr{F}$ per modificare il problema e renderlo manipolabile. Il problema a cui arriviamo è:

lin
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\hat{u}(t,\xi)) = -i|\xi|^2\hat{u}(\xi) \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}. \tag{8}$$

Adesso, una volta fissato ξ il problema è lineare e una volta risolto, poichè $\mathscr{F}$ è una biezione, troviamo la soluzione del problema iniziale. La soluzione di (8) è

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{u}_0(\xi)e^{-it|\xi|^2} \tag{9}$$

per la quale abbiamo fortunatamente (perchè il problema è lineare) risultati di esistenza ed unicità. Ovviamente avremo

$$u(t,x) = \mathscr{F}^{-1}(\hat{u}(t,\xi)).$$

Resta da mostrare che se $u_0 \in H^s$ allora $u(t,x) \in \mathscr{C}_t(H^s)$ ossia che

$$\lim_{t\to t_0} \|u(t,x) - u_o(t_0,x)\|_H^2 = 0$$

ma il precedente limite è

$$\lim_{t\to t_0} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s \left|e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi) - e^{-it_0|\xi|^2}\hat{u}_0(\xi)\right|^2 d\xi \longrightarrow 0$$

per Lebesgue con dominante

$$4\left[(1+|\xi|^2)^s|\hat{u}_0(\xi)|^2\right] \in L^1.$$

Quindi andando a sostituire $u(t,x)$ nella (8) si ha

$$\frac{d}{dt}(\hat{u}(t,\xi)) = -i|\xi|^2\hat{u}_0(\xi)e^{-it|\xi|^2}$$

e di conseguenza la soluzione dovrà stare in un certo H^γ tale che

$$\int (1+|\xi|^2)^\gamma |\xi|^4 |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi < \infty$$

e questo sarà vero per $\gamma + 2 \le s$. Quindi la potenza migliore è $s-2$. $\square$

3. Lunedì 1.10.2012 - Esistenza ed unicità: caso locale

Osservazione 3.1. *Vale la seguente identita:*

u1 (10) $$\|e^{it\Delta}u_0\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}$$

Dimostrazione. Si ha che

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{H^s}^2 = \int (1+|\xi|^2)^s |\underbrace{e^{it\Delta}}_{=1}\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi = \|u_0\|_{H^s}^2.$$

Ma c'è un altro modo per dimostrare la cosa. Sappiamo che $\partial_t u = i\Delta u$ e moltiplicando per $\bar{u}$ abbiamo la seguente identità puntuale.

$$\partial_t u\bar{u} = i\Delta u\bar{u}.$$

L'identità puntuale diventa un'identità integrale nel momento in cui integriamo nella striscia $X := \mathbb{R}^n_x \times [0,T]$ e si ha

$$\iint_X \partial_t u\bar{u}dxdt = \iint_X i\Delta u\bar{u}dxdt.$$

Prendiamo la parte reale (le soluzioni interessanti sono complesse) così da avere

$$\mathrm{Re}\iint_X \partial_t u\bar{u}dxdt = \mathrm{Re}\, i\iint_X |\nabla u|^2 dxdt = 0$$

dove l'ultimo integrale è nullo dato che un numero reale ha parte immaginaria nulla. Adesso osserviamo che $\mathrm{Re}\, u = \frac{1}{2}(u+\bar{u})$ e quindi avremo

$$\mathrm{Re}\iint_X \partial_t u\bar{u}dxdt = \iint_X \frac{1}{2}(\partial_t u\bar{u} + \partial_t \bar{u}u)dxdt = \frac{1}{2}\iint_X \partial_t(|u|^2)dxdt = \text{(per Stokes)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{T\times\mathbb{R}^n} |u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} |u_0|^2 dx = 0.$$

Quindi scopriamo che

$$\frac{1}{2}\int_{T\times\mathbb{R}^n} |u|^2 dx = \frac{1}{2}\int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} |u_0|^2 dx.$$

Questo indica, come vedremo meglio tra poco, che si conserva la massa ossia $\|u_0\|_{L^2}$. □

Adesso siamo nelle condizioni per poter risolvere il problema di Cauchy lineare

lin1 (11) $$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = F(t,x) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Ma chi può essere una candidata soluzione? Al solito portiamo l'equazione d'evoluzione nella forma $\partial_t u - i\Delta u = -iF(t,x)$. Può essere

$$u(t,x) = -i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}F(s)ds$$

ma come si può notare, lo spazio in cui trovarla dipende necessariamente da F. Possiamo ben affermare che se $F(t,x) \in \mathscr{C}_t(H^s) \Longrightarrow u(t,x) \in \mathscr{C}_t(H^s)\cap\mathscr{C}^1_t(H^{s-2})$. Si dimostra esattamente come nel caso del teorema (2.1).

Osservazione 3.2. *Abbiamo la seguente stima, valida per ogni t:*

$$\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}F(s)ds\right\|_{H^\gamma} \le \int_0^t \|F(s)\|_{H^\gamma}ds$$

dalla quale deriva (visto che è valida $\forall\, t$) la prossima.

$$\left\|\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}F(s)ds\right\|_{L^\infty_t H^\gamma_x} \le \|F\|_{L^1_t H^\gamma_x}.$$

Quest'ultima stima è detta stima dell'operatore di Duhamel.
Mentre dalla (10), che richiamiamo, segue quella detta del propagatore libero ossia

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{H^\gamma} = \|u_0\|_{H^\gamma} \Longrightarrow \|e^{it\Delta}u_0\|_{L^\infty_t H^\gamma_x} \le \|u_0\|_{H^\gamma}.$$

4. NLS: ESISTENZA ED UNICITÀ LOCALI CON $F(u)$ POTENZA PURA

Passiamo adesso, finalmente, allo studio del problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger nonlineare (NLS) entrando più nel dettaglio.
Sia la dimensione $n = 1$, la funzione F di tipo potenza pura (pure power, abbreviato p.p.) ossia $F(u) = u|u|^\alpha$. Si ha

nlspp (12)
$$\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u \pm u|u|^\alpha = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

con $u_0(x) \in H^\gamma$ per il momento. La domanda ora è: esiste una $u(t,x) \in \mathscr{C}_t(H^\gamma)$? Bisogna certamente avere un tempo $T(\|u_0\|_{H^\gamma}) > 0$ ossia dipendente dalla norma del dato iniziale ai fini di uno studio locale. In merito è necessario fare due osservazioni:

(1) richiediamo la dipendenza dalla norma del dato iniziale, e non seplicemente dal dato iniziale stesso, perchè sarà molto importante nel momento in cui vorremo estendere la soluzione locale al caso globale; questo perchè se si avesse $T(u_0)$ tempo di blow-up, per tempi t ad esso arbitrariamente vicini, quest'ultimo potrebbe annullarsi rendendo impossibile un'estensione della soluzione locale;
(2) cercheremo, anche, dei γ quanto più piccoli possibile: prenderli alti non è problematico a livello locale, ma lo diventa a livello globale.

Vedremo adesso che si conserva la cosidetta massa. Sia

$$\bar{u}(i\partial_t u + \partial_x^2 u \pm u|u|^\alpha) = 0 \Longrightarrow i\partial_t u\bar{u} + \partial_x^2 u\bar{u} \pm |u|^{\alpha+2} = 0$$

e integrando prendiamone la parte immaginaria.

$$\operatorname{Im}\int_X \left(i\partial_t u\bar{u} + \partial_x^2 u\bar{u} \pm |u|^{\alpha+2}\right)dxdt = 0 \iff$$

$$\iff \operatorname{Re}\int_X (\partial_t u\bar{u})dxdt - \operatorname{Im}\int |\nabla u|^2 dxdt = 0.$$

E' evidente che $\operatorname{Im}\int \pm|u|^{\alpha+2}dxdt \equiv 0$. Adesso si ha

$$\operatorname{Re}\int_X (\partial_t u\bar{u})dxdt = \frac{1}{2}\int_X \partial_t |u|^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_{T\times\mathbb{R}^n} |u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\{0\}\times\mathbb{R}^n} |u_0|^2 dx.$$

Quindi abbiamo trovato che se $u_0 \in L^2$, si conserva $\|u_0\|_{L^2}$; allora $T(\|u_o\|_{L^2}) < \infty$ e dato che il dato iniziale è costante, non avremo esplosioni in tempo finito e una volta arrivati in T potremo estendere e rendere globale la soluzione.
Non è finita qui: anche l'energia si conserva. Vediamo che succede. Al solito partiamo dalla (nlspp 12), ma stavolta moltiplichiamo tutto per $\partial_t\bar{u}$, così da avere che

$$i|\partial_t u|^2 + \partial_x^2 u\partial_t\bar{u} \pm (\partial_t\bar{u})u|u|^\alpha = 0$$

Stavolta prendiamo la parte reale della quantità a sinistra dell'equazione così

$$\operatorname{Re}\int_X i|\partial_t u|^2 + \partial_x^2 u\partial_t\bar{u} \pm (\partial_t\bar{u})u|u|^\alpha dxdt = \operatorname{Re}\int_X \partial_x^2 u\partial_t\bar{u} \pm (\partial_t\bar{u})u|u|^\alpha dxdt = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \int_X -\partial_x u\partial_t(\partial_x\bar{u})dxdt \pm \frac{1}{2}\int_X \partial_t(|u|^2)|u|^\alpha dxdt.$$

Nella riga sopra, il secondo integrale ha come integranda una funzione tale che

$$f'(f^{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{2}{\alpha+2}(f^{\frac{\alpha}{2}+1})'$$

e quindi nel passaggio successivo si avrà

$$-\frac{1}{2}\int_X \partial_t(|\partial_x u|^2)dxdt \pm \frac{1}{2}\int_x \frac{2}{\alpha+2}\partial_t\left(|u|^{2(\frac{\alpha}{2}+1)}\right)dxdt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_X \partial_t(|\partial_x u|^2)dxdt \pm \frac{1}{\alpha+2}\int_X \partial_t(|u|^{\alpha+2})dxdt = 0$$

Adesso, per Stokes, troviamo che

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_x^n} |\partial_x u(T)|^2 dx \pm \frac{1}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}_x^n} |u(T)|^{\alpha+2} dx \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_x} |\partial_x u(0)|^2 dx \pm \frac{1}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}^n_x} |u(0)|^{\alpha+2} dx.$$

Morale della favola: abbiamo scoperto due cose importanti sul problema (12) nlspp ossia che $\forall\, t \in \mathbb{R}$ massa ed energia si conservano ossia, rispettivamente, le seguenti quantità:

sch

$$\boxed{\begin{aligned} &\|u(t,x)\|_{L^2_x} = \|u_0\|_{L^2_x} \\ &E(u(t,x)) = E(u_0) \end{aligned}} \tag{13}$$

dove E è definita come

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n_x} |\nabla u|^2 dx \pm \frac{1}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}^n_x} |u|^{\alpha+2} dx.$$

Osservazione 4.1. *Nel caso defocalizzante (segno -) avremo che* $\sup_t \|u\|_{H^1} < +\infty$ *ed è per questo che studieremo il problema di Cauchy in* H^1.
Inoltre, come vedremo in seguito, il segno sarà indifferente nel teorema di esistenza locale.

Finalmente è ora di trovare la soluzione. Al solito, poichè vogliamo usare il metodo delle contrazioni, ci ridurremo a risolvere il problema per l'equazione integrale associata. Essa sarà

$$\boxed{u(t) = e^{it\Delta}u_0 \pm i\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u|u|^{\alpha}(s)ds} \tag{14}$$

Premettiamo un'utile proposizione, che ci sarà necessaria al fine di utilizzare le contrazioni. Essa ci assicurerà che l'operatore da noi utilizzato avrà come spazio di arrivo lo stesso di partenza.

Proposizione 4.1. *Esistono un* $T(\|u_0\|_{H^1}) > 0$ *ed* $R(\|u_0\|_{H^1}) > 0$ *tali da far si che l'operatore* $T_{u_0} : B_X(0,R) \longrightarrow B_X(0,R)$.

Dimostrazione. Si ha che

$$\begin{aligned} \|T_{u_0}(u(t,x))\|_X = \sup_{t\in[0,T]} \|T_{u_0}(u(t,x))\|_{H^1_x} &\leq \text{(per Minkowski)} \leq \\ &\leq \sup_{t\in[0,T]}\left(\|u_0\|_{H^1} + \|u|u|^{\alpha}(s)\|_{L^1([0,t],H^1)}\right) \leq \\ &\leq \text{(per Hölder)} \leq \|u_0\|_{H^1} + T\|u|u|^{\alpha}(s)\|_{L^\infty([0,T],H^1)} \end{aligned}$$

Adesso stimiamo l'ultimo pezzo in H^1. Prima di farlo ricordiamo che se abbiamo tre funzioni tali che

$$\|f\|_{L^{p_1}} \leq \|f\|^{\vartheta}_{L^{p_0}} \cdot \|f\|^{1-\vartheta}_{L^{p_2}} \qquad \text{con} \qquad \frac{1}{p_1} = \frac{\vartheta}{p_0} + \frac{1-\vartheta}{p_2}.$$

Torniamo a noi:

$$\|u|u|^{\alpha}\|_{H^1} = \|u|u|^{\alpha}\|_{L^2} + \|\nabla(u|u|^{\alpha})\|_{L^2}.$$

Per il primo termine si ha

$$\|u|u|^{\alpha}\|_{L^2} = \|u\|^{\alpha+1}_{L^{2(\alpha+1)}} \leq \|u\|^{\vartheta(\alpha+1)}_{L^2}\|u\|^{(1-\vartheta)(\alpha+1)}_{L^\infty} \leq \|u\|^{\alpha+1}_{H^1}$$

con l'ultima stima dovuta all'immersione $H^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$.
Per il secondo termine si ha

$$\|\nabla(u|u|^{\alpha})\|_{L^2} \leq \|(\nabla u)|u|^{\alpha}\|_{L^2} \leq C\|\nabla u\|_{L^2}\|u^{\alpha}\|_{L^\infty} \leq C\|u\|^{\alpha+1}_{H^1}.$$

Quindi in definitiva si ha

$$\|T_{u_0}(u(t,x))\|_X \leq \|u_0\|_{H^1} + T\left(\sup_t \|u\|_{H^1}\right)^{\alpha+1}. \tag{15}$$

Allora esistono T ed R tali che

$$\|u_0\|_{H^1} + TR^{\alpha+1} \leq R.$$

□

5. Giovedì 4.10.2012 - Teorema di esistenza ed unicità locali

Sia da ora $X = X_T$. Abbiamo visto nel precedente lemma che se le

$$\|u_0(t,x)\|_{X_T} \leq R \Longrightarrow \|T_{u_0}(u)\|_{X_T} \leq C\|u_0\|_{H^1} + T\|u\|^{\alpha}_{H^1} \leq C\|u_0\|_{H^1} + TR^{\alpha} \leq R.$$

Enunciamo ora il teorema, subito dopo svilupperemo alcuni lemmi la cui dimostrazione ci porterà, sostanzialmente, a dimostrarlo.

Teorema 5.1. *Sia il problema* hlspp *(12).*
Allora $\forall\, u_0 \in H^1(\mathbb{R}), \forall\, \alpha > 0\, \exists\, T(\|u_0\|_{H^1}) > 0, \exists!\, u(t,x) \in \mathscr{C}([0,T], H^1_x)$ *soluzione dell'equazione integrale.*

Partiamo con il primo lemma: si tratta di un risultato d'immersione.

Lemma 5.1. *Valgono le seguenti immersioni, di cui la seconda è una generalizzazione della prima:*

$$H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}) \qquad H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \;\; \forall\, s > \frac{n}{2} \tag{16}$$

Dimostrazione. Daremo due dimostrazioni diverse: nella prima utilizzeremo la trasformata di Fourier, mentre nella seconda avremo un approccio più fisico.
Vogliamo stimare puntualmente $u(x)$ cioè mostrare che $\sup|u| \leq C\|u\|_{H^1}$. Per fare questo supponiamo che u possegga una certa regolarità quindi la penseremo come $u \in \mathscr{S}$ (per far si che la trasformata di Fourier agisca in modo lineare e continuo) ossia tale che

$$u(x) = \int e^{ix\cdot\xi}\hat{u}(\xi)d\xi \leq \text{(C-S)} \leq \int |\hat{u}(\xi)|d\xi = \int |\hat{u}(\xi)|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} \leq$$

$$\leq \left(\int \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^s}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int |\hat{u}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^s d\xi\right)^{\frac{1}{2}} = C\|u\|_{H^s}.$$

Osserviamo che la condizione $s > \frac{n}{2}$ deriva dalla convergenza dell'integrale della trasformata.
Passiamo alla dimostrazione del secondo tipo: affermiamo che $\sup|u(x)| \leq C\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\|u'\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}$ che è, tra l'altro, un'asserzione più forte della precedente. Qui supporemo di lavorare con $u \in \mathscr{C}^{\infty}_0$. Detto questo, abbiamo

$$|u(x)|^2 = \left|\int_x^{\infty} \frac{d}{dt}(|u(t)|)^2 dt\right| = \left|\int_x^{\infty}(u'\bar{u} + \bar{u}'u)dt\right| \leq$$

$$\leq 2\int_x^{\infty}|u'||u|dt \leq \text{(C-S)} \leq 2\left(\int_{\mathbb{R}}|u'|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}|u|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{L^2}\|u'\|_{L^2}$$

□

Osservazione 5.1. *E' a causa di questa immersione che, come abbiamo già avuto modo di vedere,*

$$\|u|u|^{\alpha}\|_{L^{\infty}} \leq C\|u\|^{\alpha+1}_{H^1}.$$

Osserviamo, infine, che tale disuguaglianza è verificata su $\mathbb{R}$ *ma non su* $\mathbb{R}^2$ *ossia su* $\mathbb{C}$*, che il campo più di nostro interesse.*

Ora non ci resta che mostrare che T_{u_0} è una contrazione (per ogni α) su $B_{X_T}(0,R)$ con

$$\|u\|_{X_T} := \sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{H^1}.$$

In effetti il problema è che non lo è. Per superare il problema dovremo considerare una norma più debole[2]:

$$\|u\|_{X_{T'}} := \sup_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_{L^2}.$$

Lemma 5.2. *L'operatore*

$$T_{u_0} : \left(B_{X_T}(0,R), \sup_{[0,T]}\|u\|_{L^2}\right) \longrightarrow \left(B_{X_T}(0,R), \sup_{[0,T]}\|u\|_{L^2}\right)$$

è una contrazione con $T \ll 1$.

[2] La norma che introduciamo in genere non è completa, ma in questo caso si perchè B_{X_T} è limitato. Su tale questione vale la pena precisare che in genere cerchiamo una $\{u_n\} \in H^1$ tale che : $\|u_m - u_n\|_{L^2} \longrightarrow 0$ per $n,m \to \infty$ e con la proprietà che $\|u_n\|_{H^1} < C$. Se si ha questo, di conseguenza la prima proprietà implica che $u_n \longrightarrow u$ in L^2 e la seconda che $u_n \rightharpoonup v$ in H^1 e questi due limiti devono coincidere. Se questo avviene abbiamo concluso.

Dimostrazione. (*Prima parte*)
La cosa da mostrare, in questi casi, è che

$$\sup_{[0,T]} \| T_{u_0}(u) - T_{u_0}(v) \|_{L^2} \leq C \sup_{[0,T]} \| u - v \|_{L^2} \qquad \forall\, u, v \in B_{X_T}.$$

con $C < 1$. Procediamo:

$$\begin{aligned} \| T_{u_0}(u) - T_{u_0}(v) \| &= \left\| \pm i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} (u|u|^\alpha(s) - v|v|^\alpha(s)) ds \right\|_{L^2} \leq \\ &\leq \int_0^t \left\| \pm i e^{i(t-s)\Delta} (u|u|^\alpha(s) - v|v|^\alpha(s)) \right\|_{L^2} ds \leq \\ &\leq \| u|u|^\alpha(s) - v|v|^\alpha(s) \|_{L^1([0,T])L^2_x} \leq \\ &\leq T \| u|u|^\alpha(s) - v|v|^\alpha(s) \|_{L^\infty_t L^2_x}. \end{aligned}$$

Adesso stimiamo con t bloccato così da avere che

$$\| u|u|^\alpha - v|v|^\alpha \|_{L^2_x} \leq (*) \| u - v \|_{L^2}$$

con $(*)$ una quantità che dobbiamo ancora identificare. Per questo sarà necessario un lemma, che utilizzeremo nella seconda parte della dimostrazione. □

Lemma 5.3. *Vale la seguente stima:*

s1

$$|u|u|^\alpha - v|v|^\alpha| \leq C(u - v) \left(|u|^\alpha + |v|^\alpha \right) \quad \forall\, u, v \in \mathbb{C}^3 \tag{17}$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned} |u|u|^\alpha - v|v|^\alpha| &= |u|u|^\alpha + v|u|^\alpha - v|u|^\alpha - v|v|^\alpha| \leq \\ &\leq |u - v||u|^\alpha + |v| \left| |u|^\alpha - |v|^\alpha \right| \leq \\ &\leq (\text{Lagrange con } \xi \in [|v|, |u|]) \leq |u - v||u|^\alpha + C|v| \left(|\xi|^{\alpha - 1} ||u| - |v|| \right) \leq \\ &\leq C|u - v||u|^\alpha + |v||u - v||v|^{\alpha - 1} = |u - v| \left(|u|^\alpha + |v|^\alpha \right) \end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato la disuguaglianza triangolare. □

Ed ora la seconda parte della dimostrazione che avevamo lasciato in sospeso.

Dimostrazione. (*Seconda parte*)
Per concludere la stima dobbiamo integrare la stima puntuale alla quale eravamo giunti.

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |u|u|^\alpha - v|v|^\alpha|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq C \left(\int_{\mathbb{R}} |u - v|^2 (|u|^\alpha + |v|^\alpha) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq (\text{Hölder}) \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} |u - v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{[0,T]} (|u|^\alpha + |v|^\alpha) \leq \\ &\leq C \| u - v \|_{L^2} \left(\| u \|^\alpha_{H^1} + \| v \|^\alpha_{H^1} \right) \end{aligned} \tag{18}$$

quindi ora, possiamo terminare la stima in cui c'era il termine non conosciuto $(*)$. Si ha

s2

$$\| T_{u_0}(u) - T_{u_0}(v) \|_{B_{X_{T'}}} \leq T \| u|u|^\alpha(s) - v|v|^\alpha(s) \|_{L^\infty_t L^2_x} \leq T \left(\sup_{[0,T]} \| u - v \|_{L^2_x} \right) 2R^\alpha \tag{19}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato il lemma di cui sopra. Ora sappiamo che per T piccolo è una contrazione. □

Vale la pena di riassumere quanto dimostrato: in dimensione $n = 1$ riusciamo a trovare un tempo T dipendente dalla norma del dato iniziale e un raggio R grazie ai quali abbiamo dimostrato che T_{u_0} è una contrazione; questo vale per qualsiasi esponente α sia nel caso focalizzante che in quello defocalizzante. Sinteticamente, si ha che

$$\boxed{\begin{cases} i\partial_t u + \partial_x^2 u \pm u|u|^\alpha = 0 \\ u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \end{cases} \implies \forall\, \alpha\, \exists! u \in \mathscr{C}\left([0, T(\| u_0 \|_{H^1})] \right).} \tag{20}$$

[3] Se fossimo in $\mathbb{R}$ sarebbe una conseguenza del teorema del valore medio.

Ora bisogna cominciare a pensare ad un'eventuale estesione al caso globale: cominciamo con una proposizione.

Proposizione 5.1. *Vale l'alternativa:*

(1) *Esiste un tempo di vita massimo $T_{max}(u_0)$ tale che è soluzione*

$$u(t,x) \in \mathscr{C}([0,T_{max}], H^1(\mathbb{R}))$$

e che

$$\limsup_{t \to T_{max}^-} \|u(t)\|_{H^1} = +\infty;$$

(2) *$T_{max} = +\infty$ e quindi $u(t,x) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}, H^1(\mathbb{R}))$.*

Corollario 1. *Si consideri la (12) con segno negativo.*
Allora $\forall\, u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \Longrightarrow T_{max} = +\infty$.

Dimostrazione. Sfrutteremo il fatto che esistono le quantità conservate nel tempo. Sia, per assurdo, $T_{\max} < +\infty$. Ma sappiamo che la massa è tale che $\|u(t,x)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}\ \forall\, t \in [0, T_{\max}]$ ed anche che

$$E(u) = \frac{1}{2}\int |\partial_x u|^2 dx + \frac{1}{\alpha+2}\int |u|^{\alpha+2} dx \equiv E(u_0).$$

Unendo insieme le due cose si ha che

$$\frac{1}{2}\|u(t,x)\|_{H^1} + \frac{1}{\alpha+2}\|u\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} = \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2} + E(u_0) = cost \Longrightarrow$$

$$\|u\|_{H^1}^2 \leq \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 + E(u_0)$$

e quindi $\|u\|_{H^1}$ è controllata da una quantità finita e costante e quindi si dovrà necessariamente avere $T_{\max} = +\infty$. □

6. Lunedì 8.10.2012 - NLS: teoremi di esistenza globale

Diamo le seguenti notazioni:

$$(21) \qquad (\text{NLS})_{\alpha,\text{foc}} := \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + u|u|^\alpha = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \qquad (\text{NLS})_{\alpha,\text{def}} := \begin{cases} i\partial_t u + \Delta u - u|u|^\alpha = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Fino ad ora abbiamo lavorato in dimensione 1 (ossia $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x$) e abbiamo visto che $\forall\, \alpha\, (\text{NLS})_{\alpha,\text{foc}}$ è ben posta localmente in $H^1(\mathbb{R})$ ossia $\forall\, u_0 \in H^1(\mathbb{R})\, \exists\, T(\|u_0\|_{H^1}) > 0, \exists! u(t,x) \in \mathscr{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}))$. Adesso vedremo cosa si può dire per $(\text{NLS})_{\alpha,\text{foc}}$ per quanto riguarda la buona positura globale. Vedremo che essa dipenderà da ipotesi aggiuntive riguardanti α e la norma di u_0. Ricordiamo che in questo caso si ha

$$E(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{\alpha+2}\int |u|^{\alpha+2} dx$$

Teorema 6.1 (Esistenza globale per $(\text{NLS})_{\alpha,\text{foc}}$ per dati piccoli, $n=1$). *Sia $\alpha > 0$ fissato. Allora esiste $\varepsilon_0(\alpha) > 0$ tale che la soluzione di $(NLS)_{\alpha,foc}$ è globale ossia $T_{max} = +\infty$ se $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} < \varepsilon_0$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t)|^2 dx - \frac{1}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^{\alpha+2} dx = E(u_0) \iff$$

$$\iff \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t)|^2 dx + \frac{1}{\alpha+2}\|u(t)\|_{H_x^1(\mathbb{R})}^{\alpha+2}.$$

Ma siccome per ipotesi $\|u_0\|_{H^1(\mathbb{R})} < \varepsilon_0$ possiamo stimare i singoli pezzi sotto integrale. Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0|^{\alpha+2} dx \leq (\sup |u_0|^\alpha) \int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 dx \leq \|u\|_{L^\infty}^\alpha \|u\|_{L^2}^2 \leq \|u\|_{H^1}^{\alpha+2}$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo potuto sostituire u_0 con $u(t)$ perchè la maggiorazione è avvenuta solo tramite Hölder. Per il secondo pezzo si ha

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u_0|^2 dx \leq \|u_0\|_{H^1}^2 \leq \varepsilon_0^2$$

pertanto

$$|E(u_0)| \leq \varepsilon_0^2 + C\varepsilon_0^{\alpha+2} \leq C\varepsilon_0^2$$

con l'ultima stima dovuta al fatto che, per comodità, abbiamo supposto $\varepsilon_0 < 1$. Quindi troviamo che

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t)|^2 dx \leq C\varepsilon_0^2 + \|u(t)\|_{H^1}^{\alpha+2}.$$

Adesso, poichè $\|u(t)\|_{L^2} = \|u_0\|_{L^2}$ lo sommiamo a destra e sinistra così da avere

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{H^1} \leq C\varepsilon_0^2 + \|u(t)\|_{H^1}^{\alpha+2} + \underbrace{\frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2}_{\leq \frac{1}{2}\varepsilon_0^2} \leq C\varepsilon_0^2 + \|u(t)\|_{H^1}^{\alpha+2}$$

dove il termine sopra la graffa è stato inglobato in termini di ε_0^2. Non si sarebbe potuto fare se non si avesse che $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^1}$. Ora, però, questo tipo di stima non convince perchè la $u(t)$, che vogliamo stimare, si trova sia a destra che a sinistra della disuguaglianza nella stessa norma. E' necessario, quindi, fare ricorso ad un argomento di continuità. Chiamiamo $s \doteq \|u(t)\|_{H^1}$ così perveniamo al dover valutare i sottolivelli tali che

$$u(t) \in \left\{\frac{1}{2}s^2 - C\varepsilon_o^2 - s^{\alpha+2} \geq 0\right\} \iff \left\{\frac{1}{2}s^2 - s^{\alpha+2} \geq 0\right\}.$$

Nella figura si può osservare come si comporti, qualitativamente la funzione: nel primo e nel secondo caso abbiamo che interseca l'asse delle ascisse in almeno un punto, così da avere due componenti connesse (rispettivamente I e II). Qui entra in gioco la scelta del dato iniziale: come reso evidente dall'ipotesi di prenderlo minore di ε_0, la validità si ha per dati iniziali piccoli; scelto un dato in I, per la continuità della funzione tale che $t \longmapsto \|u(t)\|_{H^1}$, esso non potrà mai andare a finire in II. Quindi si ha $T_{\max} = +\infty$. Al contrario non possiamo fare alcuna affermazione se il dato iniziale viene preso grande.

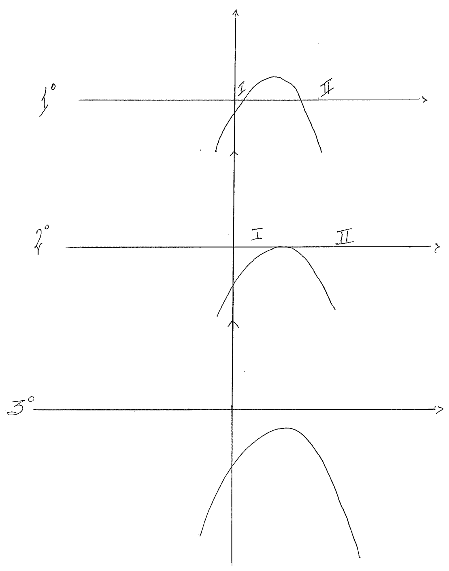

FIGURA 1. Argomento di continuità per dati iniziali piccoli $\boxed{1}$

□

Teorema 6.2 (Esistenza globale per $(\mathbf{NLS})_{\alpha,\mathbf{foc}}$, condizioni su α, n=1). *Si consideri $(NLS)_{\alpha,foc}$ con $\alpha < 4$. Allora $(NLS)_{\alpha,foc}$ è globalmente ben posto $\forall\, u_0 \in H^1(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Al solito abbiamo che l'energia si conserva: portando già un pezzo a destra abbiamo che

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\partial_x u(t)|^2 dx = E(u_0) + \frac{1}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}} |u|^{\alpha+2} dx = E(u_0) + \frac{1}{\alpha+2}\|u\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}.$$

Ancora, sommiamo a destra e a sinistra $\|u()\|_{L^2}$ così da avere:

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_{H^1}^2 = E(u_0) + \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\alpha+2}\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \leq C(u_0) + \frac{1}{\alpha+2}\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}.$$

Vogliamo stimare l'ultimo pezzo e per farlo useremo anche le seguenti due stime:

$$\boxed{\begin{array}{l} \|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^1} \\ \|u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^1}^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \end{array}} \tag{22}$$

Si ha che

$$\|u\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \leq \left(\int |u|^2 dx\right)\|u\|_{L_x^\infty}^{\alpha} = \|u_0\|_{L^2}^2\|u\|_{L_x^\infty}^{\alpha}$$

si osservi che nell'ultima stima $u(t)$ è stato sostituito da u_0 perchè stiamo supponendo che soddisfi l'equazione. Proseguiamo con

$$\|u_0\|_{L^2}^2\|u\|_{L_x^\infty}^{\alpha} \leq C\|u_0\|_{L^2}^2\|u\|_{H^1}^{\frac{\alpha}{2}}\|u\|_{L^2}^{\frac{\alpha}{2}} = C\|u_0\|_{L^2}^{2+\frac{\alpha}{2}}\|u\|_{H^1}^{\frac{\alpha}{2}} \leq C'(u_0)\|u\|_{H^1}^{\frac{\alpha}{2}}$$

e di conseguenza si ha per la soluzione in H^1 che

$$\|u(t)\|_{H^1}^2 \leq C(u_0) + C'(u_0)\|u(t)\|_{H^1}^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Quindi dobbiamo, come nella dimostrazione precedente studiare i sottolivelli tali che

$$u(t) \in \{s^2 - C - C's^{\frac{\alpha}{2}} \geq 0\}$$

e quindi troviamo che se $\alpha < 4$ allora

$$\lim_{s\to+\infty} s^2 - C - C's^{\frac{\alpha}{2}} = +\infty.$$

□

Adesso mostreremo che se $\alpha \geq 4$ esistono soluzioni che esplodono in tempo finito. Con le EDO si dimostrava, in genere, utilizzando il metodo del confronto con le potenze, ma è un metodo che va bene se si è in $\mathbb{R}$ dove vale una sorta di principio del massimo. In $\mathbb{C}$ dovremo avere un approccio diverso.

Teorema 6.3 (Glassey 1970). *Si ha che se $\alpha \geq 4$, $E(u_0) < 0$ per $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ ed*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^2|u_0|^2 dx < +\infty$$

allora la soluzione di $(NLS)_{\alpha,foc}$ esplode in tempo finito.

Prima di procedere con la dimostrazione, vediamo un pò qual'è l'idea che c'è dietro. Innanzitutto sappiamo che $u_0 \in H^1 \Longrightarrow u(t) \in H^1$; mostreremo che

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}} |x|^2|u(t)|^2 < C < 0.$$

Se questo accade significa che ci troviamo al di sotto di una parabola. Ma questo è assurdo perchè $|x|^2|u(t)|^2$ è positivo. Questo ci porterà a dire che la soluzione è esplosa prima di arrivare a $-\infty$.

Osservazione 6.1. *Perchè ha senso che $E(u_0)$ possa essere negativa? Lo vediamo subito se prendiamo $\lambda\varphi \in H^1(\mathbb{R})$. Si ha*

$$E(\lambda\varphi) = \frac{\lambda^2}{2}\int |\partial_x\varphi|^2 dx - \frac{\lambda^{\alpha+2}}{\alpha+2}\int |\varphi|^{\alpha+2} dx < 0$$

per $\alpha > 0$.

Dimostrazione. Calcoliamoci

$$\frac{d^2}{dt^2}\int |x|^2|u(t)|^2dx.$$

ricordandoci che $i\partial_t u+\partial_x^2 uu|u|^\alpha=0 \Rightarrow u_t=i\partial_x^2 u+iu|u|^\alpha$ ed $\bar u_t=-i\partial_x^2\bar u-i\bar u|u|^\alpha$. Si ha che

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\int x^2u\bar u dx\right) &= \int x^2u_t\bar u dx+\int x^2\bar u_t u dx=\\
&=\int x^2(i\partial_x^2 u+iu|u|^\alpha)\bar u dx+\int x^2(-i\partial_x^2\bar u-i\bar u|u|^\alpha)u=\\
&=i\int x^2\bar u\partial_x^2 u dx-i\int x^2u\partial_x^2\bar u dx=\\
&=\left(-i\int x^2\underbrace{|\partial_x u|^2}_{\partial_x u\partial_x\bar u}dx-2i\int x\bar u\partial_x u dx\right)+\\
&+\left(2i\int xu\partial_x\bar u dx+i\int x^2|\partial_x u|^2dx\right)=2i\int xu\partial_x\bar u-x\bar u\partial_x u dx=\\
&=2i2i\,\mathrm{Im}\int xu\partial_x\bar u dx=-4\,\mathrm{Im}\int xu\partial_x\bar u dx \qquad (23)
\end{aligned}$$

Adesso bisogna derivare nuovamente ciò che abbiamo trovato. Si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(-4\,\mathrm{Im}\int x\partial_x\bar u u dx\right)=-4\,\mathrm{Im}\int x(\partial_x\partial_t\bar u)u dx-4\,\mathrm{Im}\int x\partial_x\bar u\partial_t u=\\
&=-4\,\mathrm{Im}\int\partial_x(-i\partial_x^2\bar u-i\bar u|u|^\alpha)u dx-4\,\mathrm{Im}\int x\partial_x\bar u(i\partial_x^2 u+iu|u|^\alpha)dx=\\
&=-4\,\mathrm{Re}\int x\partial_x(-\partial_x^2\bar u-\bar u|u|^\alpha)u dx-4\,\mathrm{Re}\int x\partial_x\bar u(\partial_x^2 u+u|u|^\alpha)dx=\\
&=-4\,\mathrm{Re}\left[\int(\partial_x^2\bar u+\bar u|u|^\alpha)(u+\partial_x(xu))\right]-4\,\mathrm{Re}\left[\int x\partial_x\bar u(\partial_x^2 u)+x(\partial_x\bar u)u|u|^\alpha\right]=\\
&=-4\left[\int(\partial_x^2\bar u+\bar u|u|^\alpha)u dx+\int(\partial_x^2\bar u+\bar u|u|^\alpha)(x\partial_x u)dx\right]-\\
&-4\,\mathrm{Re}\left[\int x\partial_x\bar u\partial_x^2 u+x\partial_x\bar u u|u|^\alpha dx\right]=\\
&=-4\,\mathrm{Re}\left[\int\partial_x^2\bar u u+|u|^{\alpha+2}+x\partial_x^2\bar u\partial_x u+\bar u x\partial_x u|u|^\alpha dx\right]-\\
&-4\,\mathrm{Re}\left[\int x\partial_x\bar u\partial_x^2 u+x\partial_x\bar u u|u|^\alpha dx\right]=\\
&=4\int|\partial_x u|^2dx-4\int|u|^{\alpha+2}dx-2\int x\partial_x(|\partial_x u|^2)dx-\\
&-2\int x\partial_x(|\partial_x u|^2)dx-2\int x|u|^\alpha\partial_x(|u|^2)dx=\\
&=8\int|\partial_x u|^2dx-4\int|u|^{\alpha+2}dx-\frac{8}{\alpha+2}\int x\partial_x(|u|^{\alpha+2})dx=\\
&=8\int|\partial_x u|^2dx-4\int|u|^{\alpha+2}dx+\frac{8}{\alpha+2}\int|u|^{\alpha+2}dx=\\
&=8\int|\partial_x u|^2dx+\left(\frac{8}{\alpha+2}-4\right)\int|u|^{\alpha+2}dx. \qquad (24)
\end{aligned}$$

Quindi abbiamo scoperto che

glossey

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int|x|^2|u(t,x)|^2dx=8\int|\partial_x u(t,x)|^2dx-\frac{4\alpha}{\alpha+2}\int|u|^{\alpha+2}dx} \qquad (25)$$

A cosa ci è servito tutto questo?
Prendiamo $\alpha=4$: si ha che la derivata seconda della varianza è $16E(u_0)<0$, ma la varianza non può essere negativa: poichè è continua prima di diventare negativa deve essersi annullata: questo

è impossibile e signfica che la soluzione è necessariamente esplosa prima. In generale avremo

$$16\left[\frac{1}{2}\int|\partial_x u|^2dx-\frac{\alpha}{4(\alpha+2)}\int|u|^{\alpha+2}dx\right]=16E(u_0)+\left(\frac{16}{\alpha+2}-\frac{16\alpha}{4(\alpha+2)}\right)\int|u|^{\alpha+2}dx$$

e infine si ha

$$\left(\frac{16}{\alpha+2}-\frac{16\alpha}{4(\alpha+2)}\right)\le 0 \iff \alpha\ge 4.$$

□

Dimostriamo adesso, in maniera rigorosa, che l'energia rappresenta una quantità conservata. In sostanza si tratta di giustificare, nella prima derivazione formale dell'asserto, la moltiplicazione per $\bar{u}$. Utilizzeremo i mollificatori. Ricordiamo che $u\in L^2 \Rightarrow u*\rho_\varepsilon\in\mathscr{C}^\infty$. Sappiamo che u soddisfa

$$\begin{cases} i\partial_t u+\partial_x^2 u\pm u|u|^\alpha=0\\ u(0,x)=u_0(x)\in H^1(\mathbb{R})\end{cases}$$

ma vogliamo sapere quale equazione soddisferà $u*\rho_\varepsilon$. Partiamo dal ricordare che

$$u(t,x)=e^{it\partial_x^2}u_0+\int_0^t e^{i(t-s)\partial_x^2}(u|u|^\alpha)ds$$

ed ora vediamo come cambiano i due pezzi una volta convoluti con il mollificatore. Si ha

$$\widehat{\rho_\varepsilon*e^{it\Delta}}u_0=\widehat{e^{it\Delta}}\widehat{(\rho_\varepsilon*u_0)}=e^{-it|\xi|^2}\hat{\rho_\varepsilon}\hat{u}_0$$

ma $\widehat{\rho_\varepsilon*e^{it\Delta}}u_0=\hat{\rho_\varepsilon}e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0$ e quindi $\hat{\rho_\varepsilon}e^{-it|\xi|^2}\hat{u}_0=e^{-it|\xi|^2}\hat{\rho_\varepsilon}\hat{u}_0$, ossia il mollificatore commuta. Osserviamo che se $u_0\in L^2$ e $\rho_\varepsilon\in\mathscr{S}$ allora $u_0*\rho_\varepsilon\in H^N$ perchè $L^2*\mathscr{S}\subset H^N$.
Infine troviamo

$$u(t)*\rho_\varepsilon=e^{it\partial_x^2}(u_0*\rho_\varepsilon)+\int_0^t e^{i(t-s)\partial_x^2}(\rho_\varepsilon*u|u|^\alpha(s))ds$$

dove $\rho_\varepsilon*u|u|^\alpha\in\mathscr{C}_t(H^N)$ ed $u\in\mathscr{C}^1(H^{N-2})\cap\mathscr{C}^0(H^N)\,\forall N$. Abbiamo scoperto che $u_\varepsilon:=u_0*\rho_\varepsilon$ soddisfa la (NLS) con dato iniziale $u(0,x)=u_\varepsilon\in H^N(\mathbb{R})$, ma poichè il mollificatore non commuta con il termine nonlineare, al suo posto, avremo $\rho_\varepsilon*u|u|^\alpha$. Quindi il problema è diventato:

nlsmol (26)
$$\begin{cases} i\partial_t u_\varepsilon+\partial_x^2 u_\varepsilon\pm\rho_\varepsilon*u|u|^\alpha=0\\ u_\varepsilon(0,x)=u_0*\rho_\varepsilon(x)\end{cases}$$

Per il problema di Cauchy (26) ci basterà avere $u_\varepsilon\in\mathscr{C}_t(H^2)\cap\mathscr{C}_t^1(L^2)$. Moltiplichiamo l'equazione per $\bar{u}_\varepsilon$ e prendiamo la parte immaginaria quindi

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}\iint_{\mathbb{R}\times[0,T]} i\partial_t u_\varepsilon\bar{u}_\varepsilon dxdt+\mathrm{Im}\iint_{\mathbb{R}\times[0,T]}\partial_x^2 u_\varepsilon\bar{u}_\varepsilon dxdt\pm\mathrm{Im}\iint_{\mathbb{R}\times[0,T]}\rho_\varepsilon*(u|u|^\alpha)\bar{u}_\varepsilon dxdt=\\ &=\mathrm{Re}\iint_{\mathbb{R}\times[0,T]}\partial_t u_\varepsilon\bar{u}_\varepsilon dxdt\pm\mathrm{Im}\iint_{\mathbb{R}\times[0,T]}\rho_\varepsilon*(u|u|^\alpha)\bar{u}_\varepsilon dxdt=:A+B\equiv 0\end{aligned}$$

dato che il secondo termine nella prima riga, se calcolato per parti, è nullo.
Per quanto riguarda il calcolo di A abbiamo il seguente lemma.

Lemma 6.1. *Si ha* $\forall\, v\in\mathscr{C}_t^1(L_x^2)$ *che*

(27)
$$\mathrm{Re}\iint_{\mathbb{R}\times[0,T]}\partial_t v\bar{v}dx=\|v(T)\|_{L_x^2}^2-\|v(0)\|_{L_x^2}^2$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L_x^2}^2&=\int\frac{d}{dt}v\bar{v}dx+\int\frac{d}{dt}\bar{v}vdx=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left[\|v(t_0+h)\|_{L_x^2}^2-\|v(t_0)\|_{L_x^2}^2\right]=\\ &=\lim_{h\to0}[(v(t_0+h),v(t_0+h))-(v(t_0),v(t_0))]=\\ &=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[(v(t_0+h),v(t_0))-(v(t_0),v(t_0))]+\\ &+\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[(v(t_0+h),v(t_0+h)-v(t_0))]=\\ &=(\text{per la linearità})=\lim_{h\to0}[(v(t_0+h)-v(t_0),v(t_0))]+\\ &+\lim_{h\to0}[(v(t_0+h),v(t_0+h)-v(t_0))]=(v'(t_0),v(t_0))+(v(t_0),v'(t_0)).\end{aligned}$$

□

Tornando al nostro calcolo sull'energia, resta da mostrare che

$$\operatorname{Im}\iint_{\mathbb{R}\times[0,T]}\rho_\varepsilon*(u|u|^\alpha)\,dx\,dt\xrightarrow{\varepsilon\to 0}0.$$

Sappiamo che, per t fissato, $\bar{u}_\varepsilon \xrightarrow{L^2} \bar{u}$ e quindi c'è la convergenza puntuale a $\int |u|^{\alpha+2}dt$, la quale ha come dominante $C\|u|u|^\alpha\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}$ e quindi possiamo applicare il teorema di Lebesgue e arrivare ad

$$\int \|u\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}$$

che è in $\mathbb{R}$ e quindi possiede parte immaginaria nulla.
In definitiva abbiamo visto che

$$\operatorname{Re}\iint_{\mathbb{R}\times[0,T]}\partial_t u_\varepsilon \bar{u}_\varepsilon\,dx\,dt=\|u(T)\|_{L^2}^2-\|u(0)\|_{L^2}^2=0\Longrightarrow\|u\|_{L^2}=\|u_0\|_{L^2}\ \forall\, t.$$

7. Lunedì 15.10.2012 - NLS: buona positura locale e globale per $n=2$

E' arrivato il momento di passare in dimensione 2. Porre una teoria in questo caso è meno facile rispetto al caso unidimensionale. Ci sono vari motivi; innanzitutto non potremo più utilizzare una disuguaglianza inerente il propagatore libero ossia

$$\|e^{it\Delta}f\|_{H^s}\le C\|f\|_{H^s}$$

stima che noi abbiamo più volte usato con $s=1$. Come seconda cosa, noi avevamo la ben nota immersione

$$H^1(\mathbb{R})\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$$

che ci permetteva di stimare il termine nonlineare nel seguente modo:

$$\boxed{\|u|u|^\alpha\|_{H^1(\mathbb{R})}\le C\|u|u|^\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\le C\|u\|_{L^2}\|u\|_{L^\infty}^\alpha\le\|u\|_{H^1}^{\alpha+1}.}\tag{28}$$

Ora non possiamo più farlo perchè

$$H^1(\mathbb{R}^2)\not\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$$

ma per la teoria che costruiremo basterebbe $1+\varepsilon$ per far si che l'inclusione ritorni vera. Noi sceglieremo H^2. Il problema che adesso affronteremo sara quello dell'equazione di Schrödinger non lineare defocalizzante (con energia positiva) con nonlinearità cubica:

nlscub
$$\begin{cases} i\partial_t u+\Delta u-u|u|^2=0\\ u(0)=\varphi(x)\end{cases}\tag{29}$$

con $(t,x,y)\in\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_y$. Osserviamo che i risultati di esistenza globale che esporremo ora sono dovuti a Brezis e Galouet.

Teorema 7.1 (**Esistenza e unicità globale).** *Si ha che*
$\forall\,\varphi\in H^2(\mathbb{R}^2)\,\exists!u(t,x)\in\mathscr{C}_t(H^2(\mathbb{R}^2))$ *soluzione del problema* ~~(29)~~ nlscub.

La dimostrazione di questo risultato passa, ovviamente, dal caso locale. Noteremo che da un punto di vista locale le cose rimangono sostanzialmente invariate. Sarà più delicato dimostrare che il tempo di vita della soluzione è infinito e che quindi è definita globalmente. Arriveremo a dimostrare l'asserto tramite affermazioni successive. Cominciamo col costruire la questione a livello locale: si osservi che si parte al solito dalla soluzione dell'equazione integrale associata perchè il nostro fine è dimostrare che esiste una contrazione. Prima di tutto bisogna far vedere che la candidata applicazione ha lo spazio d'arrivo coincidente con quello di partenza, e poi che si tratta effettivamente di una contrazione.

Proposizione 7.1. *Sia*

$$Tu(t)=e^{it\Delta}\varphi+\int_0^t e^{i(t-s)\Delta}u|u|^2(s)\,ds$$

e definiamo $X_T:=\mathscr{C}_t\big([0,T],H^2(\mathbb{R}^2)\big)$. *Allora* $\exists\,\overline{T},R:B_R(X_T)\longrightarrow B_R(X_T)\ \forall\,T<\overline{T}$.

Si dimostra nella stessa maniera del caso $n = 1$ solo che ora bisogna utilizzare il fatto che

$$H^2(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Il passo successivo è dimostrare effettivamente che stiamo lavorando con una contrazione. Doteremo la palla B_R di una norma più debole di quella dello spazio in cui si trova; le daremo la norma di L^2 e fatto questo si ha che essa è completa perchè B_R è limitata di suo e in più le viene indotta la completezza da L^2. Quindi si può affermare quanto scritto nella prossima proposizione.

Proposizione 7.2. *Allora* $\forall\, \varphi \in H^2(\mathbb{R}^2)\ \exists\, T(\|\varphi\|_{H^2}) > 0$ *tale che* $\exists!\, u(t,x) \in \mathscr{C}\left([0,T], H^2(\mathbb{R}^2)\right)$ *soluzione di (29).*

Adesso che abbiamo questo risultato locale vorremmo estenderlo. Vediamo di capire se quello che abbiamo fatto nel caso monodimensionale va bene anche ora.
Avevamo, grazie alla teoria di Cauchy locale ben due quantità conservate ossia:

(1) la carica

$$\|u(t)\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$$

(2) l'energia

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dxdy + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^2} |u|^4 dxdy$$

e questo bastava a garantirci che $\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} < +\infty$, ma adesso non ci basta per poter affermare che la soluzione è definita globalmente. Ciò accade perchè il nostro dato iniziale non è più in H^1, ma in H^2 quindi c'è un termine che, con questo metodo, non stiamo controllando.
Il problema è aggirabile: bisogna dimostrare che la mappa tale che $t \longmapsto \|u(t)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)}$ appartiene ad $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_t)$. Riuscire a fare questo equivale dimostrare che non esiste un tempo finito in cui il $\limsup$ diverge.
Useremo un risultato di immersione precisata molto interessante.

Lemma 7.1. *Si ha* $\forall\, u \in H^2(\mathbb{R}^2)$ *che*

$$\boxed{\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \le C + C\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\mathbb{R}^2)} \log^{\frac{1}{2}}\left(1 + \|u\|_{H^2(\mathbb{R}^2)}\right)} \tag{30}$$

Dimostrazione. Siccome nel corso della dimostrazione useremo la trasformata di Fourier, supporremo che $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^2)$ e poi per densità si raggiungerà il risultato. Si ha

$$\begin{aligned}
|v(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\,\hat{v}(\xi)d\xi\right| \le \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{v}(\xi)|d\xi = (\forall\,\lambda > 0) = \int_{B_R} |\hat{v}(\xi)|d\xi + \int_{B_R^c} |\hat{v}(\xi)|d\xi \le \\
&\le \int_{B_R} |\hat{v}(\xi)|\frac{1+|\xi|}{1+|\xi|}d\xi + \int_{B_R^c} |\hat{v}(\xi)|\frac{1+|\xi|^2}{1+|\xi|^2}d\xi \le \\
&\le \text{(C-S)} \le \left(\int_{B_R} |\hat{v}(\xi)|^2(1+|\xi|)^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{B_R} \frac{d\xi}{(1+|\xi|)^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \left(\int_{B_R^c} |\hat{v}(\xi)|^2(1+|\xi|^2)^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{B_R^c} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \le \\
&\le \|v\|_{H^1} I(R) + \|v\|_{H^2} II(R).
\end{aligned}$$

Adesso, passando alle coordinate polari, cerchiamo di capire come si comportano $I(R)$ e $II(R)$. Si ha

$$I(R) = \left(\int_0^R \frac{rdr}{(1+r)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \log^{\frac{1}{2}}(1+R)$$

$$II(R) \simeq \left(\int_R^{+\infty} \frac{rdr}{1+r^4}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \left(\frac{1}{1+R^2}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{1+R}$$

e quindi

$$|v(x)| \le \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \log^{\frac{1}{2}}(1+R) + \|v\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \frac{1}{1+R} \quad \forall\, R > 0$$

e scegliendo $R = \|v\|_{H^2}$ si ha la tesi. □

Adesso siamo pronti per parlare di esistenza globale: bisogna provare che la funzione tale che $t \longmapsto \|\cdot\|_{H^2(\mathbb{R}^2)}$ non scoppia in tempo finito. Contrariamente a quanto fatto nel caso unidimensionale, anche per l'esistenza globale in dimensione 2 partiremo dalla soluzione dell'equazione integrale associata al nostro problema: si ha

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^2} &\leq (\text{Minkowksi}) \leq \|\varphi\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} + \|u|u|^2\|_{L^1_T(H^2(\mathbb{R}^2))} \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{H^2(\mathbb{R}^2} + T\|u|u|^2\|_{L^1_T(H^2(\mathbb{R}^2))} \end{aligned} \tag{31}$$

allora possiamo fare la seguente stima (stiamo stimando sul tempo):

$$\|u\|_{L^\infty_T H^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\varphi\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} + T\|u|u|^2\|_{H^2(\mathbb{R}^2)}$$

Ma il termine nonlineare è problematico: abbiamo che

$$\|u|u|^2\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|u|u|^2\|_{L^2} + \|D^2(u|u|^2)\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}\|u\|^2_{L^\infty} + C\|DuDuu\|_{L^\infty} \tag{32}$$

Per le norme L^2 non si hanno problemi dato che $\|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1} < +\infty$, al contrario su quelle L^∞ ci vuole un pò di cautela, inoltre, poichè vogliamo una stima H^2 arriviamo a

$$\|\|u|^2|\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\|u\|_{H^2}\|u\|^2_{L^\infty} + C\|DuDuu\|_{L^2}.$$

Supponiamo che l'ultimo pezzo, quello con le derivate, sia nullo, cosa che dimostreremo in seguito. A questo punto si ha per la stima iniziale di u:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^2} &\leq \|\varphi\|_{H^2} + \|u|u|^2\|_{L^1_T H^2(\mathbb{R}^2)} \leq (\text{lemma 7.1}) \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{H^2} + C\int_0^t \|u\|_{H^2}\left[C + C\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1}\log^{\frac{1}{2}}(1+\|u\|_{H^2})\right]ds \leq \\ &\leq (\text{C al posto di } \|\cdot\|_{H^1}) \leq \|\varphi\|_{H^2} + C\int_0^t \|u\|_{H^2}\left[C + \log(1+\|u\|_{H^2})\right]ds \end{aligned} \tag{33}$$

Quindi ci riamo ridotti al fatto che una certa funzione $\psi(t)$ è tale che

$$\psi(t) \leq C_0 + C\int_0^t \psi(t)(C + \log^{\frac{1}{2}}(1+\psi(s))ds \Longrightarrow \forall\, T \sup_{t\in[0,T]} |\psi(t)| < +\infty$$

e questo è vero perchè in realtà stiamo dicendo che ψ è sottosoluzione di

$$\psi' = C\psi(C + C\log(1+\psi)).$$

Questo deriva dal fatto che l'integrale

$$\int_{\psi_0}^{\psi(t)} \frac{ds}{\psi(s)} = t$$

diverge e quindi si ha un'esplosione in tempo finito. Osserviamo, in ultima analisi che:

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\log^\alpha(1+t)} = +\infty \text{ se } \alpha \leq 1.$$

8. Giovedì 18.10.2012 - Stime in $H^2(\mathbb{R}^2)$

Vediamo alcuni risultati che ci aiuteranno nel resto del corso. La prossima proposizione ci da un'informazione interessante. Noi sappiamo che $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^2) \iff \varphi, D\varphi, D^2\varphi \in L^2$, ma basta mostrare qualcosa in meno.

Proposizione 8.1. *Si ha che*

$$\varphi \in H^2(\mathbb{R}^2) \iff \partial_x^2\varphi \in L^2, \partial_y^2\varphi \in L^2.$$

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) è ovvio. Sappiamo che $\varphi \in L^2$. Vogliamo mostrare che

$$\partial_x\varphi \in L^2 \iff \xi\hat{\varphi} \in L^2 \iff \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi < +\infty.$$

Adesso spezzeremo l'integrale su una palla e suo suo complementare e poi spezzeremo le alte e basse frequenze:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^2 |\hat{\varphi}|^2 d\xi &= \int_{B(0,1)} |\xi|^2 |\hat{\varphi}|^2 d\xi d\eta + \int_{B(0,1)^{\complement}} |\xi|^2 |\hat{\varphi}|^2 d\xi d\eta \leq \\ &\leq \int_{B(0,1)} |\hat{\varphi}|^2 d\xi d\eta + \int_{B(0,1)^{\complement}} |\xi|^4 |\hat{\varphi}|^2 d\xi d\eta \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\varphi}|^2 d\xi d\eta + \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^4 |\hat{\varphi}|^2 d\xi d\eta = \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^4)|\hat{\varphi}|^2 d\xi d\eta = \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\partial_x^2 \varphi}|^2 d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Resta da controllare le derivate miste.

$$\partial^2_{xy}\varphi \in L^2 \iff \xi\eta\hat{\varphi} \in L^2 \iff \int_{\mathbb{R}^2} |\xi|^2|\eta|^2|\hat{\varphi}|^2 d\xi d\eta < +\infty$$

ma è rapidissimo osservare che

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\xi|^4 + |\eta|^4)|\hat{\varphi}|^2 d\xi d\eta \leq \| \partial^2_x \varphi |_{L^2} + \| \partial^2_y \varphi \|_{L^2} < +\infty$$

□

Esibiamo una seconda dimostrazione.

Dimostrazione. Si ha

$$\int \partial^2_{xy}\varphi \partial^2_{xy}\varphi = -\int \partial^3_{xy}\varphi \partial_{xy}\varphi = \int \partial^2_x\varphi \partial^2_x \varphi \leq \| \partial^2_x \varphi \|_{L^2} \| \partial^2_x \varphi \|_{L^\infty}.$$

□

La morale dietro questa proposizione è la seguente: controllare le derivate prime è possibile controllando φ e φ''.

Proposizione 8.2 (**Disuguaglianza di Gagliardo - Niremberg**). *Sia $\varphi \in \mathscr{C}^\infty$. Allora*

$$\sup_{\mathbb{R}} |\varphi'| \leq C\left(\sup_{\mathbb{R}} |\varphi|\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sup_{\mathbb{R}} |\varphi|''\right)^{\frac{1}{2}} \tag{34}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{cases}\varphi(x_0+h) = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)h + \varphi''(x_0)\frac{h^2}{2} + o(x^2) \\ \varphi(x_0-h) = \varphi(x_0) - \varphi'(x_0)h + \varphi''(x_0)\frac{h^2}{2} + o(x^2)\end{cases} \implies$$

$$\implies \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0-h) = 2\varphi'(x_0)h^2\varphi''(x_0).$$

Adesso, dividendo per $2h$ troviamo che

$$\varphi'(x_0) \leq C\frac{\sup|\varphi|}{h} + h\sup|\varphi''| \; \forall\, h$$

e passando al limite si ottiene la disuguaglianza cercata. □

Il prossimo lemma è interessante perchè permette di rendere rigoroso un passaggio che avevamo dato per buono nella dimostrazione della proposizione (7.2).

Lemma 8.1. *Si ha che $\forall\, v \in H^2(\mathbb{R}^2)$ vale la seguente stima:*

$$\boxed{\| v|v|^2 \|_{H^2} \leq C\|v\|^2_{L^\infty}\|v\|_{H^2}.} \tag{35}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di H^2 abbiamo $\| v|v|^2\|_{h^2} = \| v|v|^2\|_{L^2} + \| D_x(v|v|^2)\|_{L^2} + \| D^2_x(v|v|^2)\|_{L^2}$. Per i risultati di cui abbiamo parlato nella pagina precedente, ci possiamo ben limitare a stimare la funzione e la sua derivata seconda. Per quanto riguarda la prima abbiamo

$$\| v|v|^2 \|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2}\|v^2\|_{L^\infty} = \|v\|_{L^2}\|v\|^2_{L^\infty} \leq \|v\|_{H^2}\|v\|^2_{L^\infty}$$

mentre per la derivata seconda si trova che

$$
\begin{aligned}
\|D_x^2(v|v|^2)\|_{L^2} &\le C\|(D_x^2 v)|v|^2\|_{L^2} + \|(\partial_x v)\partial_x \bar{v}\cdot\partial_x \bar{v}\|_{L^2} \le \\
&\le \|\partial_x^2 v\|_{L^2}\|v\|_{L^\infty}^2 + \|(\partial_x v)\partial_x \bar{v}\cdot\partial_x \bar{v}\|_{L^2} \le \\
&\le \|\partial_x^2 v\|_{H^2}\|v\|_{L^\infty}^2 + \|(\partial_x v)\partial_x \bar{v}\cdot\partial_x \bar{v}\|_{L^2}. \qquad (36)
\end{aligned}
$$

Per il secondo pezzo, che ci siamo portati fin qui senza toccarlo, si ha che

$$\|(\partial_x v)\partial_x \bar{v}\cdot\partial_x \bar{v}\|_{L^2} \le \|v\|_{L^\infty}\|\partial_x v\,\partial_x \bar{v}\|_{L^2}$$

ma c'è un piccolo ostacolo. si ha $\|\partial_x v\,\partial_x \bar{v}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \equiv \|\partial_x v\|_{L^4}$. Il fatto è che noi sapevamo valere $\|\partial_x v\,\partial_x \bar{v}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \le C\|v\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$ e dobbiamo mostrare che continua a valere in L^4 ossia dobbiamo mostrare che

$$\|\partial_x v\|_{L^4} \le C\|v\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Si ha

$$\|\partial_x v\|_{L^4}^4 = \int \partial_x v\,\partial_x \bar{v}\,\partial_x v\,\partial_x \bar{v}\,dx = -\int v\,\partial_x^2 v\,\partial_x v\,\partial_x \bar{v} \Longrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \left| -\int v\,\partial_x^2 v\,\partial_x v\,\partial_x \bar{v}\,dx \right| &\le (\text{Hölder}) \le \|v\|_{L^\infty}\int |\partial_x^2 v||\partial_x v|^2 dx \le \\
&\le \|v\|_{L^\infty}\|\partial_x^2 v\|_{L^2}\|\partial_x v\|_{L^4}^2
\end{aligned}
$$

e quindi troviamo

$$\|\partial_x v\|_{L^4}^4 \le \|v\|_{L^\infty}\|\partial_x^2 v\|_{L^2}\|\partial_x v\|_{L^4}^2 \Longrightarrow \|\partial_x v\|_{L^4}^2 \le \|v\|_{L^\infty}\|\partial_x^2 v\|_{L^2}.$$

Tornando alla funzione di partenza si ha che

$$\|v|v|^2\|_{H^2} \le \|v\|_{H^2}\|v\|_{L^\infty}^2 + \|v\|_{L^\infty}^{\frac{1}{2}}\|\partial_x^2 v\|_{L^2} \le \|v\|_{H^2}\|v\|_{L^\infty}^2.$$

□

Adesso ridimostriamo brevemente la proposizione (7.2) ossia che se u è soluzione della (29) nlscub allora $\|u(t)\|_{H^2}$ non scoppia in tempo finito.

Dimostrazione. Al solito partiamo dalla soluzione dell'equazione integrale associata. Essa è

$$u(t) = e^{it\Delta}\varphi + \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}u|u|^2(s)ds$$

Adesso stimiamo tutto:[4]

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^2} &\le \|\varphi\|_{H^2} + C\int_0^t \|u|u|^2\|_{H^2}ds \le \\
&\le (\text{Lemma } (8.1)) \le \|\varphi\|_{H^2} + C\int_0^t \|u(s)\|_{L^\infty}^2\|u(s)\|_{H^2}ds \le \\
&\le (\text{Lemma } (7.2)) \le \|\varphi\|_{H^2} + C\int_0^t C + C\|u\|_{H^1}\log(1+\|u\|_{H^2})ds \\
&\le C + C\int_0^t 1+\log(1+\|u\|_{H^2})\|u\|_{H^2}ds \le C + C\int_0^t \left(1+\log\|u\|_{H^2}\right)\|u\|_{H^2}ds. \qquad (37)
\end{aligned}
$$

A questo punto, chiamata $\|u\|_{H^2} := \psi(t)$, essa è una sottosoluzione di $\psi' = C(1+\log\psi)\psi$ e quindi non può scoppiare. □

---

[4] Nella stima della quarta riga il fatto che siamo nel caso defocalizzante e che si conserva $\|u\|_{H^1}$ ci permetterà di maggiorare $\|u\|_{H^1} \le \|\varphi\|_{H^1} = cost$; ometteremo anche $\|\varphi\|_{H^2}$ dato che è una costante.

9. PROPAGATORI NELLA TEORIA L^p

Perchè sorge naturalmente una teoria apposita per stime L^p? Perchè fin quando eravamo in dimensione 1 allora potevamo ben stimare la norma L^∞ della soluzione; passando in dimensione 2 le cose andavano meno bene: ce la cavavamo con una perdita logaritmica. In dimensioni superiori le cose vanno decisamente peggio e quindi siamo interessati alla ricerca di punti fissi negli spazi L^p. Ci occuperemo di stime a priori del propagatore libero e di quello di Duhamel con spazio ambiente X spazio di Banach.
Cominciamo con il vedere in che modo e soprattutto sotto quali condizioni è possibile manipolare il propagatore libero.

Proposizione 9.1 (**Stima dispersiva**). *Sia $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$. Allora vale la seguente stima dispersiva.*

stidis1 (38)
$$\boxed{\left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.}$$

Osservazione 9.1. *Osserviamo che poichè $\overline{\mathscr{C}_0^\infty} = L^p \; \forall\, 1 \leq p < \infty$ allora si può considerare, per esempio, $\varphi \in L^1$ e in quel caso la disuguaglianza sarebbe anche puntuale.*
Si noti che l'effetto dispersivo è legato sia alla dimensione dello spazio sia al variare dei valori assumibili nel tempo.

Dimostrazione. Ricordiamoci che $i\partial_t u + \Delta u = 0$. Si ha, quindi che
$$e^{it\Delta}\varphi = \mathscr{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\hat{\varphi}(\xi)\right) = \mathscr{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\right) * \varphi.$$
Ma osserviamo che così com'è scritto
$$\mathscr{F}^{-1}\left(e^{-it|\xi|^2}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} e^{-it|\xi|^2} d\xi$$
non ha senso come integrale perchè stiamo lavorando nel senso delle distribuzioni. Bisogna aggiungere un ε per dare senso all'integrazione, mentre se non lo facessimo, avremmo l'integrale oscillante di una funzione con modulo unitario e della quale potremmo dire solo che sta in L^∞, ma non sapremmo granchè a priori. Una volta aggiunto l'ε l'integrale oscillante ha senso perchè la funzione integranda decade rapidamente all'infinito e quindi sta in $\mathscr{S}$; di conseguenza sfrutteremo il fatto che $\mathscr{F}: \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}$ è continua. Adesso si ha che
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} e^{-it|\xi|^2} e^{-\varepsilon|xi|^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix_1\cdot\xi_1}\dots e^{ix_d\cdot\xi_d} e^{-t\xi_1^2}\dots e^{-t\xi_d^2} e^{-\varepsilon\xi_1^2}\dots e^{-\varepsilon\xi_d^2} d\xi_1\dots d\xi_d =$$
$$= \prod_{j=1}^d \left(\int_{\mathbb{R}} e^{ix_j\cdot\xi_j} e^{-t\xi_j^2} e^{-\varepsilon\xi_j^2} d\xi_j\right) = \prod_{j=1}^d K_j^\varepsilon(x).$$
e quindi possiamo restringere la nostra attenzione ad uno solo di questi integrali. Nei prossimi passaggi cercheremo di scrivere un quadrato nell'esponente così da poter integrare, lo faremo imponendo $2\alpha\sqrt{-(it+\varepsilon)} = ix$. Quindi abbiamo:
$$\int_{\mathbb{R}} e^{(\sqrt{-(it+\varepsilon)}\xi)^2+\alpha^2+ix\xi-\alpha^2} d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\sqrt{-(it+\varepsilon)}\xi\right)^2-\alpha^2} d\xi = e^{\alpha^2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\left(\sqrt{-(it+\varepsilon)}\xi\right)^2} d\xi =$$
$$= (\text{per } \varepsilon \to 0, \alpha^2 \longrightarrow \frac{-ix^2}{4t}, \eta := \sqrt{-(it+\varepsilon)}\xi \longrightarrow \sqrt{-it}\xi) =$$
$$= \frac{e^{-\frac{ix^2}{4t}}}{\sqrt{it}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\eta^2} d\eta \in \mathbb{R}.$$
Adesso si ha quindi che
$$K_t^\varepsilon(x) = \frac{e^{-\frac{ix^2}{4t}}}{\sqrt{ti}} C \qquad C = \int e^{-\eta^2} d\eta \Longrightarrow$$
$$|K_t^\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \prod_{j=1}^d |K_j^\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}}.$$
Quindi, siamo passati per il ben definire anche il senso in cui applicare l'antitrasformata di Fourier. Adesso sappiamo che $e^{it\Delta}f(x) = K_t(x) * f$ è una convoluzione con f tale che
$$\|K_t(x)\|_{L_x^\infty} \leq \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}}.$$

Resta da utilizzare una stima sui prodotti di convoluzione, stima che tra l'altro a breve generalizzeremo, con la quale potremo concludere. La stima è la seguente:

stidis2 (39)
$$\boxed{\|H * \varphi\|_{L^\infty} \leq \|H\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^1}.}$$

Ponendo $H = e^{it\Delta}\varphi$ si ha la tesi.
Osserviamo che la stima per convoluzioni che abbiamo usato è rapidissima da dimostrare:

$$\left|\int H(x-y)\varphi(y)dy\right| \leq \int \underbrace{|H(x-y)|}_{\in L^\infty_y}\underbrace{|\varphi(y)|}_{\in L^1} dy \leq (\text{Hölder}) \leq \|H(x-y)\|_{L^\infty_y}\|\varphi\|_{L^1}$$

□

10. Lunedì 22.10.2012 - Lemma di Schur e introduzione alla disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev

Adesso vogliamo generalizzare al caso L^p le stime per convoluzioni che valevano in L^∞. Sia $H \in L^r(\mathbb{R}^d)$. Vogliamo capire tra quali spazi opera H: abbiamo due stime che ci dovrebbero far capire che è possibile dare una risposta generale. Se $H \in L^1$ allora

$$\|H * \varphi\|_{L^p} \leq \|\varphi\|_{L^p}$$

mentre se, invece, $H \in L^r$ si ha

$$\|H * \varphi\|_{L^\infty} \leq \int |H(x-y)||\varphi(y)|dy \leq \|H\|_{L^r}\|\varphi\|_{L^{r'}}.$$

Si noti che ogni volta che abbiamo dovuto stimare il nucleo di convoluzione lo abbiamo sempre stimato in base allo spazio in cui, per ipotesi, lo si aveva.

Definizione 10.1 (**Operatore integrale**). *Sia il nucleo integrale $K(x,y)$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Si definisce l'operatore T_K tale che*

opint (40)
$$T_K : \varphi(y) \longmapsto T_K\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}^d} K(x,y)\varphi(y)dy$$

dove intendiamo $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty$ e per densità, si generalizza a tutti casi.

Osservazione 10.1. *Se $K(x,y)$ è l'operatore di traslazione allora si tratta proprio della convoluzione $H(x-y)$.*

Teorema 10.1 (**Lemma di Schur**). *Sia $K(x,y) \in L^\infty_x L^r_y \cap L^\infty_y L^r_x$. Allora*

schur (41)
$$\boxed{\|T_K\varphi\|_{L^q} \leq \|K\|^{\frac{r}{p'}}_{L^\infty_x L^r_y}\|K\|^{\frac{r}{q}}_{L^\infty_y L^r_x}\|\varphi\|_{L^p}}$$

se tra gli esponenti sussiste la seguente relazione:

espo (42)
$$\boxed{1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}}$$

Osservazione 10.2. *Osserviamo che la scelta dello spazio in cui porre K è motivata dal voler poter scambiare le norme; se abbiamo $K(x,y) = H(x-y)$ con $H \in L^r$ allora stare in quello spazio è una proprietà più generale dell'avere invarianza per traslazioni.*
Infine, si noti che il legame che vi deve essere tra gli indici, indica che L^p viene mappato in L^q, ma soprattutto che questo dipende anche dalla regolarità di K.

Osservazione 10.3. *Proviamo a ritrovare le vecchie stime che già conoscevamo. Sia $H \in L^\infty$ ossia $r = +\infty$. Queto significa che il legame tra gli indici diventa*

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$$

e così ritroviamo la vecchia stima.
Se invece prendiamo ora $H \in L^1$ allora

$$\frac{1}{q} + 1 = 1 + \frac{1}{p} \iff \frac{1}{q} = \frac{1}{p} \iff q = p$$

e così si trova la vecchia stima L^1 che già conoscevamo.

Nel caso specifico in cui l'operatore sia di convoluzione ossia $K(x,y) = H(x-y)$ la (41) diventa

$$\boxed{\|H * \varphi\|_{L^q} \leq \|H\|_{L^r_x}^{\frac{r}{p'}} \|H\|_{L^r_x}^{\frac{r}{q}} \|\varphi\|_{L^p} \leq \|H\|_{L^r_x}^{\frac{r}{p'}+\frac{r}{q}} \|\varphi\|_{L^p}.} \tag{43}$$

Notiamo che se vale la (42) allora

$$\frac{r}{p'} + \frac{r}{q} = r\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = r\left(1 + \frac{1}{r} - 1\right) = 1$$

e quindi si ritrova la vecchia

$$\|H * \varphi\|_{L^q} \leq \|H\|_{L^r_x} \|\varphi\|_{L^p}.$$

Prima di dimostrare il lemma di Schur enunciamo e dimostriamo un risultato che è utile in generale.

Proposizione 10.1. *Sia T un operatore. Allora*

$$\|T\varphi\|_{L^q} \leq C\|\varphi\|_{L^p} \iff |(T\varphi,\psi)_{L^2}| \leq C\|\varphi\|_{L^p}\|\psi\|_{L^{q'}} \tag{44}$$

Dimostrazione. Dimostriamo il ($\Longrightarrow$).
Si ha

$$|(T\varphi,\psi)_{L^2}| = \left|\int T\varphi \cdot \bar{\psi}\, dx\right| \leq (\text{ Hölder }) \leq \|T\varphi\|_{L^q}\|\psi\|_{L^{q'}} \leq C\|\varphi\|_{L^p}\|\psi\|_{L^{q'}}.$$

Dimostriamo il ($\Longleftarrow$)
Ricordiamo che, per Hahn - Banach si ha che

$$\|T\varphi\|_{L^q} = \sup_{\|\psi\|_{L^{q'}}=1} |(T\varphi,\psi)| \leq C\|\varphi\|_{L^p}\|\psi\|_{L^{q'}}$$

con la prima uguaglianza che in effetti è proprio la definizione. Ma $\|\psi\|_{L^{q'}} = 1$ e di conseguenza troviamo che $\|T\varphi\|_{L^q} \leq C\|\varphi\|_{L^p}$. □

Adesso finalmente possiamo dimostrare il lemma di Schur.

Dimostrazione. Si ha per definizione che

$$|(T_K\varphi,\psi)_{L^2}| = \left|\iint_{\mathbb{R}^d_x\times\mathbb{R}^d_y} K(x,y)\varphi(y)\,dy \cdot \overline{\psi}(x)\,dx\right|$$

e quest'ultima quantità può essere stimata da

$$\iint |K(x,y)||\varphi(y)||\psi(x)|\,dx\,dy.$$

Adesso osserviamo due fatti:

(1) partendo dall'ipotesi sugli indici segue che

$$1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 0 \iff 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{r} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{p'} + \frac{1}{r'} + \frac{1}{q'} = 1;$$

(2) L'intenzione è di scrivere $K(x,y)\varphi(y)\psi(x) = \alpha(x,y)\beta(x,y)\gamma(x,y)$ con

$$\begin{cases} \alpha(x,y) = |\varphi(y)|^{\frac{p}{q}}|K(x,y)|^{\frac{r}{q}} \\ \beta(x,y) = |K(x,y)|^{\frac{r}{p'}}|\psi(x)|^{\frac{q'}{p'}} \\ \gamma(x,y) = |\psi(x)|^{\frac{q'}{r'}}|\varphi(y)|^{\frac{p}{r'}} \end{cases} \tag{45}$$

con l'identità che vogliamo scrivere che, con questa scelta, ha senso perchè

$$\text{per } K \Rightarrow \frac{r}{q} + \frac{r}{p'} = 1 \qquad \text{per } \varphi \Rightarrow \frac{p}{q} + \frac{p}{r'} = 1 \qquad \text{per } \psi \Rightarrow \frac{q'}{p'} + \frac{q'}{r'} = 1.$$

Adesso possiamo procedere: si ha

$$\iint \alpha(x,y)\beta(x,y)\gamma(x,y)\,dx\,dy \leq (\text{ Hölder }) \leq \|\alpha\|_{L^q}\|\beta\|_{L^{p'}}\|\gamma\|_{L^{r'}}$$

che rispettivamente valgono

$$\|\alpha\|_{L^q} = \left[\iint |\varphi(y)|^{\frac{p}{q}q}|K(x,y)|^{\frac{r}{q}q}\,dx\,dy\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\|\beta\|_{L^{p'}} = \left[\iint |K(x,y)|^{\frac{r}{p'}p'} |\psi(x)|^{\frac{q'}{p'}p'}\, dx dy \right]^{\frac{1}{p'}}$$

$$\|\gamma\|_{L^{r'}} = \left[\iint |\psi(x)|^{\frac{q}{r'}r'} |\varphi(y)|^{\frac{p}{r'}r'}\, dx dy \right]^{\frac{1}{r'}}.$$

Adesso il prodotto di questi tre elementi è minore o guale di

$$\leq \left[\int |\varphi(y)|^p \|K(\cdot,y)\|^r_{L^r_x} dy \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int |\psi(x)|^{q'} \|K(x,\cdot)\|^r_{L^r_y} dx \right]^{\frac{1}{p'}} \cdot$$

$$\cdot \left[\int |\varphi(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{r'}} \left[\int |\psi(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{r'}} \leq (\text{ Hölder }) \leq$$

$$\underbrace{\left[\int |\varphi(y)|^p dy \right]^{\frac{1}{q}}}_{(\square)} \|K(x,y)\|^{\frac{r}{q}}_{L^\infty_x L^r_y} \underbrace{\left[\int |\psi(x)|^{q'} dx \right]^{\frac{1}{p'}}}_{(\triangle)} \|K(x,y)\|^{\frac{r}{p'}}_{L^\infty_x L^r_y} \|\varphi\|^{\frac{p}{r'}}_{L^p} \|\psi\|^{\frac{q'}{r'}}_{L^{q'}}$$

ma osserviamo che

$$(\square) = \|\varphi\|^{\frac{p}{q}}_{L^p} \qquad (\triangle) = \|\psi\|^{\frac{q'}{p'}}_{L^{q'}}$$

e quindi tutto può essere stimato con

$$\|\varphi\|^{\frac{p}{q}}_{L^p} \|K(x,y)\|^{\frac{r}{q}}_{L^\infty_x L^r_y} \|\psi\|^{\frac{q'}{p'}}_{L^{q'}} \|K(x,y)\|^{\frac{r}{p'}}_{L^\infty_x L^r_y} \|\varphi\|^{\frac{p}{r'}}_{L^p} \|\psi\|^{\frac{q'}{r'}}_{L^{q'}}.$$

$\square$

Adesso cominciamo a parlare di operatori di convoluzione con funzioni di tipo

$$\frac{1}{|x|^\alpha}.$$

Osserviamo che $\forall\, s$ si ha

$$\left\| \frac{1}{|x|^\alpha} \right\|^s_{L^s} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{|x|^{\alpha s}} = \int_0^{+\infty} r^{d-1-\alpha s} ds = +\infty$$

e quindi una funzione del genere non sta in nessuno spazio di Lebesgue: la teoria sviluppata fino ad ora risulta inefficace! Questo ci porterà a lavorare con la disuguaglianza di Hardy - Littlewood - Sobolev che qui di seguito mostriamo:

hls1 (46)
$$\boxed{\left\| \varphi * \frac{1}{|x|^\alpha} \right\|_{L^q} \leq C \|\varphi\|_{L^p}.}$$

Vedremo anche per quali α ha senso fare la convoluzione; al solito considereremo $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0(\mathbb{R}^d)$ e quando dovremo definire l'integrazione sui limitati dovremo lavorare con oggetti del tipo

$$\int \frac{\varphi(y)}{|x-y|} dy \Longrightarrow \frac{1}{|x-y|} \in L^1_{loc}$$

affinchè l'integrale abbia senso, cosa che vedremo valere per $0 < \alpha < d$.

11. Giovedì 25.10.2012 - Teorema di Riesz - Thorin e Stima dispersiva in L^p

Ci accingiamo a generalizzare due stime particolari, le uniche fino ad ora, riguardanti il propagatore libero. Ricordiamole rapidamente:

(1) nel caso $p = 2$ avevamo che
$$\left\| e^{it\Delta} f \right\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2}$$
e si aveva proprio $C = 1$; questa stima la si dimostra con Fourier;

(2) nel caso $p = \infty$ avevamo
$$\left\| e^{it\Delta} f \right\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^1}$$
dove $C = \frac{C}{t^{\frac{d}{2}}}$.

Il problema è che queste due stime sono una sorta di casi limite o estremi se vogliamo; conseguentemente per tutti i p compresi tra 2 e ∞ non ci è dato, al momento, sapere nulla. Questo è vero a maggior ragione perchè sia Fourier che Schur vanno bene solo negli specifi casi in cui li abbiamo utilizzati. Per questo sarà necessario lavorare con la teoria dell'interpolazione. Innanzitutto avviciniamoci a quella complessa.
Cominciamo con una sorta di principio del massimo per la striscia.

Lemma 11.1 (Principio del massimo per la striscia). *Sia la striscia* $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 \le \operatorname{Re} z < 1\}$. *Supponiamo che* $f \in \mathscr{H}(S) \cap \mathscr{C}(S) \cap L^\infty(S)$. *Allora*

$$\sup_{z \in \overline{S}} |f| = \sup_{z \in \partial S} |f|.$$

Dimostrazione. La dimostrazione si divide in due casi: nel primo avremo un'ipotesi restrittiva che, nel secondo, sarà successivamente rimossa.

(1) L'ipotesi aggiuntiva è che f sia infinitesima ossia che

$$\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0 \iff \forall\, \varepsilon > 0\, \exists M > 0 \big| |f(z)| < \varepsilon \text{ se } |z| > M, \text{ ossia se } |\operatorname{Im} z| \ge M.$$

Allora abbiamo a che fare con un compatto, quindi in esso vale il principio del massimo e di conseguenza $\sup_{R_\varepsilon} |f| = \sup_{\partial R_\varepsilon} |f|$. Ma si ha che l'estremo superiore non può stare su $\pm M(\varepsilon)$ ma sui tratti verticali per via dell'ipotesi aggiuntiva. Se, per assurdo, così non fosse, allora preso un intorno del massimo troveremmo dei punti in cui $|f(z)| < \varepsilon$ e questo è assurdo perchè, per uno spostamento piccolo dal massimo, il discostamento dei valori assunti che ci si aspetta dev'essere piccolo. Si manda $\varepsilon \to 0$ e si ha la tesi.[5]

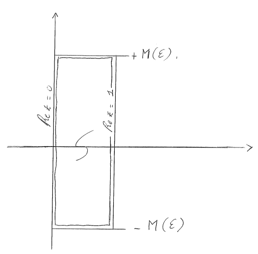

FIGURA 2. Principio del massimo per la striscia 1

(2) Togliamo l'ipotesi che $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = 0$ e dimostriamo il lemma in condizioni generali. Prendiamo $f_n(z) = f(z)e^{-\frac{z^2}{n}}$ ossia una successione di funzioni che al finito avranno comportamento libero, ma che all'infinito decadono come nel caso precedente. verifichiamo che $\forall\, n\ \lim_{|z|\to 0} |f_n(z)| = 0$. Si ha

$$|f_n(z)| \le |f(z)||e^{-\frac{z^2}{n}}| \le \|f\|_{L^\infty} |e^{-\frac{z^2}{n}}| \le M|e^{-\frac{z^2}{n}}|$$

dove la stima con la norma L^∞ è valida per ipotesi; ci siamo ricondotti a dimostrare che

$$\lim_{|z|\to\infty} \left| e^{-\frac{z^2}{n}} \right| = 0.$$

L'unica cosa che può variare nel nostro caso è la parte immaginaria e quindi è su quella che faremo il limite:

$$\lim_{|y|\to\infty} \left| e^{\frac{x^2}{n} - \frac{y^2}{n} + \frac{2ixy}{n}} \right| = \lim_{|y|\to\infty} \left| e^{\frac{x^2}{n} - \frac{y^2}{n}} \right| \longrightarrow 0$$

[5] Nel disegno $R_\varepsilon = S$.

e quindi f_n va bene perchè soddisfa l'ipoesi del caso precedente e quindi

$$\sup_{\overline{S}} |f_n| = \sup_{\partial S} |f_n| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \forall z \in \overline{S} |f_n(z)| \leq \sup_{\partial S} |f(z)||e^{-\frac{z^2}{n}}| \leq \sup_{\partial S} |f(z)| \underbrace{\sup_{\partial S} e^{-\frac{z^2}{n}}}_{\longrightarrow 1} \leq \sup_{\partial S} |f(z)|$$

e questo conclude la dimostrazione del lemma.

□

Corollario 2. *Sia la striscia* $S := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 1\}$.
Supponiamo che $f \in \mathscr{H}(S) \cap \mathscr{C}(S) \cap L^\infty(S)$. *Supponiamo, inoltre, di avere*

$$M_0 := \sup_{\operatorname{Re} z = 0} |f(z)| \qquad M_1 := \sup_{\operatorname{Re} z = 1} |f(z)|.$$

Allora

$$|f(\vartheta + it)| \leq M_0^{1-\vartheta} M_1^{\vartheta}$$

Dimostrazione. Definiamo $g(z) := \frac{f(z)}{M_0^{1-\vartheta} M_1^{\vartheta}}$ e affermiamo che $|g(z)| \leq 1$. Osserviamo che :

(1) $g(z)$ è olomorfa su S;
(2) $g(z)$ è continua:
(3) $g(z) \in L^\infty$ perchè per ipotesi si ha $f(z) \in L^\infty$.

Adesso stimiamo tutto:

$$\sup_{\operatorname{Re} z = 0} |g(z)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(it)| = \sup \frac{|f(it)|}{|M_0^{1-it} M_1^{it}|} \leq \frac{M_0}{M_0} = 1.$$

Eseguiamo una stima analoga nel caso $\operatorname{Re} z = 1$ e per il calcolo precedente abbiamo che in S si ha $|g(z)| \leq 1$. Quindi possiamo porre la seguente stima:

$$|f(z)| \leq |M_0|^{1-z} |M_1|^z \Longrightarrow |f(\vartheta + it)| \leq |M_0^{1-\vartheta-it}||M_1^{\vartheta+it}| = |M_0|^{1-\vartheta}|M_1|^{\vartheta}.$$

□

Adesso finalmente siamo nellce condizioni per enunciare e dimostrare il teorema seguente:

Teorema 11.1 (**Riesz - Thorin**). *Supponiamo di avere T operatore lineare che operi con continuità:*

$$\begin{cases} T : L^{p_0}(d\mu) \longrightarrow L^{q_0}(d\nu) \\ T : L^{p_1}(d\mu) \longrightarrow L^{q_1}(d\nu) \end{cases}.$$

Allora T mappa con continuità $T : L^{p_\vartheta} \longrightarrow L^{q_\vartheta}$ con indici tali che

$$\frac{1}{p_\vartheta} = \frac{\vartheta}{p_0} + \frac{1-\vartheta}{p_1} \qquad \frac{1}{q_\vartheta} = \frac{\vartheta}{q_0} + \frac{1-\vartheta}{q_1}$$

e quindi, equivalentemente, se valgono le seguenti stime:

$$\begin{cases} \|Tf\|_{L^{p_1}} \leq C_1 \|f\|_{L^{q_1}} \\ \|Tf\|_{L^{p_0}} \leq C_0 \|f\|_{L^{q_0}} \end{cases} \Longrightarrow \|Tf\|_{L^{p_\vartheta}} \leq C_\vartheta \|f\|_{L^{q_\vartheta}} \text{ con } C_\vartheta = C_0^\vartheta C_1^{1-\vartheta}$$

dove $0 < \vartheta < 1$.

Dimostrazione. Per la proposizione (10.1), che abbiamo visto in precedenza, sappiamo che sussiste un'equivalenza nel dimostrare che

$$T : L^{p_\vartheta} \stackrel{C_0^\vartheta C_1^{1-\vartheta}}{\longrightarrow} L^{q_\vartheta} \Longleftrightarrow |(Tf, g)_{L^2}| \leq C_0^\vartheta C_1^{1-\vartheta} \|f\|_{L^{p_\vartheta}} \|g\|_{L^{q'_\vartheta}}.$$

A noi basterà mostrare tutto $\forall f \in \mathscr{D}(L^{p_\vartheta})$ e $\forall g \in \mathscr{D}(L^{q'_\vartheta})$; poi per densità negli L^p è rapido concludere la dimostrazione. useremo le funzioni semplici, proprio per una questione di densità negli L^p: siano

$$f = \sum_{j=1}^{N} \chi_{E_j} \left(|a_j| e^{iu_j} \right) \qquad g = \sum_{k=1}^{M} \chi_{F_k} \left(|b_k| e^{iv_k} \right)$$

e introduciamo

$$f_z := \sum_{j=1}^{N} |a_j|^{\frac{p_\vartheta}{p_z}} e^{iu_j} \chi_{E_j} \qquad g_z := \sum_{k=1}^{M} |b_k|^{\frac{q'_\vartheta}{q'_z}} e^{iv_k} \chi_{F_k}.$$

Adesso diamo la dipendenza da z con le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{p_z} = \frac{z}{p_0} + \frac{1-z}{p_1} \\ \frac{1}{q'_z} = \frac{z}{q'_0} + \frac{1-z}{q'_1} \end{cases}.$$

Osservando che

$$|(Tf,g)| = |(Tf_\vartheta, g_\vartheta)| = |(Tf_z, g_z)|\Big|_{z=\vartheta}$$

vediamo di cercare i pressuposti per l'utilizzo dell'ultimo corollario appena dimostrato. Per ipotesi abbiamo che $|(Tf_z, g_z)| \le C_1 \|f_z\|_{L^{p_1}} \|g_z\|_{L^{q'_1}}$. Cerchiamo una stima per M_0:

$$|(Tf_z, g_z)|\Big|_{z=it} \le C_1 \|f_{it}\|_{L^{p_1}} \|g_{it}\|_{L^{q'_1}}$$

ma osservando che nella $\frac{1}{p_{it}} = \frac{it}{p_0} + \frac{1-it}{p_1}$, il primo termine a destra dell'uguaglianza è un numero complesso puro, procediamo come segue.

$$\|f_{it}\|_{L^{p_1}}^{p_1} = \sum_{j=1}^{N} \left| |a_j|^{\frac{p_1 p_\vartheta}{p_{it}}} \right| \mu(E_j) = \sum_{j=1}^{N} |a_j|^{p_\vartheta} \mu(E_j) = \|f\|_{L^{p_\vartheta}}^{p_\vartheta} \le \|f\|_{L^{p_\vartheta}}^{\frac{p_\vartheta}{p_1}}$$

e,fatti gli stessi passaggi per g_z, alla disuguaglianza aggiungiamo $\|g\|_{L^{q'_\vartheta}}^{\frac{q'_\vartheta}{q'_1}}$. Usando la seconda delle mappe continue di T su $\operatorname{Re} z = 1$ si conclude la dimostrazione. □

Finalmente abbiamo tutti gli strumenti necessari a poter generalizzare agli spazi L^p la nostra stima dispersiva iniziale, la quale, è in realtà uno dei due casi estremi possibili previsti dal teorema di interpolazione complessa che abbiamo or ora esibito.

Teorema 11.2 (**Stima dispersiva generale**). *Si ha per* $1 \le p' \le 2$ *che vale la seguente stima:*

lpdisp (47)

$$\boxed{\left\| e^{it\Delta} f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \frac{C}{t^{\frac{d}{2}\left(1-\frac{2}{p}\right)}} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}}$$

Dimostrazione. Abbiamo le due stime che abbiamo richiamato all'inizio della sezione: queste sono stime estreme e per il teorema di Riesz - Thorin siamo nelle condizioni per cercare un p tale che

$$\frac{1}{p} = \frac{\vartheta}{2} + \frac{1-\vartheta}{\infty} \iff p = \frac{2}{\vartheta} \iff \vartheta = \frac{2}{p}$$

e una volta bloccato p, di conseguenza risultano fissati ϑ e conseguentemente q. Quindi la cosa che rimane da appurare è la costante:

$$\left(\frac{C}{t^{\frac{d}{2}}}\right)^{1-\vartheta} = \frac{C}{t^{\frac{d}{2}\left(1-\frac{2}{p}\right)}} \Longrightarrow \left\| e^{it\Delta} f \right\|_{L^p} \le \frac{C}{t^{\frac{d}{2}\left(1-\frac{2}{p}\right)}} \|f\|_{L^{p'}}.$$

□

12. Lunedì 29.10.2012 - Teorema di Marcinkiewiz e spazi L^p_W

Proposizione 12.1 (**Disuguaglianza di Chebichev**). *Sia f una funzione misurabile e* $\forall \lambda > 0$ *consideriamo il sopralivello* $\{|f| > \lambda\}$. *Allora vale la seguente disuguaglianza:*

cheb0 (48)

$$\boxed{\lambda^p |\{|f| > \lambda\}| \le \int_{\{|f|>\lambda\}} |f|^p dx \le \|f\|_{L^p}^p}$$

inoltre, se $f \in L^p$ *allora* $\sup_{\lambda>0} \lambda^p |\{|f| > \lambda\}| < +\infty$.

Definizione 12.1 (**Spazi di Lorentz**). *Sia* $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$. *Si dice che* $f \in L^p_W$ ($L^{p,\infty}$) *se e solo se* $\sup_{\lambda>0} \lambda^p |\{|f| > \lambda\}| < +\infty$ *ossia vale la disuguaglianza di Chebichev.*

Osservazione 12.1. *Si ha l'immersione*

$$L^p \hookrightarrow L^p_W$$

e si dimostra proprio con la disuguaglianza di Chebichev.

Facciamo notare che si possono avere casi in cui $f \in L^p_W$ ma $f \notin L^p$. Supponiamo, a titolo d'esempio, di essere in $d = 1$ e di prendere $f(x) = \frac{1}{|x|^{\frac{1}{p}}}$. Allora

$$\int |f(x)|^p dx = +\infty \Longrightarrow f \notin L^p$$

ma si verifica immediatamente che, per come è definito uno spazio di Lorentz, si ha

$$\lambda^p |\{|f| > \lambda\}| = \lambda^p \left|\left\{\frac{1}{|x|} > \lambda^p\right\}\right| = \lambda^p \left|\left\{|x| < \frac{1}{\lambda^p}\right\}\right| = \lambda^p \frac{2}{\lambda^p} = 2 < +\infty \Longrightarrow f \in L^p_W.$$

Non è finita qui, gli spazi L^p_W non sono normabili. Se per esempio si ponesse una (sappiamo finta) norma

$$\|f\|_{L^p_W} = \sup_{\lambda>0} \left(\lambda |\{|f| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}\right)$$

in realtà non lo sarebbe affatto. Sia la prima che la seconda proprietà di cui deve godere una norma sono rispettate, mentre la terza, la disuguaglianza triangolare, non lo è. Per fortuna, la situazione non è eccessivamente disastrosa perchè il prossimo teorema ci consente di avere una certa libertà di manovra.

Teorema 12.1. $\forall\, p > 1\ \exists\ |||\cdot|||_{L^p_W}$ *tale che*

$$|||f|||_{L^p_W} \approx \sup_{\lambda>0} \lambda |\{|f| > \lambda\}|^{\frac{1}{p}}. \tag{49}$$

Questo teorema palesa il fatto che per $p = 1$ non è assolutamente possibile normare lo spazio. Ed è proprio questo il motivo per cui la convoluzione con $\frac{1}{|x|^\alpha}$ per $\alpha = 1$ non è mai continua da uno spazio L^p in se. Certamente, però, se $\alpha < 1$ allora

$$\frac{1}{|x|^\alpha} \in L^{\frac{1}{\alpha}}_W.$$

Osservazione 12.2. *Si osservi che, per $p > 1$ si ha*

$$|||f||||_{L^p_W} \simeq |||f||| := \sup_{|E|<+\infty} \frac{\int_E |f| d\mu}{|E|^{1-\frac{1}{p}}}.$$

Adesso, enunciamo il teorema di Marcinkiewiz e ne analizziamo le ipotesi, successivamente introdurremo un lemma necessario ai fini della dimostrazione. Infine lo dimostreremo.

Teorema 12.2 (**Marcinkiewiz**)**.** *Supponiamo che:*

(1) *l'operatore T operi in modo lineare e continuo nei seguenti casi:*

$$\begin{cases} T : L^{p_0} \longrightarrow L^{q_0}_W \\ T : L^{p_1} \longrightarrow L^{q_1}_W \end{cases} \quad \textit{ossia} \quad \begin{matrix} \sup_{\lambda>0} \lambda^{q_0} |\{|Tf| > \lambda\}| \le C\|f\|^{p_0}_{L^{p_0}} \\ \sup_{\lambda>0} \lambda^{q_1} |\{|Tf| > \lambda\}| \le C\|f\|^{p_1}_{L^{p_1}} \end{matrix} \quad ;$$

(2) *si abbia $p_0 \le q_0$ e $p_1 \le q_1$;*

(3) *l'operatore sia sublineare ossia $|T(f + g)| \le |T(f)| + |T(g)|$ q.o. in x.*

Allora con $0 < \vartheta < 1$ se

$$\begin{cases} \frac{1}{p_\vartheta} = \frac{\vartheta}{p_0} + \frac{1-\vartheta}{p_1} \\ \frac{1}{q_\vartheta} = \frac{\vartheta}{q_0} + \frac{1-\vartheta}{q_1} \end{cases}$$

si ha che $T : L^{p_\vartheta} \longrightarrow L^{q_\vartheta}$.

Adesso, come annunciato, facciamo alcune osservazioni sulle ipotesi fatte e sulle differenze rispetto al teorema di Riesz - Thorin.
La prima ipotesi ci dice che anche se sugli spazi di Lorentz in questione non esiste una vera norma, possiamo comunque controllare $|||\cdot|||_{L^p_W}$ con la norma L^p; La sublinearità è qui la quesione cruciale. Nel teorema di Riesz - Thorin veniva particolarmente usata la linearità dell'operatore,

cosa qui non richiesta, e questo fa del teorema di Marcinkiewiz un risultato, se vogliamo, più potente.

Esempio 12.1. *Diamo qui un esempio di operatore sublineare, ma non lineare. Sia $f \in L^1_{loc}$ e prendiamo la funzione massimale*

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_r \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f| dx.$$

Per un teorema di Lebesgue si ha che q.o. x per $f \in L^1$ la media su $B(x,\varepsilon) \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f(x)$ e in genere è vera per $\mathcal{M} : L^p \longrightarrow L^p$, ma non è possibile dimostrarlo con il teorema di Riesz - Thorin.

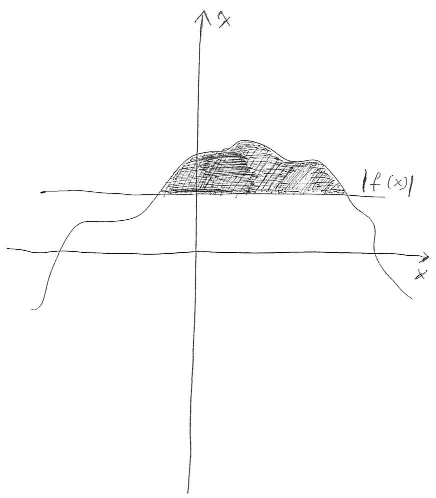

FIGURA 3 1

Questa figura ci preannuncia un interessante lemma.

Lemma 12.1. *Si ha* $\forall\ 1 \leq p < +\infty$

marcinlem (50)
$$\boxed{\|f\|^p_{L^p} = p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} |\{|f| > \lambda\}| d\lambda}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\|f\|^p_{L^p} = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_o^{|f(x)|} \left[\frac{d}{d\lambda} \lambda^p \right] d\lambda \right) dx = p \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{|f(x)|} \lambda^{p-1} d\lambda \right) dx$$

dove si è usato il teorema fondamentale del calcolo. In sostanza ora, per Fubini, si scambia l'ordine di integrazione e, per λ fissato, si hanno i sopralivelli di $|f(x)|$. □

E adesso la dimostrazione del teorema di Marcinkiewiz.

Dimostrazione. Grazie al precedente lemma, il tutto si ridurrà a mostrare che $\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$ dove scriveremo

$$\|Tf\|^p_{L^p} = p \int_0^{\infty} \lambda^{p-1} |\{|Tf| > \lambda\}| d\lambda$$

e quello che faremo sarà proprio lavorare con il soprainsieme di livello $\{|Tf| > \lambda\}$ per ogni λ. Partiamo dall'osservare che possiamo sempre scrivere $f = f_\lambda^0 + f_\lambda^1$ dove

$$f_\lambda^0 = f(x)\chi_{\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}} \qquad f_\lambda^1 = f(x)\chi_{\{|f|<\frac{\lambda}{2}\}}.$$

Adesso, per l'ipotesi di sublinearità, $|T(f_\lambda^0 + f_\lambda^1)| \leq |T(f_\lambda^0)| + |T(f_\lambda^1)|$ e quindi

$$\{|Tf| > \lambda\} = \{|T(f_\lambda^0 + f_\lambda^1)| > \lambda\} \subset \left\{|Tf_\lambda^0| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{|Tf_\lambda^1| > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

e di conseguenza

$$|\{|Tf| > \lambda\}| \leq \left|\left\{|Tf_\lambda^0| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| + \left|\left\{|Tf_\lambda^1| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right|. \tag{51}$$

Ma poichè $T : L^{p_0} \longrightarrow L_W^{q_0}$ allora

$$|\{|Tf| > \lambda\}| \leq \frac{C_0}{\lambda^{p_0}} \int_{\{|Tf|>\lambda\}} |Tf|^{p_0}\, dx$$

e quindi

$$\left|\left\{Tf_\lambda^0 > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{C_0 2^{p_0}}{\lambda^{p_0}} \int_{\{|f(x)|>\frac{\lambda}{2}\}} |f|^{p_0}\, dx \tag{52}$$

$$\left|\left\{Tf_\lambda^1 > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leq \frac{C_1 2^{p_1}}{\lambda^{p_1}} \int_{\{|f(x)|<\frac{\lambda}{2}\}} |f|^{p_1}\, dx. \tag{53}$$

Adesso, mettendo insieme la (51), la (52) e la (53) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^p}^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1} |\{|Tf| > \lambda\}|\, d\lambda \leq \\ &\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\left[\frac{C_0 2^{p_0}}{\lambda^{p_0}} \int_{\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}} |f|^{p_0}\, dx + \frac{C_1 2^{p_1}}{\lambda^{p_1}} \int_{\{|f|<\frac{\lambda}{2}\}} |f|^{p_1}\, dx\right] d\lambda \end{aligned}$$

. Ora dobbiamo cercare di arrivare ad una maggiormazione con una norma L^p e per farlo possiamo sfruttare l'unica cosa che ancora non abbiamo usato, ossia l'ìntegrazione in $d\lambda$. Scriviamo

$$I = pC_0 2^{p_0} \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1-p_0} \left[\int_{\{|f|>\frac{\lambda}{2}\}} |f|^{p_0}\, dx\right] d\lambda$$

$$II = pC_1 2^{p_1} \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1-p_1} \left[\int_{\{|f|<\frac{\lambda}{2}\}} |f|^{p_1}\, dx\right] d\lambda$$

e su di essi possiamo applicare il lemma che abbiamo appena visto e quindi usare Fubini così da avere:

$$I = pC_0 2^{p_0} \int |f(x)|^{p_0} \left[\int_0^{2|f(x)|} \lambda^{p-1-p_0}\, d\lambda\right] dx = \frac{pC_0 2^{p_0}}{p-p_0} \int |f(x)|^{p_0} (2|f(x)|^{p-p_0})\, dx.$$

La stessa cosa si avrà per

$$II = pC_1 2^{p_1} \int |f(x)|^{p_1} \left[\int_{2|f(x)|}^{+\infty} \lambda^{p-1-p_1}\, d\lambda\right] dx$$

□

13. Lunedì 5.11.2012 - Disuguaglianza di Hardy - Littlewood - Sobolev: due dimostrazioni

Teorema 13.1 (H-L-S). *Sia $\mathbb{R}^d$ ed $0 < \alpha < d$. Allora*

hls1

$$\boxed{\left\|\frac{1}{|x|^\alpha} * f\right\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}} \tag{54}$$

dove p e q sono tali che

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p} \qquad q \neq \infty \qquad q \neq \frac{d}{\alpha}. \tag{55}$$

Osservazione 13.1. *Si osservi che i due casi che il teorema esclude hanno delle implicazioni:*

$$q \neq \frac{d}{\alpha} \Longrightarrow p \neq 1 \qquad q \neq \infty \Longrightarrow 1 - \frac{1}{p} \neq \frac{d}{\alpha}.$$

Inoltre si noti che la relazione richiesta tra gli indici è di tipo Young e può essere interpretata come un affermare che il nucleo di convoluzione è in $L^{\frac{d}{\alpha}}$.

Adesso daremo due dimostrazioni diverse che ci consentiranno di conoscere due filosofie d'attacco del problema diverse.

Dimostrazione. (C.N. $\Longrightarrow$). L'idea in questo senso della dimostrazione è di usare il riscalamento per vedere, supposta vera la disuguaglianza, quale deve essere la condizione sugli indici una volta effettuata una stima uniforme sugli L^p, fissato un certo parametro.
Sia $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ e consideriamo $\varphi_\lambda(x) := \varphi(\lambda x)$ che è ancora una funzione di classe $\mathscr{C}_0^\infty$. Usiamo queste funzioni per via della densità di questo spazio in tutti gli L^p. Adesso si ha che

$$\begin{aligned}\frac{1}{|x|^\alpha} * \varphi_\lambda(x) &= \int \frac{\varphi(\lambda y)}{|x-y|^\alpha} dy = \int \frac{\varphi(\lambda y)}{|x - \lambda \frac{y}{\lambda}|^\alpha} dy = (\tilde{y} = \lambda y) = \int \frac{\varphi(\tilde{y})}{|x - \frac{\tilde{y}}{\lambda}|^\alpha} \frac{d\tilde{y}}{\lambda^d} \\ &= \int \frac{\lambda^{\alpha-d}}{|\lambda x - \tilde{y}|^\alpha} \varphi(\tilde{y}) d\tilde{y} = \lambda^{\alpha-d} \left(\frac{1}{|x|^\alpha} * \varphi \right)(\lambda x).\end{aligned}$$

Poichè stiamo supponendo che la disuguaglianza valga, vediamo ora cosa succede se introduciamo le norme: si tenga a mente che $\|f_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{-\frac{d}{p}}$.

$$\begin{array}{ccc} \left\| \frac{1}{|x|^\alpha} * \varphi_\lambda \right\|_{L^q} \leq & & C\|\varphi_\lambda\|_{L^p} \\ || & & || \\ \lambda^{\alpha-d}\lambda^{-\frac{d}{q}} \left\| \frac{1}{|x|^\alpha} * \varphi \right\|_{L^q} & & \leq C\lambda^{-\frac{d}{p}} \|\varphi\|_{L^p} \end{array}$$

e questo vale $\forall\, \lambda > 0$. Adesso moltiplichiamo tutto per $\lambda^{\frac{d}{p}}$ così da avere

$$\lambda^{\alpha - d - \frac{d}{q} + \frac{d}{p}} \leq \frac{C\|\varphi\|_{L^p}}{\left\| \frac{1}{|x|^\alpha} * \varphi \right\|_{L^q}} \qquad \forall\, \lambda$$

e questo si ha se e solo se

$$\alpha - d - \frac{d}{q} + \frac{d}{p} = 0 \iff \frac{\alpha}{d} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{q}.$$

Resta da verificare i casi esclusi.

(1) ($q \neq \infty$). Questo significa voler mostrare che è falsa la seguente stima:

$$\left\| \frac{1}{|x|^\alpha} * \varphi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C\|\varphi\|_{L^{\left(\frac{d}{\alpha}\right)'}}.$$

Se fosse vera, per ogni x fissato si avrebbe, la seguente stima puntuale:

$$\left| \int \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha} dy \right| \leq C\|f\|_{L^{\left(\frac{d}{\alpha}\right)'}}$$

che se verificata in $x = 0$ da

$$\left| \int \frac{f(y)}{|y|^\alpha} dy \right| \leq C\|f\|_{L^{\left(\frac{d}{\alpha}\right)'}} \iff \frac{1}{|y|^\alpha} \in L^{\frac{d}{\alpha}}$$

che è falso.

(2) ($q \neq \frac{d}{\alpha}$). In questo caso si tratta di mostrare la falsità di

$$\left\| \frac{1}{|x|^\alpha} * f \right\|_{L^{\frac{d}{\alpha}}} \leq C\|f\|_{L^1}.$$

In questo caso prendiamo $f = \chi_{[0,1]} \in L^1$. Si vede immediatamente che

$$\left\| \frac{1}{|x|^\alpha} * \chi_{[0,1]} \right\| = \int_x^{x+1} \frac{1}{|y|^\alpha} dy \geq \frac{1}{|x|^\alpha} \Longrightarrow \frac{1}{|x|^\alpha} \in L^{\frac{d}{\alpha}}$$

che è falso.

$\square$

Dimostrazione. (C.S. $\Longleftarrow$). In questa parte della dimostrazione vorremo avere delle stime dei sopralivelli, l'idea è di usare Marcinkiewiz, perchè proprio grazie a quel teorema ci basterà dimostrare che vale

$$\left\| \frac{1}{|x|^\alpha} * f \right\|_{L^q_W} \leq C\|f\|_{L^p} \qquad \forall\ \frac{d}{\alpha} \leq q < +\infty.$$

Questo si ha perchè l'intervallo in cui varia q è un aperto e quindi possiamo trovare q_1, q_2, p_1, p_2 per cui vale la stima di cui sopra e quindi si può applicare il teorema.

Si osservi che abbiamo scritto $\frac{d}{\alpha} \leq q$ ma questo è vero per $L_W^{\frac{d}{\alpha}}$ e noi lo escluderemo dopo per $L^{\frac{d}{\alpha}}$.

L'intenzione, ora, è di spezzare il nucleo di convoluzione in due parti, entrambe dipendendi da un parametro che faremo variare e che ci permetterà di controllare e quindi stimare la situazione.

Siano

$$K = \frac{1}{|x|^\alpha} \qquad K^1_\mu = K\chi_{B(0,\mu)} \qquad K^2_\mu = K\chi_{B^\complement(0,\mu)}.$$

Adesso, anche se K non sta in nessun L^p, le sue parti stanno in diversi spazi di Lebesgue; per esempio $K^1_\mu \in L^1$ e $K^2_\mu \in L^\infty$. Adesso, partendo da come è definita la norma di L^p_W ci chiediamo se

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^d \left(mis\{|K * f| > \lambda\}\right) \leq \|f\|^q_{L^p}.$$

Sia un λ fissato e $K = K^1_\mu + K^2_\mu$. Per l'additività della convoluzione si ha

$$\{|K * f| > \lambda\} = \{|K^1_\mu * f + K^2_\mu * f| > \lambda\} \subset \left\{|K^1_\mu * f| > \frac{\lambda}{2}\right\} \cup \left\{|K^2_\mu * f| > \frac{\lambda}{2}\right\}$$

e supponiamo per semplicità $\|f\|_{L^p} = 1$. Si ha, per Young che

$$\|K^2_\mu * f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|K^2_\mu\|_{L^{p'}} = \|K^2_\mu\|_{L^{p'}}$$

e supponiamo che esista (lo troveremo esplicitamente in seguito) un λ tale che $\|K^2_\mu\|_{L^{p'}} < \frac{\lambda}{2}$ e di conseguenza il sopralivello $\{|K^2_\mu * f| > \frac{\lambda}{2}\} = \varnothing$. Fatto questo, blocchiamo il nostro $\mu(\lambda)$. Adesso resta da stimare l'altro sopralivello. Sempre per Young, si ha

$$\|K^1_\mu * f\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|K^1_\mu\|_{L^1} = \|K^1_\mu\|_{L^1}$$

.Ma adesso noi vogliamo una stima L^q, ma grazie a Chebichev, se sappiamo stimare una norma in L^p di una funzione, ne sappiamo stimareanche i suoi sopralivelli. Quindi abbiamo

$$\left|\left\{|K^1_\mu * f| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \left(\frac{\lambda}{2}\right)^p \leq \|K^1_\mu * f\|^p_{L^p} = \|K^1_\mu\|^p_{L^p}.$$

Ricordiamoci ora che l'obiettivo è dimostrare che

$$|\{|K * f| > \lambda\}| \leq \frac{C\|f\|^q_{L^p}}{\lambda^q}$$

e che, posto uno dei sopralivelli vuoto, fino ad ora siamo riusciti a dire che $|\{|K * f| > \lambda\}| \leq C\lambda^{-p}\|K^1_\mu\|^p_{L^1}$. Resta da fare un'ultima stima che ci consenta di dire che $C\lambda^{-p}\|K^1_\mu\|^p_{L^1} \leq C\lambda^{-q}\|f\|^q_{L^p}$. Dovremo

(1) trovare la condizione per rendere vuoto quel sopralivello ossia un λ tale che $\|K^2_\mu\|_{L^{p'}} \leq \frac{\lambda}{2}$;
(2) terminare la stima per quanto riguarda il sopralivello di tutto K convoluto con f ossia verificare $\lambda^{-p}\|K^1_\mu\|^p_{L^1} \leq C\lambda^{-d}$.

Procediamo:

(1) Si ha

$$\int_{B^\complement(0,\mu)} \frac{1}{|x|^{\alpha p'}} dx = \int_\mu^{+\infty} r^{d-1-\alpha p'} dr = \mu^{d-\alpha p'} \Longrightarrow \|K^2_\mu\|_{L^{p'}} = \mu^{\frac{d}{p'}-\alpha}$$

e di conseguenza dovremo scegliere μ in modo tale da avere

$$\mu^{d-\frac{d}{p}-\alpha} = \frac{\lambda}{2}; \tag{56}$$

(2) osserviamo che $\mu(\lambda)$ è variabile e per questo ci possiamo muovere tra i vari L^p_W; se invece fosse sempre fissato avremmo delle stime uniformi sugli L^p.
Valutare la stima 2. significa studiare

$$\lambda^{q-p}\left(\int_{|x|<\mu}\frac{dx}{|x|^\alpha}\right)^p \le C$$

ma osserviamo che

$$\int_{|x|<\mu}\frac{1}{|x|^\alpha}dx = \int_0^\mu r^{-\alpha+d-1} = \mu^{\alpha+d}$$

Di conseguenza si ha

$$\lambda^{q-p}\mu^{-\alpha p+dp} \le C \iff \mu^{\left(d-\frac{d}{p}-\alpha\right)(q-p)+\alpha p+dp} \le C \iff$$
$$\iff dq-dp-d\frac{q}{p}+d-\alpha q+\alpha p-\alpha p+dp=0.$$

Dividendo tutto per q si trova che

$$d-\frac{d}{p}+\frac{d}{q}-\alpha=0 \iff 1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{\alpha}{q}=0$$

che è la condizione da porre sugli indici.

□

Adesso vediamo una dimostrazione di tipo diverso: utilizzeremo la funzione massimale e, mentre nella precedente avevamo stimato i sopralivelli, qui effettueremo delle stime di tipo puntuale.

Dimostrazione. Si ha per ogni x fissato che possiamo scrivere

$$\int_{\mathbb{R}^d}\frac{1}{|x-y|^\alpha}f(y)dy = \int_{B(x,R}\frac{1}{|x-y|^\alpha}f(y)dy + \int_{B^\complement(x,R)}\frac{1}{|x-y|^\alpha}f(y)dy = I+II.$$

Adesso stimiamo i due termini:

$$|II| \le (\text{Hölder}) \le \|f\|_{L^p}\left\|\frac{1}{|x|^\alpha}\right\|_{L^{p'}(B^\complement(0,R))} \le \|f\|_{L^p}\left(\int_R^{+\infty}\frac{1}{r^{\alpha p'}}r^d dr\right)^{\frac{1}{p'}} \le$$
$$\le \|f\|_{L^p}R^{(d-\alpha p')\frac{1}{p'}} = \|f\|_{L^p}R^{d-\frac{d}{p}-\alpha}$$

Per quanto riguarda I, spezziamo la palla in tante palle concentriche.[6]

$$\begin{aligned}|I| &= \sum_{2^j<R}\int_{B(x,2^j)\setminus B(x,2^{j-1})}\frac{f(y)}{|x-y|^\alpha}dy = \\ &= \sum_{2^j<R}\frac{1}{2^{j\alpha}}\int_{B(x,2^j)\setminus B(x,2^{j-1})}|f(y)|dy \le \sum_{2^j<R}\frac{1}{2^{j\alpha}}\int_{B(x,2^j)}|f(y)|dy = \\ &= \sum_{2^j<R}\frac{1}{2^{j\alpha}}\int_{B(x,2^j)}|f(y)|\frac{2^{jd}}{2^{jd}}dy = \sum_{2^j<R}2^{j(d-\alpha)}\mathcal{M}f(x) \le R^{d-\alpha}\mathcal{M}f(x)\end{aligned}$$

dove nell'ultima disuguaglianza si è usato il fatto che la serie

$$\sum_{-\infty<j<\bar{j}}2^{j\alpha} = 2^{\bar{j}\alpha}\left(\sum_{-\infty<j<0}2^{j\alpha}\right)$$

è convergente. Adesso quindi abbiamo tra le mani questa stima:

$$\left|\left(\frac{1}{|x|^\alpha}\right)(x)\right| \le R^{d-\frac{d}{p}-\alpha}\|f\|_{L^p} + R^{d-\alpha}\mathcal{M}f(x) \qquad \forall x,\ \forall R.$$

Adesso notiamo che si tratta della somma di due termini del tipo $aR^\gamma+bR^\delta$ e il modo migliore per ottimizzarla è di prendere $aR^\gamma = bR^\delta$. Quindi nel nostro caso si avrà

$$R^{d-\frac{d}{p}-\alpha}\|f\|_{L^p} = R^{d-\alpha}\mathcal{M}f(x) \iff R^{-\frac{d}{p}} = \frac{\mathcal{M}f(x)}{\|f\|_{L^p}} \iff R = \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\mathcal{M}f(x)}\right)^{\frac{p}{d}}.$$

[6] La disuguaglianza nella seconda riga è possibile perchè prima ci siamo localizzati sulle corone sferiche.

Quindi con questo R troviamo che

$$\left|\left(\frac{1}{|x|^\alpha} * f\right)(x)\right| \le 2\mathcal{M}f(x)\left|\frac{\|f\|_{L^p}}{\mathcal{M}f(x)}\right|^{\frac{p}{d}(d-\alpha)} = 2[\mathcal{M}f(x)]^{1-p+\alpha\frac{p}{d}}\|f\|_{L^p}^{p-\alpha\frac{p}{d}}$$

ma questa è una stima puntuale; stimiamo tutto il L^q.

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{|x|^\alpha} * f\right\|_{L^q} &\le 2\|f\|_{L^p}^{p-\alpha\frac{p}{d}}\|[\mathcal{M}f(x)]^{1-p+\alpha\frac{p}{d}}\|_{L^q} \le \\ &\le \|f\|_{L^p}^{p-\alpha\frac{p}{q}}\|\mathcal{M}f\|_{L^{q\left(1-p+\alpha\frac{p}{d}\right)}}^{1-p+\alpha\frac{p}{q}}\end{aligned}$$

e siccome l'ultima deve essere una stima in L^p, imponiamo

$$q(1-p+\alpha\frac{p}{d}) = p \iff 1-p+\alpha\frac{p}{d} = \frac{p}{q} \iff \frac{1}{p} - 1 + \frac{\alpha}{d} = \frac{1}{q}$$

e questo conclude. □

14. Lunedì 12.11.2012 - Funzione massimale e Decomposizione atomica degli L^p

In passato abbiamo sfruttato il fatto che $\mathcal{M} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1_W(\mathbb{R})$ (mai $L^1 \longrightarrow L^1$). Qui vogliamo dare un teorema che ci convincerà di questo e l'idea che c'è dietro la sua dimostrazione.

Teorema 14.1. *Sia* $\mathbb{R}^d$. *Allora*

$$\left|\{\mathcal{M}f > \lambda\}\right| \le \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1}. \tag{57}$$

Si osservi che la quantità che stiamo stimando, in realtà, non è una norma. Supponiamo di avere $d = 1$ e consideriamo $\{\mathcal{M}f(x) > \lambda\}$. Il fatto che ci sia un x che gli appartiene, significa che esiste un $r(x)$ tale che

pp
$$\fint_{B(x,r(x))} |f| dx > \lambda \tag{58}$$

ma sicuramente tutte le palle concentriche formano un ricoprimento e di conseguenza ha senso scrivere

$$\{\mathcal{M}f > \lambda\} \subset \bigcup_{x\in\{\mathcal{M}f>\lambda\}} B(x, r(x))$$

e $\forall\, x$ fissato nel sopralivello, la (58) sta ad indicare che

$$\int_{B(x,r(x))} |f| dx > \lambda |B(x, r(x))| \iff \frac{1}{\lambda}\int_{B(x,r(x))} |f| dx > |B(x, r(x))|.$$

Adesso, se si somma su tutti gli x si trova

$$\sum_x \frac{1}{\lambda}\int_{B(x,r(x))} |f| dx > \sum_x |B(x, r(x))| \ge |\mathcal{M}f > \lambda|$$

con l'ultima minorazione dovuta alla sub-additività della misura di Lebesgue. E' quasi la disuguaglianza cercata, ma qui in effetti potremmo conteggiare ripetute volte la stessa palla; per ovviare al problema bisogna avere informazioni su come è fatto il ricoprimento. Intuitivamente, utilizzeremo un lemma di ricoprimento grazie al quale, dato un insieme di aperti possiamo contare quelli che si toccano al più due volte. Su $\mathbb{R}$ questo è possibile grazie al fatto che esso ammette un ordinamento e quindi si può trovare un estremo superiore.

Osservazione 14.1 (Notazione). *Siano i numeri diadici* $2^{\mathbb{Z}}$. *L'indice* N *indica che stiamo effettuando un'operazione su di essi. Per esempio*

$$\sum_{N\le N_0} N^\alpha \sim N_0^\alpha \iff \sum_{j\le j_0} 2^{j\alpha} = 2^{j_0\alpha}\left(\sum_{j\le j_0-1} 2^{j\alpha}\right).$$

Definizione 14.1 (Atomo). *Un atomo di taglia* N *è una funzione misurabile*

$$\chi_N : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$$

tale che

1. $\sup_{\mathbb{R}^d} |\chi_N| \le 1$;
2. $mis(\{\operatorname{supp}\chi_N\}) = N$.

Teorema 14.2 (**Decomposizione atomica degli L^p**)**.** *Si ha che* $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $\exists \{C_N\}_{N\in 2^{\mathbb{Z}}} \in \mathbb{C}$ *tali che* $\exists \{\chi_N\}_{N\in 2^{\mathbb{Z}}}$ *e vale*

$$f = \sum_N C_N \chi_N \qquad \|f\|_{L^p}^p \sim \sum_N C_N^p N \tag{59}$$

Diamo anche in questo caso solo un'idea della dimostrazione.
Scegliamo, per ogni N, un C_N tale che $mis(\{|f| > C_N\}) = N$. Adesso basterà scegliere $\chi_N = \chi_{E_n}$ dove

$$E_N = \{C_{2N} < |f| < C_N\}$$

e di conseguenza $|E_N| = N$. Successivamente, consideriamo f ristretta agli E_N, i quali, possono essere disgiunti. Qui avremo

$$\sum_N |E_N||C_{2N}|^p \leq |f|_{L^p}^p \leq \sum_N |E_N||C_N|^p \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \sum_N N|C_{2N}|^p \leq |f|_{L^p}^p \leq \sum_N N|C_N|^p.$$

15. Lunedì 19.11.2012 - Terza dimostrazione di H-L-S e Immersioni di Sobolev

L'enunciato è sempre lo stesso, ma daremo qui una dimostrazione della disuguaglianza di Hardy - Littlewood - Sobolev che fa uso della decomposizione atomica degli spazi L^p.

Dimostrazione. Chiamiamo $Tf := \frac{1}{|x|^\alpha} * f$; abbiamo già visto in precedenza che dimostrare una stima di questo tipo è equivalente a dimostrare che

$$|(Tf,g)_{L^2}| \leq C\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{q'}}$$

con $g \in L^{q'}$. Visto che, come abbiamo visto nella sezione precedente, possiamo farlo, ci scriviamo f e g nella loro decomposizione atomica. Si ha

$$f = \sum_N c_N \chi_N \qquad g = \sum_L b_L \eta_L.$$

Sostituendo all'interno della disuguaglianza che vogliamo dimostrare vera abbiamo

$$|(Tf,g)_{L^2}| = \left|\sum_{N,L} c_N b_L (T\chi_N, \eta_L)_{L^2}\right| \leq \sum_{N,L} |c_N||b_L||(T\chi_N,\eta_L)_{L^2}|$$

ma il problema è che vorremmo che l'ultima quantità possa essere maggiorata da

$$C\left(\sum_N N c_N^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_L L b_L^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Quindi si tratta di valutare $|(T\chi_N,\eta_L)|$ e questo è positivo dato che è più semplice stimare convoluzioni di caratteristiche...e simili, come nel nostro caso. Sfruttiamo un lemma che dimostreremo tra breve, per il quale

$$|(T\chi_N,\eta_L)| \leq C\min\left\{NL^{1-\frac{\alpha}{d}}, LN^{1-\frac{\alpha}{d}}\right\}$$

ed il minimo certamente esiste aper via della simmetria del prodotto scalare. Poniamo $\tilde{c}_N = c_N N^{\frac{1}{p}}$ e $\tilde{b}_L = b_L L^{\frac{1}{q}}$. Allora

$$|(Tf,g)_{L^2}| \leq \sum_{N,L} |\tilde{c}_N| N^{-\frac{1}{p}} |\tilde{b}_L| L^{-\frac{1}{q}} |(T\chi_N,\eta_L)| \leq C\left(\sum_N \tilde{c}_N^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_L \tilde{b}_{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \leq$$

$$\leq (\text{Lemma}) \leq \sum_L \sum_N |c_N||b_L| N^{-\frac{1}{p}} L^{-\frac{1}{q'}} \min\left\{NL^{1-\frac{\alpha}{d}} LN^{1-\frac{\alpha}{d}}\right\}$$

Ma[7] si possono avere due casi, che adesso sommeremo e stimeremo.

$$\begin{cases} \sum_{N>L}\sum |c_N||b_L|N^{-\frac{1}{p}}L^{-\frac{1}{q'}}LN^{1-\frac{\alpha}{d}} & \text{Caso 1} \\ \sum_{N\le L}\sum |c_N||b_L|N^{-\frac{1}{p}}L^{-\frac{1}{q'}}NL^{1-\frac{\alpha}{d}} & \text{Caso 2} \end{cases} \le$$

$$\le \sum_{N>L}\sum N^{1-\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{p}}L^{1-\frac{1}{q'}}|c_N||b_L| + \sum_{N\le L}\sum N^{1-\frac{1}{p}}L^{1-\frac{\alpha}{d}-\frac{1}{q'}}|c_N||b_L| \le$$

$$\le \sum_{N>L}\sum N^{-\frac{1}{q}}L^{\frac{1}{q}}|c_N||b_L| + \sum_{N\le L}\sum N^{1-\frac{1}{p}}L^{1-\frac{1}{q}}|c_N||b_L|$$

Adesso, bisogna ricordare che, per il lemma di Schur, se abbiamo un nucleo tale che $K(x,y)\in L^\infty_x L^r_y$ e allo stesso tempo $K(x,y)\in L^\infty_y L^r_x$ allora

$$\left|\int K(x,y)f(x)g(x)dxdy\right| \le C\|f\|_{L^p}\|g\|_{L^{q'}}.$$

Dobbiamo vedere se le ipotesi sono soddisfatte con

$$K(x,y) = N^{-\frac{1}{q}}L^{\frac{1}{q}} \qquad N>L \qquad r=\frac{d}{\alpha}.$$

In pratica bisogna vedere se, per ogni L fissato si ha che

$$\sum_{N>L} N^{-\frac{1}{q}}L^{\frac{1}{q}} \le C.$$

Abbiamo che

$$\sum_{N>L} N^{-\frac{1}{q}}L^{\frac{1}{q}} = \sum_{N>L} N^{-\frac{d}{\alpha q}}L^{\frac{d}{\alpha q}} = L^{\frac{d}{\alpha q}}\sum_{N>L} N^{-\frac{d}{\alpha q}} \le L^{\frac{d}{\alpha q}}L^{-\frac{d}{\alpha q}} = 1$$

quindi vale il lemma di Schur e questo conclude la dimostrazione. □

Lemma 15.1. *Sia $\alpha\in[1,d)$. Allora*

$$|(T\chi_N,\eta_L)| \le C\min\left\{NL^{1-\frac{\alpha}{d}}, LN^{1-\frac{\alpha}{d}}\right\}. \tag{60}$$

Dimostrazione. A causa della simmetria, ci basta provare il lemma per uno solo dei casi in cui si ha il minimo; per avere l'altro caso basta scambiare N ed L. Quindi dobbiamo dimostrare che

$$\left|\int\left(\frac{1}{|x|^\alpha}*\chi_N\right)(x)\eta_L(x)dx\right| \le CNL^{1-\frac{\alpha}{d}}.$$

Dobbiamo provare a trovare una stima del sup della quantità a sinistra: moltiplichiamo per $\int\eta_L dx \le L$ così da avere

$$\left\|\frac{1}{|x|^\alpha}*\chi_N\right\|_{L^\infty} \le CN^{1-\frac{\alpha}{d}}.$$

Fissiamo un insieme E: se $|E|\le N$ allora la precedente disuguaglianza diventa

$$\int_E \frac{dx}{|x|^\alpha} \le CN^{1-\frac{\alpha}{d}}$$

che continua a mantenere senso dato che, per definizione,

$$\left\|\frac{1}{|x|^\alpha}*\chi_N\right\|_{L^\infty} = \left|\int \frac{1}{|x|^\alpha}(\chi_E(x-x_0))dx\right| = \left|\int_{E-x_0}\frac{dx}{|x|^\alpha}\right|.$$

Osserviamo ora che poichè $|x|^{-\alpha}\longrightarrow 0$ per $x\to+\infty$, il caso peggiore lo si ha se la regione in cui integriamo è una palla. Sia, allora, $E=B(0,r)$; sicuramente esiste un N tale che $|B(0,r)|=N$ e sostanzialmente possiamo scrivere

$$\int_{B(0,r)}\frac{dx}{|x|^\alpha} \simeq \int_0^{N^{\frac{1}{d}}}\frac{1}{r^\alpha}r^{d-1}dr = \int_0^{N^{\frac{1}{d}}} r^{d-1-\alpha}dr = N^{\frac{1}{d}(d-\alpha)}$$

e questo va bene. Sia ora E un insieme qualsiasi. Sia ora E un insieme qualsiasi. Bisogna mostrare che

$$\int_E\frac{dx}{|x|^\alpha} \le \int_{B(0,r)}\frac{dx}{|x|^\alpha}.$$

[7] Per non portare avanti una notazione troppo carica, dall'applicazione del lemma abbiamo scritto i coefficienti senza la tilde.

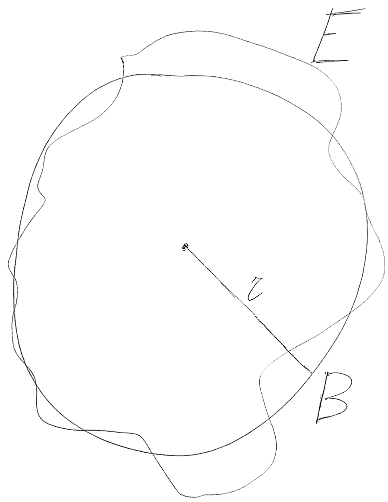

FIGURA 4 4

Abbiamo che

$$\int_E \frac{dx}{|x|^\alpha} = \int_{E\cap B(0,r)} \frac{dx}{|x|^\alpha} + \int_{E\cap \complement B(0,r)} \frac{dx}{|x|^\alpha} \le \int_{E\cap B(0,r)} \frac{dx}{|x|^\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}\int_{E\cap \complement B(0,r)} dx$$

dove la maggiorazione è stata fatta con il raggio della palla più vicina ad E, come mostrato dalla figura. Proseguendo troviamo che l'ultima quantità è maggiorabile da

$$\int_{E\cap B(0,r)} \frac{dx}{|x|^\alpha} + \frac{1}{r^\alpha}\mu(\{B\setminus E\}) \le \int_{E\cap B(0,r)} \frac{dx}{|x|^\alpha} + \int_{B\setminus E} \frac{dx}{|x|^\alpha}.$$

□

Osservazione 15.1. *Nella dimostrazione si è sfruttato il fatto che $E\cap \complement B = B\setminus E$. Questo è vero perchè*

$$|B| = |B\cap E| + |B\cap \complement E| = |B\setminus E|$$

ma allo stesso tempo

$$|B| = |E| = |B\cap E| + |\complement B\cap E|$$

e mettendo insieme le due relazioni si trova che $|\complement B\cap E| = |B\cap \complement E| = |B\setminus E|$.

Passiamo ora alle immersioni di Sobolev.

Teorema 15.1. *Si ha che $\forall\ \varphi\in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ vale la seguente stima con dei precisi indici:*

imm_sob (61)
$$\boxed{\|\varphi\|_{L^q} \le C\|\nabla\varphi\|_{L^p} \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{p^*} = \frac{d-p}{dp} \qquad d>p}$$

Prima di dimostrare il teorema saranno necessarie alcune osservazioni e un lemma preliminare. Come prima cosa, si osservi che se $d=p$ formalmente si ha $\|\cdot\|_{L^\infty} \le \|\cdot\|_{L^d}$, ma è una stima falsa.
Infine osserviamo che se $p>d$ allora $W^{1,p} \hookrightarrow \mathscr{C}^{0,\alpha}$.
Per dimostrare la validità delle immersioni di Sobolev serve un lemma al quale abbiamo precedentemente accennato.

Lemma 15.2. *Sia* $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Allora*

conv_sob

$$\boxed{|\varphi(x)| \le |\nabla\varphi| * \frac{1}{|x|^{d-1}} = C\int \frac{|\nabla\varphi(y)|}{|x-y|^{d-1}}dy} \tag{62}$$

Dimostrazione. A meno di traslazioni ci si riconduce al dover dimostrare che

$$|\varphi(0)| \le C\int \frac{|\nabla\varphi(y)|}{|y|^{d-1}}dy.$$

Si ha, per il teorema fondamentale del Calcolo che

$$|\varphi(0)-\varphi(y)| = \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}\varphi(ty)dt\right| \le \int_0^1 |y||\nabla\varphi(ty)|dy$$

ma questo deve rimanere vero anche mediando sulle palle; si dovà avere che

$$\begin{aligned}\left|⨍_{B_r(0)}\varphi(0)dy - ⨍_{B_r(0)}\varphi(y)dy\right| &\le ⨍_{B_r(0)}|\varphi(0)-\varphi(y)|dy \le \\ &\le \frac{1}{|B_r(0)|}\int_{B_r(0)}\left(\int_0^1 |y||\nabla\varphi(ty)|dt\right)dy\end{aligned}$$

ma dobbiamo dimostrarlo. Si ha che

$$\begin{aligned}\left|⨍_{B_r(0)}\varphi(0)dy - ⨍_{B_r(0)}\varphi(y)dy\right| &= \left|\varphi(0) - ⨍_{B_r(0)}\varphi(y)dy\right| \le \\ &\le \frac{1}{|B_r(0)|}\int_{B_r(0)}\int_0^1 |y||\nabla\varphi(ty)|dtdy = \\ &= (\pm ty = \tilde{y}) = \frac{1}{|B_r(0)|}\int_0^1\left(\int_{B_r(0)}\frac{|y|}{t}|\nabla\varphi(y)|\frac{dy}{t^d}\right)dt \le \\ &\le (\text{Fubini}) \le \frac{1}{|B_r(0)|}\int_{B_r(0)}\left(\int_{\frac{|y|}{r}}^1 \frac{dt}{t^{d+1}}\right)|y||\nabla\varphi(y)|dy = \\ &= \frac{1}{|B_r(0)|}\int_{B_r(0)}\left(1-\left(\frac{R}{|y|}\right)^d\right)|y||\nabla\varphi(y)|dy.\end{aligned}$$

Adesso l'ultima quantità è uguale a

$$\frac{1}{|B_r(0)|}\int_{B_r(0)}|y||\nabla\varphi(y)|dy + \frac{1}{|B_r(0)|}\int_{B_r(0)}\frac{r^d}{|y|^{d-1}}|\nabla\varphi(y)|dy = I + II$$

con

$$I \simeq ⨍_{B_r(0)}\varphi\, dy \longrightarrow 0$$

perchè $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty$ mentre, poichè $|B_r(0)| = r^d$ si ha che per $r \to +\infty$

$$II \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\nabla\varphi(y)|}{|y|^{d-1}}dy$$

e questo conclude. □

16. Giovedì 22.11.2012 - Teoria di unicità per NLS con $d \ge 3$

Facciamo un pò il punto di come avevamo lasciato la situazione prima di utilizzare i nuovi strumenti a nostra disposizione.
Avevamo

$$\begin{cases} i\partial_t u - \Delta u \pm u|u|^\alpha = 0 \\ (t,x) \in \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^d. \end{cases}$$

Nel caso $d = 1$ fortunatamente $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ $\forall\,\alpha$ e quindi avevamo una buona teoria di esistenza ed unicità;
nel caso $d = 2$ invece $H^2(\mathbb{R}^2) \not\hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2)$, ma grazie a Brèzis - Galouet siamo riusciti ad avere, per $0 < \alpha \le 2$ una buona teoria di esistenza locale;
le cose vanno decisamente peggio nel caso $d = 3$: in generale si può dire che per $p \le q \le \frac{dp}{d-p}$ si ha l'immersione $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^d)$ e nel nostro caso concreto possiamo arrivare massimo a

$H^1(\mathbb{R}^3) = W^{1,2}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6$ che è decisamente ben lontano da L^∞. Questo però non ci impedisce, almeno, di trovare dei risultati di unicità.
Morale della favola: ciò nonostante con le stime dell'energia non arriviamo lontano...abbiamo bisogno di quelle dispersive.

Teorema 16.1 (**Unicità in dimensione superiore**). *Poste valide*

(1) *l'immersione di Sobolev $H^1(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{\frac{2d}{d-2}}$ con $d > 2$ per lavorare al caso di nostro interesse;*
(2) *la stima dispersiva generalizzata*

$$\left\| e^{it\Delta} f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le \frac{C}{t^{\vartheta(p)}} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \qquad \vartheta(p) = \frac{d}{2}\left(1 - \frac{2}{p}\right).$$

Sia $u(0,x) = \varphi(x) \in H^1(\mathbb{R}^d)$ e $d \ge 3$. Allora se

$$0 \le \alpha < \frac{4}{d-2}$$

esiste al più una soluzione di $(NLS)_\alpha$ in $\mathscr{C}_t(H^1)$.

Dimostrazione. Procediamo per assurdo supponendo di avere almeno due soluzioni del nostro problema. Esse saranno della forma

$$u_1(t,x) = e^{it\Delta}\varphi \pm \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u_1|u_1|^\alpha(s)\,ds$$

$$u_2(t,x) = e^{it\Delta}\varphi \pm \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u_2|u_2|^\alpha(s)\,ds$$

e l'obiettivo sarà dimostrare che la loro differenza è nulla in una norma da noi scelta. Se vale questo allora sarà vero per ogni norma considerabile. Si ha

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^p_x} \le \int_0^t \left\| e^{i(t-s)\Delta}\left(u_1|u_1|^\alpha(s) - u_2|u_2|^\alpha(s)\right)\right\| ds \le$$

$$\le C \int_0^t \frac{1}{|t-s|^{\vartheta(p)}} \|u_1|u_1|^\alpha - u_2|u_2|^\alpha\|_{L^{p'}_x} ds$$

Adesso un fatto algebrico; lo possiamo utilizzare ora dato che ci siamo liberati del propagatore. Si ha che

(63) $$\left| z|z|^\alpha - w|w|^\alpha \right| \le C|z-w|\left(|z|^\alpha + |w|^\alpha\right) \qquad \forall\, z, w \in \mathbb{C}.$$

Possiamo continuare la nostra stima: l'ultima quantità è

$$\le C \int_0^t \frac{1}{|t-s|^{\vartheta(p)}} \left\| |u_1 - u_2| \left| |u_1|^\alpha + |u_2|^\alpha \right| \right\|_{L^{p'}_x} ds \le$$

$$\le C \int_0^t \frac{1}{|t-s|^{\vartheta(p)}} \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^p_x} \left(\|u_1^\alpha\|_{L^r} + \|u_2^\alpha\|_{L^r} \right) ds$$

con

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \iff 1 - \frac{2}{p} = \frac{1}{r}.$$

Infine maggioriamo tutto con

$$\left(\sup_{s\in[0,t]} \|u_1(s) - u_2(s)\|_{L^p_x} \right) \left(\sup_{s\in[0,t]} \left[\|u_1\|_{L^{\frac{\alpha p}{p-2}}} + \|u_2\|_{L^{\frac{\alpha p}{p-2}}} \right] \right) \left(\int_0^t \frac{ds}{|t-s|^{\vartheta(p)}} \right).$$

Ma questa è una stima puntuale e vale per ogni s una volta fissato t e quindi nel termine tra le prime parentesi tonde è sensato passare al sup in tempo; il secondo termine è maggiorabile da una costante, grazie alle immersioni di Sobolev; infine l'ultimo, se $\vartheta(p) < 1$ e t è piccolo, diventa integrabile ed è una quantità finita. Quindi mettendo insieme i pezzi troviamo che secondo e terzo termine sono maggiori di 1 e, al limite, si arriva ad avere una quantità positiva minore o uguale a 0 e quindi anche a sinistra abbiamo una quantità identicamente nulla.
Quindi per avere tutto questo dobbiamo fare in modo che

$$\begin{cases} \vartheta(p) = \frac{d}{2}\left(1 - \frac{2}{p}\right) < 1 & a) \\ 2 \le \frac{\alpha p}{p-2} \le \frac{2d}{d-2} & b) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$a)\ \frac{p-2}{p} < \frac{2}{d} \iff \frac{p}{p-2} > \frac{d}{2}$$

$$b)\ 2 \le \frac{\alpha p}{p-2} \le \frac{2d}{d-2} \iff 2\frac{p}{p-2} \le \alpha \le \frac{2d}{d-2}\frac{p-2}{p}$$

e mettendo insieme a) e b) si trova che

$$\alpha < \frac{2d}{d-2}\frac{2}{d} = \frac{4}{d-2}$$

e questo conclude la dimostrazione. □

17. Lunedì 26.11.2012 - Stime di Strichartz

Siamo arrivati finalmente allo studio di stime a priori sulla regolarità nello spazio-tempo per le soluzioni del seguente problema:

sch_lin

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \in L^2 \end{cases} \tag{64}$$

Ma vediamo di cosa si tratta. Allo stato attuale delle nostre conoscenze sappiamo che esiste unica $u(t,x) \in \mathscr{C}_t(L^2_x)$ e che si conserva la massa ossia $\|u(t,x)\|_{L^2_x} = \|\varphi\|_{L^2_x}$: quindi, posto $u(t,x) = e^{it\Delta}\varphi$, quello che sappiamo al momento è che

$$\|e^{it\Delta}\varphi\|_{L^\infty_t L^2_x} \le \|\varphi\|_{L^2_x}.$$

L'obiettivo che ci si pone è di generalizzare questo tipo di maggiorazioni a priori con quantità in norma L^2 per coppie di indici $(p,q) \neq (\infty, 2)$.
Procederemo come segue:

(1) enunceremo il teorema secondo le cui condizioni valgono le stime di Strichartz;
(2) analizzeremo la necessità di tali condizioni;
(3) daremo la dimostrazione del teorema, dove si renderà palese la necessità di una condizione particolare che, come vedremo, a priori risulta priva di giustificazioni.

Teorema 17.1 (**Stime di Strichartz**). *Sia la $\varphi(x)$ del problema (64). Supponiamo la dimensione spaziale $d \ge 3$. Allora $\forall\,(p,q) \in [1+\infty] \times [1,+\infty]$ si ha che*

stric

$$\boxed{\left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L^p_t L^q_x} \le C\|\varphi\|_{L^2_x} \iff \frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}, \quad p \ge 2} \tag{65}$$

Osservazione 17.1. *Si osservi che la stima che conoscevamo con $(p,q) = (\infty,2)$ rientra tra quelle di Strichartz come uno degli estremi ammissibili; inoltre, come mostrato in figura (5) tutte le possibile stime costituiscono un segmento: in assenza della restrizione che impone $p \ge 2$ a priori potremmo aspettarci una semiretta e quindi molte più stime. Questa è una delle conseguenze di questa condizione.*

Osservazione 17.2. *La condizione*

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}$$

è necessaria. Il fatto è che, se supponiamo di saper calcolare la norma per qualsiasi φ, allora le stime dovranno mantenersi vere anche per le riscalate $\varphi_\lambda(x) = \varphi(\lambda x)$ $\forall\,\lambda > 0$. Un rapido calcolo mostra che, con $x \in \mathbb{R}^d$ si ha che

$$\|\varphi_\lambda(x)\|_{L^2} = \left(\int |\varphi(\lambda x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = (\lambda x = y) = \left(\int |\varphi(x)|\frac{dy}{\lambda^d}\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda^{-\frac{d}{2}}\|\varphi(x)\|_{L^2}.$$

Detto questo vediamo come nascono queste condizioni: tutto deriva dall'invarianza per riscalamenti parabolici delle soluzioni di (64) ossia

$$\begin{cases} i\partial_t u_\lambda + \Delta u_\lambda = 0 \\ u(0,x) = \varphi(\lambda x) \end{cases} \iff u_\lambda(t,x) = u(\lambda^2 t, \lambda x).$$

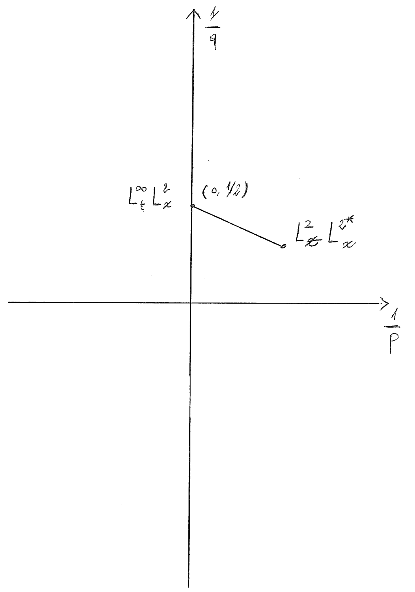

FIGURA 5. Possibili interpolazioni 5

Si ha di conseguenza che

$$\begin{array}{ccccc}
\left\|e^{it\Delta}\varphi_\lambda\right\|_{L^p_t L^q_x} & = & \left\|u(\lambda^2 t,\lambda x)\right\|_{L^p_t L^q_x} & = & \lambda^{-\frac{2}{p}}\lambda^{-\frac{d}{q}}\left\|e^{it\Delta}\varphi\right\|_{L^p_t L^q_x} \\
\leq & & \leq & & \leq \\
C\|\varphi_\lambda\|_{L^2_x} & = & \|\varphi(\lambda x)\|_{L^2_x} & = & \lambda^{-\frac{d}{2}}\|\varphi\|_{L^2_x}
\end{array}.$$

Adesso passiamo ad un teorema di analisi funzionale che ci permetterà di dimostrare in modo abbastanza astuto le stime di Stirchartz.

Teorema 17.2 (**Teorema del** TT^*). *Sia l'operatore $T:\mathcal{H}\longrightarrow X$ da uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ a uno di Banach X. Sia definito l'aggiunto $T^*:X'\longrightarrow\mathcal{H}$ dove*

$$(T^*x',h)_{\mathcal{H}}=\langle Th,x'\rangle_{X',X}.$$

Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

(1) $T\in\mathcal{L}(\mathcal{H},X)$;
(2) $T^*\in\mathcal{L}(X',\mathcal{H})$;
(3) $TT^*\in\mathcal{L}(X',X)$.

Dimostrazione. (1. ⟶ 2.) Sfruttando la caratterizzazione delle norme derivante dal teorema di Hahn - Banach possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}\|T^*x'\|_{\mathcal{H}} &= \sup_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ \|h\|=1}}(T^*x',h)_{\mathcal{H}}=\sup_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ \|h\|=1}}\langle x',Th\rangle_{X',X}\leq\sup_{\substack{h\in\mathcal{H}\\ \|h\|=1}}\|x'\|_{X'}\|Th\|_X\leq\\
&\leq\underbrace{\sup_{\|h\|=1}\|h\|_{\mathcal{H}}}_{=1}\|x'\|_{X'}\|T\|=\|x'\|_{X'}\|T\|.\end{aligned}$$

(2. ⟶ 1.) Si ha che

$$\|Th\|_X=\sup_{\substack{x'\in X'\\ \|x'\|=1}}\langle x',Th\rangle_{X',X}=\sup_{\substack{x'\in X'\\ \|x'\|=1}}(T^*x',h)_{\mathcal{H}}\leq\sup_{\|x'\|=1}\|h\|\|T^*\|\|x'\|_{X'}\leq\|T^*\|$$

(1. + 2. ⟶ 3.) è ovvia.
(3. ⟶ 2.) Risulta che

$$\begin{aligned}\|T^*x'\|^2_{\mathcal{H}} &= (T^*x', T^*x')_{\mathcal{H}} = \langle TT^*x', x'\rangle_{X',X} \le \|x'\|_{X'}\|TT^*\|\|x'\|_X \le \\ &\le \|x'\|_X\|TT^*\|\|x'\|_X = \|TT^*\|\|x'\|^2_X.\end{aligned}$$

□

Ora siamo pronti.

Dimostrazione. (*Stime di Strichartz - Prima parte*)
Bisogna adattare l'argomento del TT^* al nostro caso[8]. Avremo

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d) \qquad X = L^p_t L^q_x \qquad \begin{array}{rcl} T:\mathcal{H} & \longrightarrow & X \\ h & \longmapsto & e^{it\Delta}h \end{array}$$

con T operatore lineare e continuo. Sappiamo che $(L^p_t L^q_x)' = L^{p'}_t L^{q'}_x$ per via dell'identificazione che manda

$$L^{p'}_t L^{q'}_x \ni F \longmapsto (G,F)_{L^2_{t,x}}$$

dove $G \in L^{p'}_t L^{q'}_x$.
C'è il problema di capire che forma avrà $T^* : X' \longrightarrow \mathcal{H}$: dovremo calcolarcelo a mano. Sappiamo che

$$\langle Th, x'\rangle_{X,X'} = (h, T^*x')_{\mathcal{H}}$$

dove il primo è un prodotto di dualità mentre il secondo è il vero prodotto scalare dello spazio di Hilbert. Nel nostro caso avremo

$$\langle Th, G\rangle_{L^2_{t,x}} = (h, T^*G)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Si ha che

$$\begin{aligned}(Th,G)_{L^2_{t,x}} &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\Delta}h\cdot\overline{G}(t,x)\,dt\,dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{it\Delta}h\cdot\overline{G}(t,x)\,dx\right)dt = \\ &= (\text{per Plancherel } (f,f)_{L^2} = (\hat f,\hat f)_{L^2} \text{ e quindi passiamo } e^{it\Delta} \text{ a } G) = \\ &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} h\cdot e^{it\Delta}\overline{G}(t,x)\,dx\right)dt = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}^d} h\cdot\overline{e^{-it\Delta}G}(t,x)\,dx\right)dt = \\ &= (\text{Fubini}) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\left(\int_{\mathbb{R}}\overline{e^{-it\Delta}G(t,x)}\,dt\right)dx\end{aligned}$$

Quindi la situazione è la seguente:

$$\begin{array}{rcl} T: L^2_x & \longrightarrow & L^p_t L^q_x \\ h & \longmapsto & e^{it\Delta}h \end{array} \tag{66}$$

$$\begin{array}{rcl} T^*: L^{p'}_t L^{q'}_x & \longrightarrow & L^2_x \\ G(t,x) & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta}G(s)\,ds \end{array} \tag{67}$$

$$TT^*(G) = e^{it\Delta}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta}G(s)\,ds\right) = \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta}G(s)\,ds. \tag{68}$$

Alla luce di quanto visto, le stime di Strichartz assumono tre forme diverse, ma tutte equivalenti grazie al lemma sull'operatore TT^*. Vediamo tali forme.

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{-is\Delta}F(s)\,ds\right\|_{L^2} \le C\|F\|_{L^{p'}_t L^{q'}_x}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left\|e^{it\Delta}h\right\|_{L^p_t L^q_x} \le C\|h\|_{L^2_x}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta}F(s)\,ds\right\|_{L^p_t L^q_x} \le C\|F\|_{L^{p'}_t L^{q'}_x}$$

□

[8] Qui supporremo $d \ge 3$ e $p \ne 2$.

Blocchiamo un attimo la dimostrazione ora. E' arrivato il momento di capire la seconda assunzione del teorema ossia che, affinchè valgano le stime, necessariamente $p \geq 2$.

Proposizione 17.1. *Siano X e Y spazi di Banach e supponiamo di avere l'operatore $T : L^p(\mathbb{R}, X) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}, Y)$. Supponiamo l'operatore invariante per traslazioni ossia tale che $T(\tau_h f) = \tau_h(Tf)$ e che $T \in \mathscr{L}(L^p, L^q)$. Allora $q \geq p$.*

Dimostrazione. Sia $C = \|T\|_{\mathscr{L}(L^p,L^q)}$. Questa costante esiste per ipotesi ed è la migliore costante per cui

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Se vale per ogni f, varrà anche per le traslate $f+\tau_h f$ e quindi dovrà valere ancora $\|T(f+\tau_h f)\|_{L^q} \leq C\|f+\tau_h f\|_{L^p}$. Ma osserviamo che

$$\|f+\tau_h f\|_{L^p} \longrightarrow 2^{\frac{1}{p}}\|f\|_{L^p}$$

dato che, per $h \to +\infty$, i due supporti divengono sostanzialmente disgiunti. Invece

$$\|T(f+\tau_h f)\|_{L^q} = \|Tf+\tau_h(Tf)\|_{L^q} \longrightarrow 2^{\frac{1}{q}}\|Tf\|_{L^q}$$

e di conseguenza

$$\|Tf\|_{L^q} \leq C2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p}$$

ma allora $2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \geq 1$ perchè se fosse minore di 1 avremmo migliorato la costante C e questo è assurdo dato che per ipotesi è la migliore possibile. Quindi

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \geq 0 \iff q \geq p.$$

□

Dimostrazione. (*Stime di Strichartz - Seconda parte*) Se nella precedente proposizione poniamo $q := p'$ ritroviamo la condizione $p \geq 2$. Ora finalmente resta da vedere che

$$(D) \qquad \left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s)ds \right\|_{L^p_t L^q_x} \leq C\|F\|_{L^{p'}_t L^{q'}_x}.$$

Più precisamente, data la stima dispersiva

$$(S) \qquad \left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L^q_x} \leq \frac{C}{t^{\beta(q)}}\|\varphi\|_{L^{q'}_x} \qquad \beta(q) = \begin{cases} 0 & p = 2 \\ \frac{d}{2}\left(1 - \frac{2}{p}\right) & p > 2 \end{cases}$$

allora $(S) \longrightarrow (D)$. Inizialmente stimeremo puntualmente per t fissato:

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s)ds \right\|_{L^q_x} \leq \int_{\mathbb{R}} \left\| e^{i(t-s)\Delta} F(s) \right\|_{L^q_x} ds \leq (S) \leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{|t-s|^{\beta(q)}} \|F(s)\|_{L^{q'}_x} ds =$$
$$= C\left(\frac{1}{|t|^{\beta(q)}} * \|F(s)\|_{L^{q'}_x} \right).$$

Ora questa stima puntuale ci autorizza a scrivere

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} e^{i(t-s)\Delta} F(s)ds \right\|_{L^p_t L^q_x} \leq C \left\| \frac{1}{|t|^{\beta(q)}} * \|F(s)\|_{L^{q'}_x} \right\|_{L^p_t} \leq (H-L-S) \leq \|F(s)\|_{L^{p'}_t L^{q'}_x}$$

che vale se $0 \leq \beta(q) < 1$. Di conseguenza troviamo, ricordando che $d = 1$, che

$$1 + \frac{1}{p} = \beta(q) + \frac{1}{p'} \Longrightarrow \frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}$$

che è la condizione richiesta. Infine

$$0 \leq \beta(q) < 1 \iff 0 \leq \frac{2}{p} < 1 \iff p > 2.$$

□

Ora è arrivato il momento di pensare alle applicazioni riguardanti queste stime. L'obiettivo è arrivare a risultati di esistenza.

Osservazione 17.3. *Al solito, ci si riporterà alla ricerca di punti fissi e quindi dovremo necessariamente stimare l'operatore di Duhamel; questo non è un problema perchè nel momento in cui per il propagatore valgono*

$$\left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L_t^p L_x^q} \leq C\|\varphi\|_{L_x^2}$$

allora sapremo stimare TT^*, che viene calcolato su tutto $\mathbb{R}$, e di conseguenza anche lo stesso operatore in $[0,t]$ ossia proprio quello di Duhamel.

E' il caso di confermare quanto detto della precedente osservazione tramite il prossimo teorema.

Teorema 17.3 (**Christ - Kiselev**)**.** *Si supponga $q > p$ e valga la seguente stima:*

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} K(t,s)f(s)ds \right\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Allora la stima vale anche per l'operatore ritardato ossia

$$\left\| \int_0^t K(t,s)f(s)ds \right\|_{L^q} \leq C\|f\|_{L^p}.$$

Osservazione 17.4. *Si osservi che se il nucleo integrale fosse $K > 0$ allora il teorema risulterebbe banale. Il fatto non banale è che esso vale anche nel caso in cui si abbia K oscillante e proprio per questo ci è utile.*

Ma questo non è abbastanza. Vogliamo poter avere più libertà nella scelta degli indici per cui l'operatore di Duhamel è stimabile tramite le stime di Strichartz. Questo ce lo consentirà il prossimo teorema.

18. Giovedì 29.11.2012 - Stime per l'operatore di Duhamel e teoria d'esistenza per NLS in $d \geq 3$

Teorema 18.1. *Si ha che per ogni coppia (p,q) e (r,s) tali che*

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2} \qquad \frac{2}{r} + \frac{d}{s} = \frac{d}{2} \qquad p > 2 \qquad r > 2$$

vale la seguente stima:

ss_duhamel

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}F(s) \right\|_{L_t^p L_x^q} \leq C\|F\|_{L_t^{r'} L_x^{s'}}. \tag{69}$$

Prima di dare la dimostrazione, precisiamo qual'è l'idea che vi è dietro e che effettivamente ci consente di avere queste stime. Le stime di Strichartz sono vere anche per il fatto che l'operatore $T : L_x^2 \longrightarrow L_t^p L_x^q$ è lineare e continuo. Ma per il teorema del TT^* questo è equivalente a dire che lo è anche l'aggiunto formale $T^* : L_t^{p'} L_x^{q'} \longrightarrow L_x^2$. Ma, ancora, è lecito avere continuità e linearità per $T : L_x^2 \longrightarrow L_t^r L_x^s$. Ma, sepre per il teorema del TT^* quel che abbiamo detto è equivalente a dire che è lineare e continuo l'operatore

$$TT^* : L_t^{p'} L_x^{q'} \longrightarrow L_x^2 \longrightarrow L_x^r L_t^s$$

che però non è quello di Duhamel. Qui entra in gioco il risultato di Christ - Kiselev grazie al quale si avrà la tesi.

Dimostrazione. Caso 1: $(p,q) = (r,s)$.
Allora $(r',s') = (p',q')$ e questo significa che stiamo stimando un oggetto in uno spazio con un 'altro nel duale. Si procede esattamente come per le stime di Strichartz, facendo però attenzione al fatto che, prima di portare la norma sotto il segno di integrale, è necessario sopprimere il termine oscillante. Una volta fatto questo si procede tramite l'argomento del TT^* come fatto in precedenza.
Caso 2: $(p,q) = (+\infty, 2)$. Sostituendo nelle condizioni si trova

$$\frac{2}{\infty} + \frac{d}{2} = \frac{d}{2}$$

il che significa che (r,s) sono liberi di variare, o meglio, non abbiamo vincoli sulla loro scelta. A priori, non sappiamo se anche in questo caso stiamo stimando con oggetti del duale.
Quindi la questione è arrivare a mostrare che, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ fissato,

$$\sup_t \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s)ds \right\|_{L^2_x} \le \|F\|_{L^{s'}_t L^{r'}_x}.$$

A questo punto usiamo il fatto che $e^{i(t-s)\Delta}$ è un propagatore e possiamo scrivere

$$\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s)ds = e^{it\Delta} \int_0^t e^{-is\Delta} F(s)ds$$

e, poichè $e^{it\Delta}$ è un'isometria su L^2_x si ha

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s)ds \right\|_{L^2_x} = \left\| \int_0^t e^{-is\Delta} F(s)ds \right\|_{L^2_x} \le \|F\|_{L^{r'}(0,t)L^{s'}_x}$$

dove l'ultima disuguaglianza va ancora motivata. Ma in effetti è ovvia: se fosse stata per $t \in (0,+\infty)$ avremmo avuto la vecchia stima per il T^*, per il quale sappiamo risulta vera. Maa allora se vale per $(0,+\infty)$, a maggior ragione varrà per tempi finiti $(0,t)$. Quindi F è limitata nella striscia $[0,T]$ e passando a $t \to +\infty$ si trova

$$\|F\|_{L^{r'}(0,t)L^{s'}_x} \le \|F\|_{L^{r'}_t L^{s'}_x}.$$

Caso 3: (p,q) ed (r,s) tali che $p \ge r$. Se $p = r$ si ha il caso 1 mentre, se $p = +\infty$, si ritrova il caso 2. Quindi questo è il caso intermedio rispetto ai due3 estremi. Per essi avevamo trovato che

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s)ds \right\|_{L^r_t L^s_x} \le \|F\|_{L^{r'}_t L^{s'}_x}$$

$$\left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s)ds \right\|_{L^\infty_t L^2_x} \le \|F\|_{L^{r'}_t L^{s'}_x}$$

dove la quantità con cui stiamo stimando è la stessa per entrambe le stime; quindi non è necessario usare stime d'interpolazione particolari. Basta applicare Hölder ad

$$\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s)ds$$

così da avere

$$\|\cdot\|_{L^p_t L^q_x} \le \|\cdot\|^{\vartheta}_{L^\infty_t L^2_x} \|\cdot\|^{1-\vartheta}_{L^r_t L^s_x} \le C\|F\|_{L^{r'}_t L^{s'}_x}.$$

Caso 4: $(2 < p < r)$.Si tratta in questo caso di dimostrare che

$$\|DF\| = \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s)ds \right\|_{L^p_t L^q_x} \le C\|F\|_{L^{r'}_t L^{s'}_x}$$

ma non possiamo utilizzare alcuna stima di interpolazioneperchè siamo al di fuori degli estremi possibili. Proviamo un approccio meno diretto: dimostrare la validità di quest'ultima stima è equivalente a dimostrare che

d_star (70)
$$\|D^* F\|_{L^r_t L^s_x} \le C\|F\|_{L^{p'}_t L^{s'}_x}.$$

Se riusciremo ad avere una stima di questo genere avremo gli esponenti con la giusta monotonia. Proviamo a calcolarci D^*: sfrutteremo il fatto che, se abbiamo due spazi di Banach X, Y e un operatore lineare $T : X \longrightarrow Y$, allora esso è continuo se e solo se è continuo l'operatore $T^* : Y' \longrightarrow X'$. Adesso, formalmente, abbiamo

$$(DF, G)_{L^2_{t,x}} = (F; D^* G)_{L^2_{t,x}}$$

e sappiamo che

$$(DF, g)_{L^2_{t,x}} = \int_{\mathbb{R}_t} \left(\int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s)ds, G(t,x) \right)_{L^2_x} dt.$$

Poichè t è fissato possiamo portare il segno di integrale fuori del prodotto scalare ed avere

$$
\begin{aligned}
(DF,G)_{L^2_{t,x}} &= \int_{\mathbb{R}_t}\left[\int_0^t \left(e^{i(t-s)\Delta}F(s),G(t,x)\right)_{L^2_x} ds\right] dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}_t}\left[\int_0^t \left(F(s),e^{-i(t-s)\Delta}G(t,x)\right)_{L^2_x} ds\right] dt = \\
&= \int_{\mathbb{R}_t}\left[\int_0^t (F(s),H(t,x))_{L^2_x} ds\right] dt = \text{(Fubini)} = \\
&= \int_{\mathbb{R}_t} ds\left(\int_s^{+\infty} \left(F(s),e^{i(t-s)\Delta}G(t)\right)_{L^2} dt\right) = \\
&= \int_{\mathbb{R}_s} ds\left(F(s),\int_s^{+\infty} e^{-i(t-s)\Delta}G(t)dt\right)_{L^2_x}
\end{aligned}
$$

dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che, per s fissato, $e^{-i(t-s)\Delta}G(t)$ non dipende da t. Quindi

$$D^* = \int_s^{+\infty} e^{-i(t-s)\Delta}G(t)dt$$

adesso si dimostra ,come nei casi precedenti , la stima (70). □

Adesso iniziamo a vedere un utilizzo delle stime di Strichartz. Sia il problema

$$
\begin{cases} i\partial_t u - \Delta u \pm u|u|^\alpha = 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \end{cases} \qquad (t,x)\in\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^d_x \tag{71}
$$

per il quale, grazie ad essere, risulta possibile avere una teoria d'esistenza in dimensione d arbitraria, ma soprattutto con dato iniziale meno regolare quindi non più in H^1 ma il L^2.

Osservazione 18.1. *Si noti che se si ha esistenza locale con dato $\varphi\in L^2$, allora automaticamente l'esistenza vi è anche nel caso globale dato che $\|\varphi\|_{L^2}$ è costante lungo l'evoluzione. Inoltre, per lo stesso motivo, non è rilevante che ci si trovi nel caso focalizzante o in quello defocalizzante.*

Teorema 18.2. *Sia $0<\alpha<\frac{4}{d}$. Allora $\forall\ \varphi\in L^2_x\ \exists\, T(\|\varphi\|_{L^2_x})>0$, $\exists!\, u(t,x)$ tale che*

$$u(x,t)\in X_T := L^r\left([0,T],L^{\alpha+2}_x\right)\cap\mathscr{C}\left([0,T],L^2_x\right) \qquad se \qquad \frac{2}{r}+\frac{d}{\alpha+2}=\frac{d}{2}.$$

Osservazione 18.2. *Ricordiamo che già avevamo incontrato un teorema di esistenza per il quale si aveva più scelta per l'esponente ossia per $0<\alpha<\frac{4}{d-2}$, ma in quel caso il dato iniziale era supposto più regolare ossia $\varphi\in H^1$.*

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che $T_\varphi : B_{X_T}(0,R)\circlearrowleft$ ossia che esistono R e T tali che

$$
\begin{aligned}
\|T_\varphi u\|_{X_T} &\le \left\|e^{it\Delta}\varphi\right\|_{X_T} + \left\|\int_0^T e^{i(t-s)\Delta}u|u|^\alpha(s)ds\right\|_{X_T} \le \\
&\le C\|\varphi\|_{L^2_x} + \left\|u|u|^\alpha\right\|_{L^{r'}\left([0,T],L_x^{(\alpha+2)'}\right)} \le C\|\varphi\|_{L^2_x} + \|u\|^{\alpha+1}_{L_t^{(1+\alpha)r'}L_x^{(1+\alpha)(\alpha+2)'}}
\end{aligned}
$$

Adesso vedremo che $(\alpha+2)'(1+\alpha)=\alpha+2$. Si ha

$$\frac{1}{(\alpha+2)'} = 1-\frac{1}{\alpha+2} \implies (\alpha+2)'(\alpha+1) = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}(\alpha+1) = \alpha+2.$$

A questo punto dobbiamo verificare che $(\alpha+1)r'<r$: se vale questo allora

$$\|T_\varphi u\|_{X_T} \le C\|\varphi\|_{L^2_x} + CT^\vartheta\|u\|_{L^r[0,T]L^{\alpha+2}_x}. \tag{72}$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
(\alpha+1)r'<r \iff \frac{\alpha+1}{r}<\frac{1}{r'} \iff \frac{\alpha+1}{r}<1-1\frac{1}{r} \iff \alpha+1<r-1 \iff \\
\iff \alpha+2<r \iff \frac{1}{r}<\frac{1}{\alpha+2}
\end{aligned}
$$

ma valgono per ipotesi le stime di Strichartz con $p=r$ e $q=\alpha+2$ e di conseguenza si ha

$$\frac{1}{r}<\frac{1}{\alpha+2} \iff \frac{d(\alpha+2)-2d}{2(\alpha+2)}<\frac{2}{\alpha+2} \iff \frac{d\alpha}{2(\alpha+2)}<\frac{2}{\alpha+2} \iff \alpha<\frac{4}{d}.$$

Ora che sappiamo che la palla viene mandata in se stessa, cerchiamo di provare che

$$\|T_\varphi u - T_\varphi v\|_{X_T} \le C\|u-v\|_{X_T} \quad \forall\, u, v \in B_{X_T}(0,R) \qquad C<1$$

dove ricordiamo che

$$\|u\|_{X_T} := \|u\|_{L^\infty([0,T],L^2_x)} + \|u\|_{L^r([0,T],L^{\alpha+2}_x)}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\|T_\varphi u - T_\varphi v\|_{X_T} &\le \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta}\left(u|u|^\alpha(s) - v|v|^\alpha(s)\right) ds \right\|_{X_T} \le \text{(Strichartz)} \le \\ &\le C\left\| u|u|^\alpha - v|v|^\alpha \right\|_{L^{r'}([0,T],L^{(\alpha+2)'}_x)}\end{aligned}$$

A questo punto stimiamo in x e successivamente in t; nella prima delle prossime disuguaglianze useremo il fatto, che già abbiamo usato in precedenza, che

$$|z|z|^\alpha - w|w|^\alpha| \le C|z-w|(|z|^\alpha + |w|^\alpha).$$

$$\begin{aligned}\|u|u|^\alpha - v|v|^\alpha\|_{L^{(\alpha+2)'}_x} &\le \||u-v|\left(|u|^\alpha + |v|^\alpha\right)\|_{L^{(\alpha+2)'}_x} \le \text{(Hölder)} \le \\ &\le C\|u-v\|_{L^{\alpha+2}_x}(\||u|^\alpha\|_{L^q_x} + \||v|^\alpha\|_{L^q_x}) \le \\ &\le C\|u-v\|_{L^{\alpha+2}_x}\left(\|u\|^\alpha_{L^{\alpha+2}_x} + \|v\|^\alpha_{L^{\alpha+2}_x}\right)\end{aligned}$$

con l'ultima stima nella quale si è usato il fatto che

$$\frac{1}{(\alpha+2)'} = 1 - \frac{1}{\alpha+2} = \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{q} \iff \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{\alpha+2}.$$

Ora stimiamo in tempo, useremo Hölder nella seconda delle seguenti maggiorazioni.

$$\begin{aligned}\|u|u|^\alpha - v|v|^\alpha\|_{L^{r'}([0,T],L^{(\alpha+2)'}_x)} &\le C\left\| \|u-v\|_{L^{\alpha+2}_x}\left(\|u\|^\alpha_{L^{\alpha+2}_x} + \|v\|^\alpha_{L^{\alpha+2}_x}\right)\right\|_{L^{r'}[0,T]} \le \\ &\le C\left\| \|u-v\|_{L^{\alpha+2}_x}\right\|_{L^r[0,T]} \left\||u|^\alpha + |v|^\alpha\right\|_{L^q([0,T],L^{\alpha+2}_x)} \le \\ &\le \|u\|^\alpha_{L^{\alpha q}_T L^{\alpha+2}_x} + \|v\|^\alpha_{L^{\alpha q}_T L^{\alpha+2}_x}\end{aligned}$$

dove bisogna prestare attenzione all'ultima disuguaglianza: essa è valida perchè dobbiamo avere, nella seconda riga, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{2}{r}$ ma poichè valgono le stime di Strichartz si ha

$$\frac{1}{q} = 1 + \frac{d}{\alpha+2} - \frac{d}{2} = \frac{2\alpha+4-2d-\alpha d+2d}{2(\alpha+2)} \iff q = \frac{2(\alpha+2)}{2\alpha+4-\alpha d}.$$

Adesso vogliamo avere lo stesso tipo di quantità ad entrambi i lati della nostra disuguaglianza, nella quale vogliamo far comparire una potenza di T; quindi si deve avere $\alpha q < r$. Sfruttando Hölder abbiamo un'ulteriore condizione: mettendole insieme si ricava

$$\begin{cases} \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r'} \Longrightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{2}{r} \\ \alpha q < r \end{cases} \Longrightarrow \alpha q < r \iff \frac{\alpha}{r} < \frac{1}{q} \iff \frac{\alpha}{r} < 1 - \frac{2}{r} \iff$$

$$\iff \frac{\alpha+2}{r} < 1 \iff \frac{1}{r} < \frac{1}{\alpha+2} \iff \frac{2}{r} < \frac{2}{\alpha+2} \overset{\text{(S.S.)}}{\iff} \frac{d}{2} - \frac{d}{\alpha+2} < \frac{2}{\alpha+2} \iff$$

$$\iff \frac{\alpha d + 2d - 2d}{2(\alpha+2)} < \frac{2}{\alpha+2} \iff \frac{\alpha d}{4} < 1 \iff \alpha < \frac{4}{d}$$

Questo dimostra che con questa numerologia vale il teorema delle contrazioni e quindi esiste la u candidata soluzione che soddisfa i requisiti richiesti. □

19. Lunedì 3.12.2012 - NLS: esistenza ed unicità, per dati piccoli, globale in spazio-tempo

Supponiamo di avere l'esponente critico $\alpha = \frac{4}{d}$; di conseguenza viene meno la validità dell'ultimo teorema presentato. Ma abbiamo ancora qualche possibilità di avere buona positura del problema di Cauchy a patto di prendere dati iniziali, seppure meno regolari di H^1, ma sufficientemente piccoli.

Teorema 19.1. *Sia $\alpha = \frac{4}{d}$ e supponiamo esista un $\varepsilon_0 > 0$ tale che $\forall\, \varphi \in L^2_x$ si abbia $\|\varphi\|_{L^2_x} < \varepsilon_0$. Allora esiste unica e globale $u(t,x) \in L^{\alpha+2}_{t,x}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_x)$.*

Osservazione 19.1. *Rimarchiamo il fatto che fare un'ipotesi di piccolezza sul dato iniziale garantisce, tramite il teorema, una sommabilità globale in spazio e in tempo. Questo è più di ciò che avremmo potuto dire altrimenti ossia che, al più,* $u \in L^{\alpha+2}_{loc}$.

Dimostrazione. Sia $X_T = L_t^{2+\frac{4}{d}} L_x^{2+\frac{4}{d}}$ e notiamo subito che i due esponenti formano una coppia di Strichartz dato che

$$\frac{2}{2+\frac{4}{d}} + \frac{d}{2+\frac{4}{d}} = \frac{d}{2}.$$

Mostriamo ora che $T_\varphi : B_{X_T}(0,R) \circlearrowleft$ se $\|\varphi\|_{L^2_x} < \varepsilon_0$. Si ha ora

$$\begin{aligned} \|T_\varphi u\| \leq C\|\varphi\|_{L^2_x} + \|u|u|^{\frac{4}{d}}\|_{L_{t,x}^{(2+\frac{4}{d})'}} &\leq \|\varphi\|_{L^2} + \|u\|^{1+\frac{4}{d}}_{L_{t,x}^{(1+\frac{4}{d})(1+\frac{4}{d})'}} \leq \\ &\leq C\|\varphi\|_{L^2} + \|u\|^{1+\frac{4}{d}}_{L_{t,x}^{2+\frac{4}{d}}} \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è motivata dal fatto che

$$(1+\alpha)(1+\alpha)' = 2 + \frac{4}{d}.$$

A questo punto entra in gioco l'ipotesi che $\|\varphi\|_{L^2_x}$ sia piccola; siamo arrivati ad avere una disuguaglianza del tipo $C\|\varphi\|_{L^2_x} + R^{1+\alpha} \leq R$. Tale R esiste e per convincercene dobbiamo considerare i sottolivelli $\{R^{1+\alpha} - R + C = 0\}$ dove C dipenderà da ε_0. □

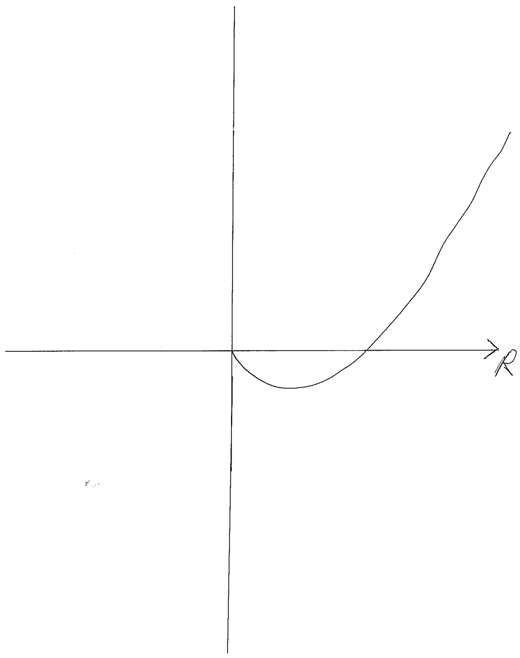

FIGURA 6

6

20. Giovedì 6.12.2012 - Scattering in L^2 per NLS: dati piccoli L^2 e caso L^2-critico

Cominciamo con dei risultati riguardanti lo scattering per dati iniziali $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ per

$$\begin{cases} i\partial_t u - \Delta u \pm u|u|^{\frac{4}{d}} = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases} . \tag{73}$$

Cominciamo con un risultato per dati piccoli, ma prima è il caso di osservare che l'esponente $\frac{4}{d}$ è proprio quello per il quale sappiamo esserci globale sommabilità in spazio e in tempo. Inoltre esso è motivato dai riscalamenti cui dovremo sottoporre il termine nonlineare, come breve vedremo, nella dimostrazione.

Teorema 20.1. *Sia $d \geq 3$. Se il dato iniziale è piccolo in norma L^2_x allora vi è scattering ossia*

scatt_picc
$$\boxed{\exists\, \varepsilon_0 > 0 : \|\varphi\|_{L^2_x} < \varepsilon_0 \Longrightarrow \exists\, \varphi_\pm \in L^2_x : \left\| u(t,x) - e^{it\Delta}\varphi_\pm \right\|_{L^2_x} \longrightarrow 0.} \tag{74}$$

Dimostrazione. Sfrutteremo il fatto (che non dimostriamo) che si ha scattering per $u(t,x)$ se e solo se la famiglia $e^{it\Delta}u(t)$ è di Cauchy in L^2_x. Adesso agiamo su $u(t)$ con $e^{-it\Delta}$ così da avere

$$e^{-it\Delta}u(t) = \varphi(x) + \int_0^t e^{-is\Delta} u|u|^{\frac{4}{d}}(s)\,ds$$

dove , poichè il tempo è fissato, abbiamo agito direattamente sulla funzione integranda passando sotto il segno di integrale. Qui entra in gioco il dimostrare che $e^{-it\Delta}u(t)$ è di Cauchy ossia che $\forall\, t_1, t_2 > \bar{t}(\varepsilon)$ si ha che

$$\left\| e^{-it_1\Delta}u(t_1) - e^{-it_2\Delta}u(t_2) \right\|_{L^2_x} < \varepsilon.$$

Supponiamo, nei calcoli, $t_1 > t_2$. Avremo

$$\left\| e^{-it_1\Delta}u(t_1) - e^{-it_2\Delta}u(t_2) \right\|_{L^2_x} = \left\| \int_{t_1}^{t_2} e^{-is\Delta} u|u|^{\frac{4}{d}}(s)\,ds \right\|_{L^2_x} \lesssim \left\| u|u|^{\frac{4}{d}} \right\|_{L^{p'}_{(t_1,t_2)} L^{q'}_x}$$

dove abbiamo stimato l'ultima quantità grazie alle stime di Strichartz: questo è possibile perchè possiamo pensare che $T : f \longmapsto e^{it\Delta} f \chi_{(t_1,t_2)}$ ossia l'operatore T ristretto ad una striscia di tempi e quindi ancora valido. Ma (p,q) deve essere una coppia di Strichartza affinchè $\|u(t,x)\|_{L^{2+\frac{4}{d}}_{t,x}}$ sia una quantità finita. Quindi dovremo avere $p = q = 2 + \frac{4}{d}$. A questo punto concludiamo con

$$\left\| u|u|^{\frac{4}{d}} \right\|_{L^{p'}((t_1,t_2)\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \|u\|^{1+\frac{4}{d}}_{L^{p'(1+\frac{4}{d})}((t_1,t_2)\times\mathbb{R}^d)}.$$

Un rapido calcolo mostra che $p'(1+\frac{4}{d}) = \frac{4}{d} + 2$. □

Adesso poniamo un ulteriore risultato nel quale verrà meno l'ipotesi di piccolezza del dato iniziale al fine di avere scattering. Riusciremo comunque ad averlo, ma per tempi finiti.

Teorema 20.2. *Sia $\alpha = \frac{4}{d}$. Allora $\forall\, \varphi \in L^2\ \exists\, T(\varphi) > 0 : \exists! u(t,x) \in X_T$ dove*

$$X_T := \mathscr{C}\left([0,T], L^2_x\right) \cap L^{2+\frac{4}{d}}\left([0,T]\times\mathbb{R}^d\right)$$

Dimostrazione. Al solito vogliamo arrivare ad una contrazione, quindi cerchiamo un R per cui la palla $B_R(X_T)$ viene mappata in sè dall'applicazione T_φ. Si ha

$$\begin{aligned} \|T_\varphi u\|_{X_T} &\lesssim \left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{X_T} + \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u|u|^\alpha(s)\,ds \right\|_{X_T} \lesssim \\ &\lesssim \left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{X_T} + \|u|u|^\alpha\|_{L^{(2+\frac{4}{d})'}([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \lesssim \left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{X_T} + \|u|u|^\alpha\|^{2+\frac{4}{d}}_{L^{2+\frac{4}{d}}_{t,x}} \lesssim \\ &\lesssim \left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{X_T} + R^{2+\frac{4}{d}} < R \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza stretta è quella con cui vorremmo concludere. A questo punto dobbiamo sfruttare il fatto che, per tempi piccoli, il dato iniziale si mantenga piccolo ossia che

$$\left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L^{2+\frac{4}{d}}([0,T]\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{T\to 0} 0.$$

Questo ci premetterà di avere $\varepsilon + R^{2+\frac{4}{d}} < R$. A questo punto si ripetono i procedimenti già visti in precedenza in altre dimostrazioni. □

Adesso passiamo a dei risultati riguardanti lo scattering per dati iniziali $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Avremo maggiore scelta degli esponenti nelle stime grazie alle immersioni di Sobolev. Prima di dare il prossimo risultato soffermiamoci sulle ipotesi che vedremo e sulle stime che useremo per dimostrarlo. Tra le ipotesi troveremo $(p,q) = (r, \alpha+2)$ e questi esponenti formano una coppia di Strichartz, inoltre, $\alpha = \frac{4}{d-2}$ è l'esponente critico per dati H^1 così come $\alpha = \frac{4}{d}$ lo è per dati L^2. Useremo le stime di Strichartz adattate per il gradiente ossia

SS_grad

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left\| e^{it\Delta}\varphi \right\|_{L^r_t W^{1,q}_x} \lesssim \|\varphi\|_{H^1_x} & \\ \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(s)\,ds \right\|_{L^r_t W^{1,q}_x} \lesssim \|F\|_{L^{r'}_t W^{1,q'}_x} & \dfrac{2}{p} + \dfrac{d}{q} = \dfrac{d}{2} \end{array}} \tag{75}$$

le quali valgono perchè

- sappiamo già che vale la stima di Strichartz in L^2;
- anche per il gradiente si ha
$$\|\nabla u(t,x)\|_{L^p_t L^q_x} \lesssim \|\nabla\varphi\|_{L^2_x}$$
che risulta vera perchè il gradiente commuta nella (NLS) ed esso stesso è ancora una soluzione con dato iniziale $\nabla\varphi$.

Teorema 20.3. *Sia* $0 < \alpha < \frac{4}{d-2}$ *con* $d \geq 3$. *Allora* $\forall\ \varphi \in H^1_x\ \exists\, T(\|\varphi\|_{H^1_x}) > 0$, $\exists! u(t,x) \in X_T$ *dove*
$$X_T := \mathscr{C}([0,T], H^1_x) \cap L^r([0,T], W^{1,\alpha+2}_x).$$

Dimostrazione. Al solito vogliamo provare l'esistenza di un $R > 0$ tale che $B_R(X_T) \circlearrowleft$. Si ha
$$\begin{aligned} \|T_\varphi u\|_{X_T} &\lesssim \|\varphi\|_{H^1_x} + \left\| \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} u|u|^\alpha(s)\,ds \right\|_{X_T} \lesssim \\ &\lesssim \|\varphi\|_{H^1_x} + \|u|u|^\alpha\|_{L^{p'}\left([0,T], W^{1,(\alpha+2)'}_x\right)} \end{aligned}$$

L'obiettivo è mettere in evidenza una potenza di T: vediamo come. Partiamo con la stima in x:
$$\begin{aligned} \|u|u|^\alpha\|_{W^{1,(\alpha+2)'}_x} &\simeq \|\nabla u|u|^\alpha\|_{L^{(\alpha+2)'}_x} \lesssim (\text{Hölder}) \lesssim \|\nabla u\|_{L^{\alpha+2}_x} \|u^\alpha\|_{L_x^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}} \lesssim \\ &\lesssim \|u\|_{W^{1,\alpha+2}_x} \|u\|^\alpha_{L^{\alpha+2}_x} \lesssim \|u\|^{\alpha+1}_{W^{1,\alpha+2}_x}. \end{aligned}$$

Adesso procediamo con quella in t:
$$\begin{aligned} \left\| \|u|u|^\alpha\|_{W^{1,(\alpha+2)'}_x} \right\|_{L^{p'}_t[0,T]} &\lesssim \left\| \|u\|^{\alpha+1}_{W^{1,\alpha+2}_x} \right\|_{L^{p'}[0,T]} \lesssim \left\| \|u\|_{W^{1,\alpha+2}_x} \right\|^{\alpha+1}_{L^{p'(\alpha+1)}[0,T]} \lesssim \\ &\lesssim T^\vartheta \|u\|^{\alpha+1}_{L^p\left([0,T], W^{1,\alpha+2}_x\right)}. \end{aligned}$$

Questa ultima maggiorazione, alla quale effettivamente volevamo arrivare, è vera se $(\alpha+1)p' < p$ ossia per
$$\begin{aligned} \frac{\alpha+1}{p} < 1 - \frac{1}{p} \iff \frac{\alpha+2}{p} < 1 \iff \frac{1}{p} < \frac{1}{\alpha+2} \iff \left(\frac{2}{p} + \frac{d}{\alpha+2} = \frac{d}{2}\right) \iff \\ \iff \frac{2}{p} < \frac{2}{\alpha+2} \iff \frac{d}{2} < \frac{d+2}{\alpha+2} \iff \alpha < \frac{2(d+2)}{d} - 2 \iff \alpha < \frac{4}{d}. \end{aligned}$$
□

21. Lunedì 6.12.2012 - Esistenza e unicità per NLS H^1-sottocritica, Scattering H^1 e decadimento dell'energia potenziale per NLS L^2 supercritica

Adesso presentiamo un teorema di esistenza e unicità locale per (NLS) con dati iniziali $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 21.1. *Sia* $0 < \alpha < \frac{4}{d-2}$. *Allora* $\exists\, T(\|\varphi\|_{H^1}) > 0$, $\exists! u(t,x) \in X_T$ *dove*
$$X_T := \mathscr{C}([0,T], H^1_x) \cap L^p_t([0,T], W^{1,q}_x) \qquad (p^{(\alpha)}, q^{(\alpha)}) = \left(\frac{4(\alpha+2)}{(d-2)\alpha}, \frac{d(\alpha+2)}{d+\alpha}\right). \tag{76}$$

Dimostrazione. Sempre tendo a mente che vogliamo arrivare ad una contrazione, si ha

$$\|T_\varphi u\|_{X_T} \lesssim \|\varphi\|_{H^1_x} + \|u|u|^\alpha\|_{L^{p'}([0,T],W^{1,q'}_x)}$$

e a questo punto stimiamo in x.

$$\|u|u|^\alpha\|_{W^{1,q'}_x} \simeq \|\nabla u|u|^\alpha\|_{L^{q'}_x} \lesssim \|\nabla u\|_{L^q_x}\|u^\alpha\|_{L_x^{\frac{q}{q-2}}} \lesssim \|\nabla u\|_{L^q_x}\|u\|^\alpha_{L^{\frac{q\alpha}{q-2}}} \lesssim$$
$$\lesssim \|u\|^{1+\alpha}_{W^{1,q}_x}$$

Analizziamo la precedente catena di maggiorazioni: nella prima stima abbiamo utilizzato Hölder e abbiamo trovato

$$1-\frac{1}{q} = \frac{1}{q}+\frac{1}{r} \Longrightarrow r = \frac{q}{q-2}.$$

Invece nell'ultima stima fatta abbiamo sfruttato l'immersione di Sobolev $\|u\|_{L^{p^*}} \le C\|\nabla u\|_{L^q}$ con $q^* = \frac{dq}{d-q}$. Ma per valere tale risultato si deve provare che

index (77)
$$\frac{dq}{d-q} = \frac{\alpha q}{q-2}.$$

Prima di provalro, osserviamo che la stima avrebbe ancora senso se $q < q^* < \frac{\alpha q}{q-2}$, ma andrebbe fatta con u anzichè ∇u. Ora abbiamo

$$\frac{d}{d-q} = \frac{\alpha}{q-2} \iff d(q-2) = \alpha(d-q) \iff d(\alpha+2) = q(\alpha+d) \iff$$
$$\iff \left(q = \frac{d(\alpha+2)}{d+\alpha}\right) \iff d(\alpha+2) = \frac{d(\alpha+2)}{d+\alpha}(d+\alpha)$$

e quindi la (77) risulta essere un'identità e abbiamo proprio $q = q^*$.
Adesso stimiamo in tempo:

$$\|u|u|^\alpha\|_{L^{p'}\left([0,T],W^{1,q'}_x\right)} \lesssim \|u\|^{(1+\alpha)p'}_{L^{(1+\alpha)p'}\left([0,T],W^{1,q'}_x\right)} \lesssim T^\vartheta\|u\|^{1+\alpha}_{L^p\left([0,T],W^{1,q}_x\right)}$$

dove l'ultima stima è dovuta al fatto che

$$(1+\alpha)p' < p \iff \frac{2+\alpha}{p} < 1 \iff p > \alpha+2 \iff \left(p = \frac{4(\alpha+2)}{(d-2)\alpha}\right) \iff \alpha < \frac{4}{d-2}$$

com'era nelle nostre ipotesi. A questo punto possiamo applicare il teorema delle contrazioni e questo conclude. □

scat_h1 **Teorema 21.2.** *Siano $d \ge 3$, $\frac{4}{d} < \alpha < \frac{4}{d-2}$ ed $u(t,x)$ soluzione di $(NLS)_{def}$. Allora $\forall \varphi \in H^1_x \ \exists \varphi_\pm \in H^1_x \Longrightarrow \|e^{it\Delta}\varphi_\pm - u(t,x)\|_{H^1_x} \overset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Prima di dimostrare questo teorema vediamo qual'è il legame tra la presenza di scattering H^1 e quello che scopriremo essere il decadimento dell'energia potenziale.

Teorema 21.3. *Vale il teorema (21.2) se e solo se $\|u(t,x)\|_{L^q_x} \overset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ per $2 < q < 2^*$.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Sappiamo che $\|u(t,x) - e^{it\Delta}\varphi_\pm\|_{H^1_x} \overset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$. Si ha, per la disuguaglianza triangolare che

$$\|u\|_{L^q_x} \le \left\|u - e^{it\Delta}\varphi_\pm\right\|_{L^q_x} + \left\|e^{it\Delta}\varphi_\pm\right\|_{L^q_x}.$$

Il primo termine a destra va a 0 grazie alle immersioni di Sobolev, mentre i problemi sorgono sul secondo. Anche quest'ultimo dobbiamo mostrare che va a 0; proviamo con la stima dispersiva. Si ha

$$\left\|e^{it\Delta}\varphi_\pm\right\|_{L^q_x} \le \frac{C}{t^{\frac{d}{2}\left(1-\frac{2}{q}\right)}}\|\varphi_\pm\|_{L^{q'}_x}$$

ma l'esponente q' ci porta fuori da H^1 e questo non ci permette più di controllare le quantità di nostro interesse: dovremo usare un accorgimento. Possiamo pensare $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_0$ che è denso in H^1 e questo permette di passare senza problemi al limite nella disuguaglianza dispersiva per $t \to \pm\infty$ e trovare che anche $\|e^{it\Delta}\varphi_\pm\|_{L^q_x} \longrightarrow 0$. A questo punto, il fatto che $\|e^{it\Delta}\varphi_\pm\|_{H^1} = \|\varphi\|_{H^1}$ implica che $\|u\|_{L^q_x} \longrightarrow 0$. Questo è dovuto ad un risultato di analisi funzionale: astraendo dal nostro specifico problema, supponiamo di avere un operatore lineare $T(t): H \longrightarrow H$, dove H è uno spazio di Hilbert, e tale che

$$\begin{cases} \| T(t)\varphi \|_H = \|\varphi\|_H \\ \| T(t)\varphi \|_D \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall\, \varphi \in D \\ \overline{D} = H \end{cases} \implies \| T(t)\varphi \|_H \overset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \forall\, x \in H.$$

□

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$) Per ipotesi si ha che $\|u(t,x)\|_{L^q_x} \longrightarrow 0$ per un certo $2 < q < 2^*$ e partendo da qui, tramite le stime di Strichartz, vogliamo arrivare ad affermare che

$$\|u(t,x)\|_{L^p(\mathbb{R},W^{1,\alpha+2})} < +\infty.$$

Il fatto di avere il limite per $t \to +\infty$ ci porta a non considerare solo tempi nella striscia, ma su tutto $\mathbb{R}$, mentre, poichè il risultato che vogliamo dimostrare è in H^1, ci serve lo spazio $W^{1,\alpha+2}$ per studiare il comportamento di ∇u. Si noti che voler dimostrare che $\|u\|_{L^p_{loc}(\mathbb{R}),W^{1,\alpha+2}_x} < +\infty$ equivale a dimostrare la teoria di Cauchy che abbiamo già visto.
Tornando alla nostra ipotesi, essa vale anche per qualsiasi $q < q_i < 2^*$ per Sobolev.
Il fatto che $\|u\|_{L^q_x} \longrightarrow 0$ può essere equivalentemente formulato come segue: $\forall\, q : 2 < q < 2^*\ \exists\, t_n \longrightarrow +\infty$ tale che

$$\sup_{[t_n,+\infty)} \|u\|_{L^q_x} < \frac{1}{n};$$

inoltre possiamo sempre supporre che

$$\begin{cases} i\,\partial_t u - \Delta u + u|u|^\alpha = 0 \\ u(0,x) = u(t_n,x) \end{cases}$$

dato che non è obbligatorio pensare l'inizio dell'evoluzione al tempo $t = 0$. A questo punto usiamo le stime di Strichartz:

$$\|u(t,x)\|_{L_p W^{1,\alpha+2}_x} \lesssim \|u(t_n)\|_{H^1_x} + \|u|u|^\alpha\|_{L^{p'}_t W^{1,(\alpha+2)'}_x}.$$

Adesso stimiamo in x:

$$\|u|u|^\alpha\|_{W^{1,(\alpha+2)'}_x} \simeq \|\nabla u|u|^\alpha\|_{L^{(\alpha+2)'}} \lesssim \|\nabla u\|_{L^{\alpha+2}} \|u^\alpha\|_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}} \lesssim \|\nabla u\|_{L^{\alpha+2}} \|u\|^\alpha_{L^{\alpha+2}} \lesssim$$
$$\lesssim \|\nabla u\|_{L^{\alpha+2}} \|u\|^{\vartheta\alpha}_{L^{q_1}} \|u\|^{(1-\vartheta)\alpha}_{L^{q_2}}$$

dove nell'ultima maggiorazione abbiamo utilizzato la stima d'interpolazione classica con

$$\frac{\vartheta}{q_1} + \frac{1-\vartheta}{q_2} = \frac{1}{\alpha+2}.$$

Stimando in tempo ora troviamo

$$\left\| \|\nabla u\|_{L^{\alpha+2}} \|u\|^{\vartheta\alpha}_{L^{q_1}} \|u\|^{(1-\vartheta)\alpha}_{L^{q_2}} \right\|_{L^{p'}_t} \lesssim \left\| \|u\|^{(1-\vartheta)\alpha}_{L^{q_2}} \right\|_{L^\infty_t} \left\| \|\nabla u\|^{1-\alpha\vartheta}_{L^{\alpha+2}} \right\|_{L^{p'}_t} \lesssim$$
$$\lesssim \frac{1}{n} \left\| \|\nabla u\|_{L^{\alpha+2}} \right\|^{1+\alpha\vartheta}_{L^p_t}$$

dove l'ultima stima è possibile se si impone $(1+\alpha\vartheta)p' = p$. Vediamo cosa comporta questo. Si ha

$$(1+\alpha\vartheta)p' = p \iff \frac{1+\alpha\vartheta}{p} = 1 - \frac{1}{p} \iff \frac{2+\alpha\vartheta}{p} = 1 \iff \alpha\vartheta = p-2 \iff$$
$$\iff \vartheta = \frac{p-2}{\alpha} \in (0,1) \iff p < \alpha+2 \iff \frac{2}{p} > \frac{2}{\alpha+2} \iff$$
$$\iff \text{(Strichartz)} \iff \frac{d}{2} - \frac{d}{\alpha+2} > \frac{2}{\alpha+2} \iff \frac{d}{2} > \frac{d+2}{\alpha+2} \iff$$
$$\iff \alpha > \frac{4}{d}.$$

A questo punto, posto $X = L^p_t W^{1,\alpha+2}_x$ abbiamo capito che

$$\|u(t,x)\|_X \lesssim C + \varepsilon_n \|u(t,x)\|^{1+\vartheta\alpha}_X$$

e quest'ultima stima ci porta a considerare che le quantità di nostro interesse sono nei sottolivelli di $\{R + C - \varepsilon_n R^{1+\vartheta\alpha} < 0\}$.[9] A questo punto ricordiamo che per ipotesi $\|u\|_{L^q_x} \longrightarrow 0$ e quindi ε_n può essere arbitrariamente piccolo; questo insieme al fatto che C è una costante che può crescere arbitrariamente, conduce alla presenza, nei sottolivelli, di due componenti connesse. Se il dato iniziale è nella componente connessa I, allora, per ragioni di continuità, sarà vincolato a rimanere in essa.
Quindi ci siamo ricondotti ad avere le ipotesi per cui valgono dei risultati già visti sullo scattering per dati H^1 e questo porta alla tesi. □

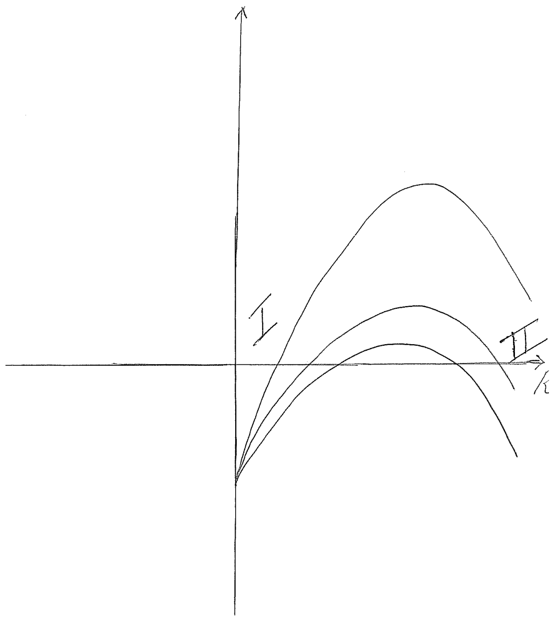

FIGURA 7 $\boxed{7}$

22. Giovedì 13.12.2012 - Sul decadimento dell'energia potenziale

Adesso un'ultima proposizione.

Proposizione 22.1. *Sia $u(t,x)$ soluzione di*

$$\begin{cases} i\partial_t u - \Delta u + u|u|^\alpha = 0 \\ u(0,x) = \varphi(x) \in H^1(\mathbb{R}^d) \end{cases}.$$

Allora per $2 < q < 2^*$ *si ha* $\|u\|_{L^q_x} \longrightarrow 0$.

Per la dimostrazione saranno necessari diversi strumenti; cominciamo dalle stime di Morawetz.

[9] Si osservi che un $\varepsilon_n \ll 0$ rende evidente il perdominare del termine lineare.

Proposizione 22.2 (**Morawetz classiche**)**.** *Sia* $\varphi(x)$ *fissata. Allora*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)|u(t,x)|^2dx = -2\,\mathrm{Im}\int \bar{u}\nabla u\nabla\varphi\,dx$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)|u(t,x)|^2dx = 4\,\mathrm{Re}\int (H^2\varphi\nabla u,\nabla\varphi)dx - \int \Delta^2\varphi|u|^2dx + \frac{2\alpha}{2+\alpha}\int\Delta\varphi|u|^{\alpha+2}dx$$

Dimostrazione. Osserviamo, prima di addentrarci nei calcoli, che queste uguaglianze sono da intendersi vere puntualmente in t. Detto questo si ricordi che

$$u_t = -i\Delta u + iu|u|^\alpha.$$

Ora si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)|u(t,x)|^2dx &= \int\varphi u_t\bar{u}dx + \int\varphi u\bar{u}_t dx = \\
&= \int\varphi[-i\Delta u + iu|u|^\alpha]\bar{u}dx + \int\varphi[i\Delta\bar{u} - i\bar{u}|u|^\alpha]udx = i\left[\int(-\varphi\Delta u\bar{u} + \varphi u\Delta\bar{u})dx\right] = \\
&= \text{(per parti)} = i\left[\int\varphi|\nabla u|^2dx + \int\nabla\varphi\nabla u\bar{u}dx - \int\varphi|\nabla u|^2dx - \int\nabla\varphi u\nabla\bar{u}dx\right] = \\
&= -2\,\mathrm{Im}\int\nabla\varphi\nabla u\bar{u}dx
\end{aligned}$$

Per quando riguarda la seconda uguaglianza abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)|u(t,x)|^2dx &= -2\,\mathrm{Im}\left[\int\bar{u}_t\nabla u\nabla\varphi\,dx + \int\bar{u}\nabla u_t\nabla\varphi\,dx\right] = \\
&= -2\,\mathrm{Im}\left[\int(i\Delta\bar{u} - i\bar{u}|u|^\alpha)\nabla u\nabla\varphi\,dx + \int u\nabla(-i\Delta u + iu|u|^\alpha)\nabla\varphi\,dx\right] = \\
&= -2\,\mathrm{Re}\left[\int\underbrace{\Delta\bar{u}\nabla u\nabla\varphi - \bar{u}\nabla\Delta u\nabla\varphi}_{I}\underbrace{-\bar{u}|u|^\alpha\nabla u\nabla\varphi + \bar{u}\nabla(u|u|^\alpha)\nabla\varphi}_{II}dx\right]
\end{aligned}$$

Adesso sviluppiamo il secondo pezzo sfruttando il fatto che

$$\nabla(|u|^2)|u|^\alpha = \frac{2}{\alpha+2}\nabla(|u|^{\alpha+2}).$$

$$\begin{aligned}
II &= \frac{2}{\alpha+2}\int\nabla(|u|^{\alpha+2})\nabla\varphi\,dx + \int\nabla(|u|^2)|u|^\alpha\nabla u\nabla\varphi\,dx + 2\int\Delta\varphi|u|^{\alpha+2}dx = \\
&= \text{(per parti)} = -\frac{4}{\alpha+2}\int\Delta\varphi(|u|^{\alpha+2})dx + 2\int\Delta\varphi(|u|^{\alpha+2})dx = \\
&= \left(2 - \frac{4}{\alpha+2}\right)\int\Delta\varphi(|u|^{\alpha+2})dx
\end{aligned}$$

Adesso, invece, sviluppiamo il primo pezzo.

$$\begin{aligned}
I &= -2\,\mathrm{Re}\int\Delta\bar{u}\nabla u\nabla\varphi\,dx + 2\,\mathrm{Re}\int\bar{u}\nabla\Delta u\nabla\varphi\,dx = \\
&= -2\,\mathrm{Re}\int\partial_j^2\bar{u}\partial_k u\partial_k\varphi\,dx + 2\,\mathrm{Re}\int\bar{u}\partial_k\partial_j^2u\partial_k\varphi\,dx = \text{(per parti, cambio segno)} = \\
&= 2\,\mathrm{Re}\int\partial_j\bar{u}\partial_j\partial_k u\partial_k\varphi\,dx + 2\,\mathrm{Re}\int\partial_j\bar{u}\partial_k u\partial_j\partial_k\varphi\,dx - \\
&- 2\,\mathrm{Re}\int\bar{u}\partial_k\partial_j u\partial_k\partial_j\varphi\,dx - 2\,\mathrm{Re}\int\partial_j\bar{u}\partial_k\partial_j\bar{u}\partial_k\varphi\,dx = \\
&= \mathrm{Re}\int\partial_k(|\partial_j u|^2)\partial_k\varphi\,dx + 2\,\mathrm{Re}\int(H^2\varphi\nabla u,\nabla\bar{u})dx - \mathrm{Re}\int\partial_k(|\partial_j u|^2)\partial_k\varphi\,dx + \\
&+ 2\,\mathrm{Re}\int\partial_k\bar{u}\partial_k u\partial_{kj}^2\varphi\,dx + 2\,\mathrm{Re}\int\bar{u}u\partial_k^2\partial_j\varphi\,dx = \\
&= 4\,\mathrm{Re}\int(H^2\varphi\nabla u,\nabla\bar{u})dx + \int\partial_j|u|^2\partial_k^2\partial_j\varphi\,dx = \\
&= 4\,\mathrm{Re}\int(H^2\varphi\nabla u,\nabla\bar{u})dx - \int|u|^2\Delta^2\varphi\,dx
\end{aligned}$$

con l'hessiana che risulta dal secondo termine della terza riga e il primo della quarta.
Mettendo insieme ciò che risulta dai calcoli appena svolti si trova la seconda delle stime di Morawetz.

□

Proposizione 22.3. *Sia $d \geq 3$ e $u(t,x)$ soluzione della (NLS). Allora*

mor_i (78)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|u(x)|^2 |u(y)|^2}{|x-y|^3} \, dx dy \leq \|\varphi\|_{H^1}.$$

Ed ora l'ultimo ingrediente.

Proposizione 22.4 (Gagliardo - Niremberg). *Sia $d \geq 3$. Si ha*

(79)
$$\|\varphi\|_{L^{2+\frac{4}{d}}} \leq C \|\nabla \varphi\|_{L^2}^{\vartheta} \|\varphi\|_{L^2}^{1-\vartheta}$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^{2+\frac{4}{d}}} &\leq (\text{Hölder}) \leq C \|\varphi\|_{L^2}^{\vartheta} \|\varphi\|_{L^{2^*}}^{1-\vartheta} \leq (\text{Sobolev}) \leq \\ &\leq \|\varphi\|_{L^2}^{\vartheta} \|\nabla \varphi\|_{L^2}^{1-\vartheta}. \end{aligned}$$

□

Osservazione 22.1. *Le stime di Gagliardo - Niremberg possono essere raffinate: si può dimostrare che, preso un cubetto d-dimensionale Q di misura unitaria, si ha*

$$\|\varphi\|_{L^{2+\frac{4}{d}}} \leq C(\|\nabla \varphi\|_{L^2} + \|\varphi\|_{L^2})^{\vartheta} + \sup_{Q \subset \mathbb{R}^d} \|\varphi\|_{L^2(Q)}^{1-\vartheta}.$$

Adesso siamo nelle condizioni giuste per poter dimostrare la proposizione di partenza.

Dimostrazione. Dimostreremo che $\|u(t,x)\|_{L^{2+\frac{4}{d}}} \xrightarrow{t \to \pm\infty} 0$. Se, per assurdo, così non fosse, potremmo trovare una sottosuccessione t_n per la quale $\|u(t_n,x)\|_{L^{2+\frac{4}{d}}} \geq \varepsilon_0 > 0$. Di conseguenza, per Gagliardo - Niremberg esiste $\{x_n\} \in \mathbb{R}^d$ tale che $\|u(t_n,x)\|_{L^2(Q)} \geq e_1 > 0$. Questo significa che, per determinati tempi, $\|\cdot\|_{H^1}$ è costante ovunque e di conseguenza che $\|\cdot\|_{L^2}$ si addensa su dei cubetti Q.
Affermiamo ora che esiste un η_0 tale che $\|u(t,x)\|_{L^2} \geq \varepsilon_1 \ \forall \, t \in [t_n - \eta_0, t_n + \eta_0]$. E questo porta ad un assurdo reso evidente dalle stime di Morawetz interattive: l'integrale di quantità positive, uniformemente grandi e disgiunte nel tempo diverge e quindi non può essere controllato da una costante, come prescritto dalle stime.
Perchè abbiamo potuto dire che esiste η_0? Se prendiamo $\varphi(x) = \chi_Q$ allora

$$\frac{d}{dt} \int \varphi |u|^2 dx = (\text{Morawetz}) = -2 \, \text{Im} \int \nabla \varphi \nabla u u dx \leq (\text{C.S.}) \leq \|u\|_{H^1} \leq \|\varphi\|_{H^1}.$$

□

Osservazione 22.2. *Notiamo che le stime di Morawetz interattive sono state molto utili dato che grazie alla presenza dell'integrazione doppia, non è stato necessario fissare un centro e questo ci ha permesso di superare il fatto che non sapevamo, a pirori, la posizione di cubetti Q in $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.*

23. Utili identità

Diamo qui alcune identità che vengono utilizzante.

(1) $\partial_x^2 \bar{u} \partial_x u = \partial_x^2 u \partial_x \bar{u} = \partial_x(|\partial_x u|^2)$
(2) $\partial_x(|u|^2)|u|^{\alpha} = \partial_x(|u|^2)(|u|^2)^{\frac{\alpha}{2}} = \partial_x[(|u|^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}] = \frac{2}{\alpha+2} \partial_x[(|u|^2)^{\frac{\alpha}{2}+1}]$

Indice

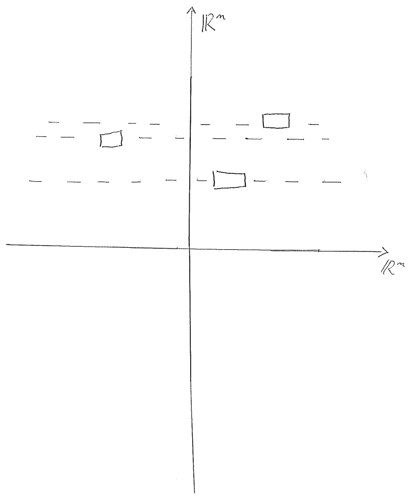

FIGURA 8. Cubetti localizzati di energia 8

FINE[10]
md

[10]Le presenti sono frutto della pazienza e della voglia di riordinare i propri appunti di uno studente, il quale, non garantisce sulla bontà di ciò che vi è in esse scritto. Certamente non sono il migliore strumento di apprendimento presente in giro ma...magari possono tornare utili a qualcuno...