SEMINARIO
ANALISI ARMONICA
PROF. VLADIMIR GEORGIEV
UNIVERSITA' DI PISA - A.A. 2012/2013

MATTEO DI NUNNO

1. Trasformata di Fourier

Sia

$$F(x)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-ix\xi}}{\xi^2-(1+i\delta)^2}d\xi$$

dove $\delta\in(0,1)$.

(1) Vedere se $F(x)$ é una funzione radiale e calcolare $F(x)$;
(2) vedere se $F\in L^p(\mathbb{R}^3)$ per qualche $p\in(1,\infty)$;
(3) provare a studiare il caso $\mathbb{R}^n$ con $n\geq 3$.

(1) Si ha che in $\mathbb{R}^3$ la funzione $C|x|^{-2}$ é radiale. Inoltre supponiamo di prendere la matrice $A\in S(3)$ e vediamo come si comporta il termine $e^{-ix\xi}$. Si ha

$$e^{-iAx\cdot\xi}=e^{-ix\cdot A^{-1}\xi}=(A^{-1}\xi=\tilde{\xi})=|\det A|e^{-ix\tilde{\xi}}=e^{-ix\tilde{\xi}}.$$

Adesso siano $x:=(0,0,|x|)=(0,0,1)r$ e $\xi=\rho\omega$ dove

$$\begin{cases}\omega_1=C\sin\theta\\ \omega_2=\tilde{C}\sin\theta\\ \omega_3=\cos\theta\end{cases}.$$

Quindi $x\cdot\xi=r\rho\cos\theta$ ed

$$F(x)=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\pi}e^{-ir\rho\cos\theta}\sin\theta d\theta\right)\frac{\rho^2d\rho}{\rho^2-(1+i\delta)^2}$$

ma

$$\frac{1}{ir\rho}\partial_\theta(e^{-ir\rho\cos\theta})=e^{-ir\rho\cos\theta}\sin\theta$$

e questo ci permette di arrivare a

$$F(x)=\frac{C}{r}\int_0^{+\infty}\frac{\rho\sin r\rho}{\rho^2-(1+i\delta)^2}d\rho.$$

L'obiettivo é riuscire a calcolare questo integrale tramite il teorema dei residui: Sia $z=Re^{i\varphi}=R(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ nel semipiano inferiore ossia con $\operatorname{Im}z<0$ e $\pi<\varphi<2\pi$. Osserviamo che

$$\left|e^{-irz}\right|=e^{\operatorname{Re}(-irz)}=e^{\operatorname{Re}-ir(R\cos\varphi+iR\sin\varphi)}=e^{-rR\sin\varphi}\overset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Resta da calcolare, con $|x| = r$ e $|\xi| = \rho$

$$\frac{1}{r}\int_0^{+\infty} \frac{\rho \sin r\rho}{\rho^2 - (1+i\delta)^2} d\rho = \frac{2}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho \sin r\rho}{\rho^2 - (1+i\delta)^2} d\rho =$$
$$= 2\pi i \operatorname{Res}(f, -1-i\delta) = \frac{2\pi i}{r(-2-i\delta)} e^{-ir(-1-i\delta)} \simeq \frac{C}{r} e^{ir - r\delta}.$$

2. Interpolazione

Sia

$$I(g)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} F(x-y) g(y) dy$$

dove $F(x)$ é la funzione del punto precedente.

(1) Vedere per quali $p, q \in (1, +\infty)$ si ha
$$I : L^p(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^3);$$

(2) sia
$$L^2_a := \left\{ f : f \text{ é misurabile in } \mathbb{R}^3;\ \langle x\rangle^a f \in L^2 \right\}$$
con norma
$$\|f\|_{L^2_a(\mathbb{R}^3)} = \|\langle x\rangle^a f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$
ed $a \in \mathbb{R}$. Vedere per quali $a, b \in \mathbb{R}$ si ha
$$I : L^2_a(\mathbb{R}^3) \longrightarrow L^2_b(\mathbb{R}^3);$$

(3) provare a studiare il caso $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$.

(1) Osserviamo che
$$|I(g)(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|g(y)|}{|x-y|} dy$$
e quindi
$$\|I(g)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} = \|F * g\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \lesssim \left\| \frac{1}{|x|} * g \right\|_{L^q(\mathbb{R}^3)}.$$
A questo punto sfruttiamo le stime di Hardy - Littlewood - Sobolev; nel caso generale possiamo affermare che per una $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, con $0 < \alpha < n$ si ha
$$\left\| \frac{1}{|x|^\alpha} * \varphi \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \iff 1 + \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n} + \frac{1}{p} \quad q \neq \infty, q \neq \frac{n}{\alpha}.$$
Nel nostro caso
$$\left\| \frac{1}{|x|} * g \right\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$
con
$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{3} + \frac{1}{p} \Longrightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{2}{3}.$$
Inoltre $q \neq \infty \Rightarrow p \neq \frac{3}{2}$ mentre $q \neq 3 \Rightarrow p \neq 1$. In $\mathbb{R}^n$ avremo
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{n-1}{n} \quad p \neq \frac{n}{n-1} \quad q \neq n.$$

(2) Partiamo dall'osservare che, con $z = -1 - i\delta \notin \sigma(\Delta)$ si ha

$$I(g) = (z^2 + \Delta)^{-1} g := u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{\pm iz|x-y|}}{|x-y|} g(y)\,dy.$$

Adesso bisogna mostrare per quali $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\|\langle x\rangle^b u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C\|\langle x\rangle^a g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \iff \|\langle x\rangle^{-a} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C\|\langle x\rangle^{-b} g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Si ha

$$\|\langle x\rangle^{-a} u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \lesssim (\text{ Hölder }) \lesssim \|\langle x\rangle^{-a}\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

dove $1/2 = 1/p + 1/q$ ed $a > 1/2$. Inoltre bisogna imporre che $aq = 3_+ = 3 + \varepsilon$. Prendiamo il caso limite $a = 1/2$ e troviamo

$$1/p = 1/2 - a/3_+ \Longrightarrow q = 6 \quad p = 3.$$

Adesso si ha

$$\|u\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \lesssim \left\| \frac{1}{|x|} * g \right\|_{L^3(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

per Hardy - Littlewood - Sobolev con $\alpha = 1$, $q = n = 3$ e quindi resta univocamente determinato $p = 1$. A questo punto

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \|\langle x\rangle^b \langle x\rangle^{-b} g\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|\langle x\rangle^{-b}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\langle x\rangle^b g\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

e qui dobbiamo richiedere che $2b > 3$. Quindi abbiamo trovato

$$a > 3 \qquad b > \frac{3}{2}.$$

Proviamo ora a studiare il caso in cui $I : L^2_a(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2_b(\mathbb{R}^n)$. Dobbiamo cercare di dimostrare che

$$\|\langle x\rangle^b I(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\|\langle x\rangle^a g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \iff \|\langle x\rangle^{-a} I(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le C\|\langle x\rangle^{-b} g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Si ha

$$\|\langle x\rangle^{-a} I(g)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\langle x\rangle^{-a}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|I(g)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim$$
$$\lesssim \|\langle x\rangle^{-a}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \left\| \frac{1}{|x|} * g \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

dove abbiamo usato Hölder con $1/2 = 1/q + 1/p$. Adesso bisogna imporre

$$aq = n_+ = n + \varepsilon$$

e di conseguenza

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{a}{n_+}.$$

L'esponente a deve essere maggiore di $1/2$. Scegliamo

$$a = \frac{n_+ - 2}{2}$$

cosí da avere

$$p = n \qquad q = \frac{2n}{n-2} = 2^*.$$

Sia ora $n_- = n - \varepsilon$ e utilizzando la disuguaglianza di Hardy - Littlewood - Sobolev troviamo

$$\left\| \frac{1}{|x|} * g \right\|_{L^{n_-}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \qquad 1 + \frac{1}{n_-} = \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \Longrightarrow p = 1$$

e quindi

$$\frac{1}{p} = 1 + \frac{\varepsilon}{n(n-\varepsilon)}.$$

Infine

$$\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \|\langle x\rangle^b \langle x\rangle^{-b} g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\langle x\rangle^{-b}\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \|\langle x\rangle^b g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

e qui vediamo che $rb > n$ é la condizione da porre. In definitiva si ha

$$a > n \qquad b > \frac{n}{r} \text{ con } \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{n(n-\varepsilon)}.$$

3. Funzione massimale

Una funzione misurabile $f(x)$ appartiene alla classe di Kato (in $\mathbb{R}^3$) se

$$\|f\|_{\mathscr{K}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(y)|}{|x-y|} dy < +\infty.$$

(1) Mostrare che lo spazio $\dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}^3)$, ottenuto come la chiusura di $\mathscr{C}_0^\infty$ rispetto alla norma

$$\|f\|_{\dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f(x)| dx,$$

é immerso con continuitá nella classe di Kato, ossia che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ si abbia

$$\|f\|_{\mathscr{K}} \leq C\|f\|_{\dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}^3)};$$

(2) mostrare che anche $L^{3/2,1}$ é contenuto nella classe di Kato.

(1) Il prossimo é un importante teorema di cui accenniamo la dimostrazione.

Teorema 3.1. *(***Disuguaglianza di Hardy generalizzata***)*
Sia $f \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora si ha

$$\left\| \frac{1}{|x|} f \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dimostrazione. Supponiamo, per il momento, che f sia radiale ossia che $f(x) := f(|x|)$. Quindi ció che vogliamo dimostrare é che

$$\|f\|_{p,n}^p = \int_0^\infty |f|^p r^{n-1-p} dr \leq C \int_0^\infty |f'|^p r^{n-1} dr.$$

Per il teorema fondamentale del calcolo si ha (con $\tau = rt$)

$$f(r) = \int_r^\infty f'(\tau) d\tau = r \int_1^\infty f'(rt) dt.$$

A questo punto

$$\|f'(rt)\|_{p,n}^{p} = \int_0^\infty |rf'(rt)|^p r^{n-1-p} dr = \int_0^\infty |f'(rt)|^p r^{n-1} dr =$$

(1) $$= (\rho = rt) = \int_0^\infty \rho^{n-1} |f'(\rho)|^p \frac{d\rho}{t^n}$$

e di conseguenza

$$\|f\|_{p,n}^{p} \leq \int_0^\infty \|rf'(rt)\|_{p,n} dt = \left(\int_1^\infty t^{-\frac{n}{p}} dt\right)\left(\int_0^\infty |f'(r)|^p r^{n-1} dr\right).$$

Se proviamo a togliere l'ipotesi di radialit á, dobbiamo dimostrare che, posta $g_\omega = f(r\omega)$, si ha

$$\left\| \frac{1}{|x|} g_\omega \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|\nabla g_\omega\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Sia $f \in \mathscr{C}_0^\infty$; sfrutteremo il fatto che vale la disuguaglianza di Hardy ossia

$$\left\| \frac{1}{|x|} f \right\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \lesssim \|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}.$$

Si ha, una volta fissato x, che

$$\|f\|_{\mathcal{K}} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f(y)|}{|x-y|} dy = (x - y = y' := y \quad g_x(y) := f(x-y)) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g_x(y)}{|y|} dy \leq \int_{\mathbb{R}^3)} |\nabla g_x(y)| dy = C \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f(x-y)| dy$$

ma il gradiente é invariante per traslazioni quindi l'ultima quantitá scritta é

$$C \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla f(y)| dy = \|\nabla f\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} = \|f\|_{\dot{W}^{1,1}(\mathbb{R}^3)}.$$

(2) Adesso dobbiamo verificare che, presa $f \in \mathscr{C}_0^\infty$, si ha

$$\|f\|_{\mathcal{K}} \lesssim \|f\|_{L^{3/2,1}}.$$

Per quanto riguarda gli spazi di Lorentz abbiamo la seguente stima:

$$\|f * g\|_{L^{r,s}} \lesssim \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}} \qquad \begin{cases} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1 \\ \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{s} \\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{r} + 1 \end{cases}.$$

Essa peró non puó essere usata perché nel nostro caso non sarebbe soddisfatta la prima condizione. Ci viene in aiuto una stima differente per il caso L^∞: prese $f \in L^{p_1,q_1}$ e $g \in L^{p_2,q_2}$ si ha

$$\|f * g\|_{L^\infty} \lesssim \|f\|_{L^{p_1,q_1}} \|g\|_{L^{p_2,q_2}} \qquad \begin{cases} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1 \\ \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq 1 \end{cases}.$$

Nel nostro caso si ha

$$\|f\|_{\mathcal{K}} = \left\| \frac{1}{|x|} * f \right\|_{L^\infty} \lesssim \||x|^{-1}\|_{L^{p,\infty}} \|f\|_{L^{3/2,1}}$$

con

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{2}{3} = 1 \\ \frac{1}{\infty} + 1 \geq 1 \end{cases} \implies p = 3.$$

4. Moltiplicatori di Fourier

Sia

$$f(\xi) = \frac{\sin|\xi|}{|\xi|}$$

come moltiplicatore di Fourier e consideriamo l'operatore

$$J_f(g)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi} f(\xi)\hat{g}(\xi)d\xi.$$

(1) Trovare dei $p, q \in [1,\infty]$ ammissibili, per cui l'operatore operi in modo continuo da $L^p(\mathbb{R}^3)$ a $L^q(\mathbb{R}^3)$;
(2) estendere l'operatore J al seguente operatore

$$G(H)(t,x) = t\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix\xi} f(t\xi)\hat{H}(\xi)d\xi \quad t > 0$$

e cercare di trovare dei $p, q \in [1,\infty]$ per cui G é limitato da $L^p(\mathbb{R}^3)$ a $L^q(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3)$

Diamo alcune nozioni utili allo svolgimento dell'esercizio.

Definizione 4.1. *Dati $1 \leq p, q \leq \infty$ é definito lo spazio $\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ degli operatori limitati da $L^p(\mathbb{R}^n)$ a $L^q(\mathbb{R}^n)$ che commutano con la traslazione.*

Sugli spazi $\mathscr{M}^{p,q}$ possiamo definire la norma

$$\|T\|_{\mathscr{M}^{p,q}} := \|T\|_{L^p\to L^q}$$

ossia la norma di T come operatore da L^p ad L^q.

Osservazione 4.2. *Se $1 < p \leq q < +\infty$ vi é l'isometria*

$$\mathscr{M}^{p,q} = \mathscr{M}^{q',p'}.$$

Inoltre se $1 \leq q < p < +\infty$ allora

$$\mathscr{M}^{p,q} = \{\emptyset\}.$$

Definizione 4.3 (Spazio dei moltiplicatori di Fourier)**.** *Sia $1 \leq p < +\infty$. Si ha lo spazio $\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ di tutte le funzioni limitate su $\mathbb{R}^n$ tali che l'operatore*

$$T_m(f) := (\hat{f}m)^\vee \qquad f \in \mathscr{S}$$

é limitato su $L^p(\mathbb{R}^n)$ (o é inizialmente definito su un un sottospazio denso ed ha un'estesione limitata su tutto lo spazio). La norma di m é definita come

$$\|m\|_{\mathscr{M}_p} := \|T_m\|_{L^p\to L^p}.$$

In base a questa definizione $m \in \mathcal{M}_p$ se e solo se $T_m \in \mathcal{M}^{p,p}$; inoltre, per l'osservazione precedente,

$$\|m\|_{\mathcal{M}_p} = \|m\|_{\mathcal{M}_{p'}} \qquad 1 < p < +\infty.$$

Teorema 4.4. *Sia $m(\xi,\eta) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^{n+m})$ con $1 < p < \infty$. Allora per q.o. $\xi \in \mathbb{R}^n$ la funzione tale che $\eta \longmapsto m(\xi,\eta)$ é in $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^m)$ e*

$$\|m(\xi,\cdot)\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^m)} \leq \|m\|_{\mathcal{M}_p(\mathbb{R}^{n+m})}$$

(1) Siano $f \in \mathscr{C}_0^\infty$ e $g \in \mathscr{S}$. Si ha:

$$\|I_f(g)\|_{L^q(\mathbb{R}^3)} = \sup_{\|\varphi\|_{L^{q'}}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^3} ((f(\xi)\hat{g})^\vee)\,\varphi\, d\xi \right| \leq \|f\|_{\mathcal{M}_q} \|\hat{g}\|_{L^p}.$$

Se $g \in L^p$ con $p \in [1,2]$ allora per Hausdorff - Young l'ultima stima é $\leq C\|g\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^3)}$.

(2) Ricordiamo tre regole che riguardano la trasformata di Fourier di funzioni a rapida decrescenza: sia $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Si ha che

$$f^\vee(x) = \hat{f}(-x) \qquad \hat{\hat{f}} = \check{\hat{f}} \qquad \widehat{f * g} = \hat{f} * \hat{g}.$$

Allora

$$J_f = (f\hat{g})^\vee = (f\check{g}(-x))^\vee = (f\check{g}(x))\hat{} = \hat{f} * \hat{g}.$$

Notiamo che, dato che f é radiale, si ha

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\xi)e^{-ix\xi}\,d\xi = \int_0^\infty f(\xi)e^{-ix\xi}\,d\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}[\mathrm{sgn}(1-x) + \mathrm{sgn}(x+1)]$$

quindi

$$\hat{f} \simeq C\chi_{[-1,1]}.$$

Sia ora $f_t(\xi) = f(t\xi)$. Si ha

$$\widehat{tf_t}(x) = \hat{f}\left(\frac{x}{t}\right) = \chi\left(\left|\frac{x}{t}\right| < 1\right)$$

quindi

$$G(H)(t,x) = \int \hat{f}\left(\frac{|x-y|}{t}\right) H(y)\,dy = \int_{|x-y|<t} H(y)\,dy = (z = x-y) =$$
$$= \int_{|z|<t} H(x-z)\,dz.$$

Adesso

$$\|G(H)\|_{L^q(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R})} \lesssim t\|\hat{f} * H\|_{L^q(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R})} \lesssim t\|\chi_{[-1,1]}\|_{L^r(\mathbb{R})}\|H\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \lesssim$$
$$\lesssim \|H\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza di Young con

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}.$$