Indice

Parte I

I Semestre

Lezione 1

Insiemi e applicazioni

1.1 Teoria

Il concetto di insieme

La struttura più semplice è la struttura di insieme; concetto primitivo non definito che indica una collezione di elementi, di oggetti. Visto che parliamo di collezione, di insieme, dobbiamo avere dei simboli per indicare se un elemento appartiene, o non appartiene a un dato insieme. Dato quindi A un insieme e x un generico elemento, scriveremo:

$x \in A$, se x appartiene ad A.
$x \notin A$, se x non appartiene ad A.
$A = \varnothing$, se A è l'insieme vuoto e nessun elemento vi appartiene.

Vi sono alcuni insiemi particolarmente importanti (con caratteristiche interessanti), che sono indicati con un loro proprio simbolo. Tra di questi:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$$
$$\mathbb{Q} = \left\{0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \ldots\right\}$$
$$\mathbb{R} = \{\pi, \phi, \rho, \ldots\}$$

Ma come vengono indicati, in generale, gli insiemi?
Se un insieme ha un numero finito di elementi lo possiamo indicare elencandoli tutti (scrittura estensiva) e allora scriviamo:

$$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Per indicare gli elementi di insiemi infiniti (o di cui non è pratico o elegante indicare tutti gli elementi) si usa indicare la proprietà che caratterizza gli elementi dell'insieme (scrittura intensiva). In questo modo si pensa all'insieme non per i particolari elementi che contiene, ma come contenitore di elementi con determinate caratteristiche. Esaminiamo per esempio la scrittura:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } x = 2k + 1\}$$

usata per indicare i numeri interi dispari. La scrittura è composta di due parti:

- La prima ($x \in \mathbb{Z}$) indica un insieme dentro il quale è contenuto il nostro insieme A, e serve quindi per indicare 'dove' dobbiamo cercare gli elementi del nostro insieme.

- La seconda parte, che segue il simbolo $|$, indica la proprietà che caratterizza gli elementi dell'insieme: l'insieme è composto da tutti e soli gli elementi (di $\mathbb{Z}$) che hanno questa proprietà.

La scrittura quindi si legge: A è l'insieme di tutti e soli gli x di $\mathbb{Z}$ tali che esiste un $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x = 2k + 1$.
Quindi, data una proprietà $P(x)$, il modo 'generale' per indicare l'insieme degli elementi con questa proprietà è:

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

Occupiamoci ora delle relazioni che ci possono essere tra i vari insiemi.

Definizione 1 (Sottoinsieme e uguaglianza tra insiemi)**.** Siano A, B due insiemi, scriviamo:

- $A \subseteq B$, se ogni elemento di A appartiene anche a B; cioè se $\forall a \in A,\ a \in B$. Alternativamente si può vedere l'essere un sottoinsieme come un'implicazione. Infatti $\forall a \in A,\ a \in B$ può essere riscritta anche come $a \in A \implies a \in B$. Le scritture sono equivalenti; la prima indica un proprietà, la seconda un'implicazione (comunque la seconda è più usata, per dimostrare che un insieme è un sottoinsieme di un altro).

- $A = B$, se i due insiemi contengono esattamente gli stessi elementi; quindi in particolare se $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, cioè se $a \in A \iff a \in B$.

Riflessione 1. Abbiamo finora usato due simboli, chiamati quantificatori, senza specificare il loro significato: $\exists$ e $\forall$.
Il simbolo $\forall$ significa 'per ogni'; negare un $\forall$ significa trovare un controesempio, trovare un elemento per il quale la preposizione è falsa.
L'altro simbolo è il $\exists$; questo indica l'esistenza, indica che esiste almeno un elemento con la caratteristica indicata. La negazione dell'$\exists x \mid P(x)$ è il $\forall x, \overline{P(x)}$.

Storicamente parlando il primo insieme utilizzato è stato $\mathbb{N}$, poi si è passati a $\mathbb{Z}$ per dare senso anche alla sottrazione; poi è stata la volta di $\mathbb{Q}$ per avere la divisione e poi si è giunti a $\mathbb{R}$, spinti dalla necessità di avere un numero che indicasse il rapporto tra il lato e la diagonale di un quadrato. Quindi mano a mano che sono sorti problemi con l'ambiente in cui si lavorava, questo è stato espanso per far posto ad elementi prima non considerati.
Prima di andare avanti notiamo (cosa molto importante) che $x \neq \{x\}$, infatti il primo è un elemento, il secondo un insieme.

Dopo aver visto le possibili relazioni tra gli insiemi è importante considerare anche le possibili operazioni tra di essi. Siano infatti A e B insiemi; definiamo:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$
$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Inoltre se $A \cap B = \varnothing$ allora gli insiemi si dicono disgiunti.

Definizione 2 (Prodotto cartesiano)**.** Siano A, B due insiemi, si definisce prodotto cartesiano $A \times B$ l'insieme delle coppie ordinate (a, b) tali che $a \in A$ e $b \in B$. Quindi

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

In particolare definiamo:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i_1^n, x_i \in \mathbb{R}\}$$

Applicazioni

Definizione 3 (Applicazione)**.** Siano A, B insiemi, un'applicazione è una terna formata da:

- Un insieme A (che viene chiamato dominio).
- Un insieme B (che viene chiamato codominio).
- Una legge ϕ che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

E si scrive $A \xrightarrow{\phi} B$.

Osservazione 1. È importante che non vi sia ambiguità: dato un elemento di A dobbiamo sapere quale elemento di B gli corrisponde, per questo si associa un solo elemento del codominio ad ogni elemento del dominio. In particolare dato $a \in A$ si intende con $\phi(a)$ l'immagine di a: l'elemento in cui ϕ manda a.

Definizione 4 (Immagine)**.** Sia $A \xrightarrow{\phi} B$ una applicazione e sia $C \subseteq A$ allora si definisce insieme delle immagini di elementi appartenenti a C, l'insieme:

$$\phi(C) = \{y \in B \mid \exists x \in C \text{ t.c. } y = \phi(x)\}$$

Inoltre si scrive $Imm\,(\phi)$ per intendere $\phi(A)$.

Definizione 5 (Surgettivo, iniettivo, bigettivo)**.** Sia $A \xrightarrow{\phi} B$ un'applicazione;

- ϕ si dice surgettiva se l'immagine di ϕ è B. Cioè se $\forall y \in B,\ \exists x \in A \text{ t.c. } \phi(x) = y$.
- ϕ si dice iniettiva se, $\forall x, y \in A,\ x \neq y \implies \phi(x) \neq \phi(y)$. Cioè se l'applicazione manda elementi distinti del dominio in elementi distinti del codominio. Un altro modo per definire l'iniettività è: ϕ è iniettiva se $\forall \phi(x), \phi(y) \in B,\ \phi(x) = \phi(y) \implies x = y$.
- ϕ si dice bigettiva se è sia iniettiva che surgettiva.

Definizione 6 (Controimmagine)**.** Sia $A \xrightarrow{\phi} B$ un'applicazione e $W \subseteq B$; si dice controimmagine di W l'insieme:

$$\phi^{-1}(W) = \{x \in A \mid \phi(x) \in W\}$$

Esempio 1. Sia $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ con la legge:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 2n + 1$$

Esaminiamo questa applicazione:

- $\mathbb{N}$ è sia dominio che codominio.
- $Imm\,(f) = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists y \in \mathbb{N} \text{ t.c. } f(y) = x\} = \{\text{Numeri dispari in } \mathbb{N}\}$.
- L'applicazione non è surgettiva poiché $Imm\,(f) \subsetneq \mathbb{N}$.
- L'applicazione è iniettiva; infatti $f(x) = f(y) \implies 2x + 1 = 2y + 1 \implies x = y$.

Osservazione 2. Abbiamo visto che un'applicazione è una terna, formata da due insiemi e una legge. Potrebbe essere interessante cambiare questa terna: lasciare invariati il codominio e la legge e mutando solamente il dominio: si prende per dominio un sottoinsieme del dominio iniziale per vedere come cambia l'applicazione.

Definizione 7 (Restrizione)**.** Sia $A \xrightarrow{\phi} B$ un'applicazione e $C \subseteq A$; allora si indica con $\phi|_C$ l'applicazione $C \xrightarrow{\phi|_C} B$ definita nel seguente modo:

$$\forall c \in C,\ \phi|_C\,(c) \overset{def.}{=} \phi(c)$$

Abbiamo quindi che $Imm\,(\phi|_C) = \phi(C)$.

1.2 Esercitazione

Esercizio 1. Siano A, B, C insiemi. Dimostrare (anche graficamente) le seguenti uguaglianze:

- $A \cup A = A$
- $A \cap A = A$
- $A \subseteq (A \cup B)$
- $A \supseteq (A \cap B)$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- $A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cup (B - A) =?$
- $A \cap (B - A) =?$
- $A - (B \cap C) =?$
- $A - (B \cup C) =?$

Esercizio 2. Siano $A \xrightarrow{\phi} B$ un'applicazione, $S \subseteq A$ e $T \subseteq B$. Dimostrare che:

- $S \subseteq \phi^{-1}(\phi(S))$
- $T \supseteq \phi(\phi^{-1}(T)))$
- $\phi(\phi^{-1}(T)) = T \cap Imm\,(\phi)$

Lezione 2

Relazioni di equivalenza

2.1 Teoria

Ancora applicazioni

Definizione 8 (Identità)**.** Sia A un insieme; si denota con Id_A l'applicazione $A \xrightarrow{Id_A} A$ che manda ogni elemento di A in se stesso. Cioè $\forall a \in A,\ Id_A(a) = a$.

Definizione 9 (Uguaglianza di applicazioni)**.** Siano A, B insiemi e $A \xrightarrow{\phi} B$, $A \xrightarrow{\psi} B$ applicazioni. Allora:

$$\phi = \psi \iff \forall a \in A,\ \psi(a) = \phi(a)$$

Definizione 10 (Applicazione inversa)**.** Sia $A \xrightarrow{\phi} B$ un'applicazione bigettiva. Allora

$$\forall b \in B,\ \exists !\ a \in A \mid \phi(a) = b$$

Quindi è ben definita l'applicazione inversa: $B \xrightarrow{\phi^{-1}} A$ che associa ad ogni elemento $b \in B$ l'elemento che ϕ associa ad esso.

Definizione 11 (Composizione di applicazioni)**.** Siano A, B, C insiemi e $A \xrightarrow{\phi} B$, $B \xrightarrow{\psi} C$ applicazioni. Si definisce allora composizione di ϕ e ψ l'applicazione:

$$A \xrightarrow{\psi \circ \phi} C \text{ t.c. } \forall a \in A,\ \psi \circ \phi(a) \overset{def.}{=} \psi(\phi(a))$$

Esercizio 3. Siano $A \xrightarrow{\phi} B$, $B \xrightarrow{\psi} C$ applicazioni; dimostrare che

$$Imm\,(\psi \circ \phi) = Imm\left(\psi|_{Imm(\phi)}\right)$$

Esercizio 4. Sia $A \xrightarrow{\phi} B$ applicazione bigettiva; allora

$$\phi \circ \phi^{-1} = Id_B \quad e \quad \phi^{-1} \circ \phi = Id_A$$

Osservazione 3. È importante ricordare che, date due applicazioni $A \xrightarrow{\phi} B$, $B \xrightarrow{\psi} C$, la scrittura $\phi \circ \psi$ non ha alcun significato. Se abbiamo però $A \xrightarrow{\phi} A$, $A \xrightarrow{\psi} A$ a questo punto ha senso sia $\phi \circ \psi$ che $\psi \circ \phi$; ma sono in generale applicazioni del tutto diverse.

Relazioni di equivalenza e quozienti

Definizione 12 (Relazione)**.** Sia E un insieme non vuoto; si dice relazione su E un sottoinsieme $\mathscr{R}$ di $E \times E$.
Se $(a, b) \in \mathscr{R}$ allora scriveremo $a \sim b$ e diremo che a è in relazione con b.

Definizione 13 (Relazione di equivalenza)**.** Sia $\mathscr{R}$ una relazione su E; $\mathscr{R}$ si dice relazione di equivalenza se valgono le seguenti proprietà:

- Riflessiva: $\forall x \in E,\ x \sim x$.
- Simmetrica: $\forall x, y \in E,\ x \sim y \implies y \sim x$.
- Transitiva: $\forall x, y, z \in E,\ x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z$.

Definizione 14 (Classe di equivalenza)**.** Sia E un insieme non vuoto e $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza su E. $\forall x \in E$ si dice classe di equivalenza di x l'insieme:

$$[x] = \{y \in E \mid y \sim x\}$$

I vari elementi di una classe di equivalenza si dicono rappresentanti della classe.

Osservazione 4. Si vede immediatamente che $x \in [x]$.

Definizione 15 (Insieme quoziente)**.** Sia $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza definita su E; allora si dice insieme quoziente di E su $\mathscr{R}$:

$$E/_{\mathscr{R}} = \{[x] \mid x \in E\}$$

Definizione 16 (Proiezione (canonica) al quoziente)**.** Sia $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza definita su E. Si definisce proiezione canonica al quoziente l'applicazione

$$E \xrightarrow{\pi} E/_{\mathscr{R}} \text{ t.c. } \forall a \in E,\ \pi(a) = [a]$$

Osservazione 5. La proiezione al quoziente è surgettiva (ovvio, data infatti la classe $[x]$, questa è immagine dell'elemento x), ma non iniettiva.

Lemma 1. *Sia $\mathscr{R}$ una relazione di equivalenza definita su E e $x, y \in E$. Allora*

$$[x] = [y] \iff x \sim y$$

Dimostrazione. '$\Rightarrow$' $x \in [x] \wedge [x] = [y] \implies x \in [y] \overset{def}{\implies} x \sim y$

'$\Leftarrow$' Dimostriamo in particolare che $[x] \subseteq [y]$ e per fare questo dobbiamo dimostrare che $\forall z \in [x], z \in [y]$.
$z \in [x] \implies z \sim x$; poiché sappiamo per ipotesi che $x \sim y$ e per la proprietà transitiva abbiamo $z \sim y \implies z \in [y]$

Proposizione 1. *Sia E un insieme e $\mathscr{R}$ una relazione su di esso. Allora*

1)

$$E = \bigcup_{x \in E} [x]$$

2)

$$[x] \neq [y] \iff [x] \cap [y] = \varnothing$$

Dimostrazione. 1) Ciascun elemento di E appartiene ad una classe; la loro unione è quindi E.

2) Facciamo solo il '$\Leftarrow$', l'altra freccia è ovvia. Dimostriamolo per assurdo:

$$\exists z \in [x] \wedge z \in [y] \implies z \sim x \wedge z \sim y \implies x \sim y \implies [x] = [y] \text{ assurdo}$$

2.2 Esercitazione

Proposizione 2. *Siano A, B, C insiemi.*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Dimostrazione. '$\subseteq$' Se $x \in A \cup (B \cap C)$ ci sono due possibilità:

$$x \in A \implies (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \implies x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Oppure:

$$x \in B \cap C \implies x \in B \wedge x \in C \implies x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

'$\supseteq$' $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \iff x \in (A \cup B) \wedge x \in (A \cup C)$. Ci anche qui due possibilità:

- $x \in A \implies x \in A \cup (B \cap C)$.
- $x \notin A \implies x \in B \wedge x \in C \implies x \in B \cap C \implies x \in A \cup (B \cap C)$.

Proposizione 3. *Siano A, B, C insiemi e $A \xrightarrow{\phi} B$, $B \xrightarrow{\psi} C$ applicazioni. Allora*

a) ϕ, ψ iniettive $\implies \psi \circ \phi$ iniettiva.

b) ϕ, ψ surgettive $\implies \psi \circ \phi$ surgettiva.

Dimostrazione. a) Siano $a, b \in A$.

$$a \neq b \implies \phi(a) \neq \phi(b) \implies \psi(\phi(b)) \neq \psi(\phi(b))$$

b) Dobbiamo dimostrare $Imm\,(\psi \circ \phi) = C$; in particolare dobbiamo dimostrare le due inclusioni:

'$\subseteq$' Ovvia.

'$\supseteq$'

$$\begin{aligned} y \in C &\xRightarrow{\psi\ su.} \exists z \in B \text{ t.c. } \psi(z) = y \\ &\xRightarrow{\phi\ su.} \exists x \in A \text{ t.c. } \phi(x) = z \\ &\implies \psi \circ \phi(x) = \psi(\phi(x)) = \psi(z) = y \end{aligned}$$

Lezione 3

Anelli, campi e spazi vettoriali

3.1 Teoria

Insiemi con operazioni

Definizione 17. Sia X un insieme; si indica con

$$\mathcal{S}_X = \left\{ X \xrightarrow{\phi} X \mid \phi \text{ bigettiva} \right\}$$

Abbiamo finora analizzato gli insiemi e i rapporti che questi possono avere tra di loro; si possono però anche avere delle operazioni interne ai singoli insiemi.

Definizione 18 (Operazione)**.** Sia A un insieme; si definisce operazione su A un'applicazione $A \times A \xrightarrow{+} A$ che associa a ogni coppia ordinata $(a, b) \in A \times A$ un elemento $a + b \in A$.

Esempio 2. Sia A un insieme; si può definire un'operazione $\mathcal{S}_A \times \mathcal{S}_A \xrightarrow{\circ} \mathcal{S}_A$. Questa è l'operazione di composizione: che associa a due applicazioni bigettive l'applicazione bigettiva ottenuta dalla loro composizione.

Non è possibile analizzare separatamente ogni operazione possibile in ogni insieme immaginabile; si deve quindi cercare di analizzare in astratto il concetto di operazione e definire alcune caratteristiche generali. In particolare tratteremo solo di insiemi in cui sono definite operazioni con determinate caratteristiche.

Definizione 19 (Gruppo)**.** Sia A un insieme e $*$ un'operazione definita su di esso. Allora la coppia $(A, *)$ si dice gruppo se valgono le seguenti proprietà:

1) Proprietà associativa: $\forall a, b, c \in A,\ (a * b) * c = a * (b * c)$.

2) Esistenza del neutro: $\exists e \in A \mid \forall a \in A,\ a * e = e * a = a$.

3) Esistenza dell'inverso: $\forall a \in A,\ \exists b \in A \mid a * b = b * a = e$.

Inoltre se $\forall a, b \in A,\ a * b = b * a$ il gruppo si dice commutativo o abeliano.

Esempio 3. - $(\mathbb{N}, +)$ non è un gruppo: non vale l'esistenza dell'inverso.

- $(\mathbb{Z}, +)$ è un gruppo abeliano.
- $(\mathbb{R}, \cdot)$ non è un gruppo: 0 non ha inverso.
- $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano.

Proposizione 4 (Proprietà dei gruppi)**.** *Sia $(A, *)$ un gruppo. Allora:*

a) $\exists!\ e \in A \mid \forall a, b \in A,\ a * e = e * a = a.$

b) $\forall a \in A,\ \exists!\ b \in A \mid a * b = b * a = e.$

c) $\forall a, b, c \in A,\ a * b = a * c \implies b = c.$

Dimostrazione.

a) Siano e, e' due elementi neutri di A. Allora: $e = e * e' = e'$.

b) Siano b, b' due elementi inversi di a in A. Allora possiamo scrivere:

$$b = e * b = (b' * a) * b = b' * (a * b) = b' * e = b'$$

c) Sia a^{-1} l'inverso di a. Allora:

$$\begin{aligned} a * b = a * c &\iff a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c) \iff (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c \\ &\iff b = c \end{aligned}$$

Definizione 20 (Anello)**.** Sia A un insieme sul quale siano definite due operazioni $+, *$. La terna $(A, +, *)$ si dice anello se:

1) $(A, +)$ è un gruppo abeliano.
2) $\forall a, b, c \in A,\ a * (b * c) = (a * b) * c.$
3) $\exists e \in A$ (denotato con 1) $\mid \forall a \in A,\ a * 1 = 1 * a = a.$
4) $\forall a, b, c \in A,\ (a + b) * c = (a * c) + (b * c).$
5) $\forall a, b, c \in A,\ a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$

Se inoltre vale anche la proprietà commutativa per il prodotto, allora l'anello si dice commutativo.

Definizione 21 (Campo)**.** Sia A un insieme sul quale siano definite due operazioni $+, *$. La terna $(A, +, *)$ si dice campo se:

1) $(A, +, *)$ è un anello commutativo.
2) $\forall a \in A, a \neq 0,\ \exists b \in A \mid a * b = b * a = 1.$

Esempio 4.
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un campo.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un campo.
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non è un campo.

Proposizione 5. *Sia $(A, +, *)$ un anello. Allora:*

a) $\forall a \in A,\ a * 0 = 0 * a = 0.$

b) $\forall a \in A,\ (-1) * a = -a$.

Dimostrazione. Intendiamo con $-a$ l'opposto di a rispetto alla somma.

a)
$$a * 0 = a * (0 + 0) = a * 0 + a * 0 \implies 0 = a * 0$$

b)
$$a + (-1)a = (1 * a) + ((-1) * a)) = (1 - 1) * a = 0 * a = 0$$

Proposizione 6. *Sia* $(\mathbb{K}, +, *)$ *un campo e* $a, b \in \mathbb{K}$. *Allora:*

$$a * b = 0 \wedge a \neq 0 \implies b = 0$$

Dimostrazione. Poiché $\mathbb{K}$ è campo e $a \neq 0$, allora $\exists a^{-1}$. Quindi:

$$a * b = 0 \implies a^{-1} * a * b = a^{-1} * 0 \implies b = 0$$

Definizione 22 (Operazioni su $\mathbb{C}$)**.** Sia $\mathbb{C} = \{a + \iota b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ dove ι è una radice di $x^2 + 1$. Si consideri $\mathbb{C}$ con le seguenti operazioni: siano $a + \iota b, c + \iota d \in \mathbb{C}$ due generici elementi. Allora:

- $(a + \iota b) + (c + \iota d) \stackrel{def.}{=} (a + c) + \iota(b + d)$.
- $(a + \iota b) \cdot (c + \iota d) \stackrel{def.}{=} (a \cdot c - b \cdot d) + \iota(a \cdot d + b \cdot c)$.

Esercizio 5. Verificare che $\mathbb{C}$ con le operazioni sopra definite è campo.
Un consiglio: se $a + \iota b \neq 0$ allora:

$$(a + \iota b)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \iota \frac{b}{a^2 + b^2}$$

L'anello dei polinomi

Definizione 23 (Polinomio)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$; si dice polinomio nell'indeterminata x a coefficienti in $\mathbb{K}$ una scrittura formale del tipo:

$$p(x) = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Si denota inoltre con $\mathbb{K}[x] = \{$polinomi nell'indeterminata x a coefficienti in $\mathbb{K}\}$.

Definizione 24 (Grado del polinomio)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{K}[x]$$

Si definisce grado del polinomio e si scrive *deg* $p(x)$, il numero $n \in \mathbb{N}$ tale che $n = \max\{h \in \mathbb{N} \mid a_h \neq 0\}$.

Definizione 25 (Radice di un polinomio)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e $p(x) \in \mathbb{K}[x]$. $a \in \mathbb{K}$ si dice radice di $p(x)$ se $p(a) = 0$.

Definizione 26 (Operazioni sui polinomi)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo e $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, polinomi in $\mathbb{K}[x]$. Innanzitutto si dice che

$$p(x) = q(x) \iff \forall i_1^n \ a_i = b_i$$

Inoltre:

- $(p+q)(x) \stackrel{def.}{=} \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$.
- $(p \cdot q)(x) \stackrel{def.}{=} \sum_{i=0}^{2n} c_i x^i$ dove $\forall i_1^{2n},\ c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j \cdot b_{i-j}$.

Esercizio 6. Con le operazioni sopra definite, $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ è un anello commutativo, ma non un campo.

Teorema 1 (Divisione euclidea)**.** *Sia $\mathbb{K}$ campo e siano $a(x), b(x) \in \mathbb{K}[x]$ con $b(x) \neq 0_{\mathbb{K}[x]}$. Allora $\exists!\ q(x), r(x) \in \mathbb{K}[x]$ tali che:*

- *$a(x) = b(x)q(x) + r(x)$.*
- *$deg\ r(x) < deg\ b(x)$.*

Se $r(x) = 0$ si dice che $b(x)$ divide $a(x)$ e si scrive $b(x) \mid a(x)$.

Teorema 2 (Ruffini)**.** *Sia $\mathbb{K}$ campo, $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ e $a \in \mathbb{K}$.*

$$p(a) = 0 \implies (x - a) \mid p(x)$$

Definizione 27 (Molteplicità algebrica)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ e a una radice di $p(x)$. Si dice molteplicità algebrica di a il massimo numero naturale m per il quale $(x - a)^m \mid p(x)$.

Teorema 3 (Fondamentale dell'algebra)**.** *Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora $p(x)$ ha almeno una radice in $\mathbb{C}$.*

Corollario 1. *Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora $p(x)$ ha esattamente n radici in $\mathbb{C}$.*

Un concetto fondamentale: spazi vettoriali

Definizione 28 (Spazio vettoriale)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo e $V \neq \varnothing$ un insieme sul quale sia definita un'operazione $V \times V \stackrel{+}{\longrightarrow} V$; sia inoltre definita un'applicazione (detta prodotto per scalari, che NON è una operazione) $\mathbb{K} \times V \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} V$. Un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale è una quaterna del tipo $(V, +, \cdot, \mathbb{K})$ con le seguenti proprietà:

1) $(V, +)$ gruppo abeliano.
2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V,\ (\alpha\beta) \cdot \underline{v} = \alpha(\beta \cdot \underline{v})$.
3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V,\ (\alpha + \beta) \cdot \underline{v} = \alpha \cdot \underline{v} + \beta \cdot \underline{v}$.

4) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \underline{v}, \underline{w} \in V,\ \alpha \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \alpha \cdot \underline{v} + \alpha \cdot \underline{w}$.

5) $\forall \underline{v} \in V,\ (1) \cdot \underline{v} = \underline{v}$.

Ogni elemento di uno spazio vettoriale si dice vettore.

Esempio 5. Sia $\mathbb{K}$ campo. Abbiamo già incontrato

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i_1^n,\ x_i \in \mathbb{K}\}$$

Definiamo ora $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{+} \mathbb{K}^n$ e $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}^n$:

- $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \overset{def.}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$.
- $\alpha \cdot (x_1, \ldots, x_n) \overset{def.}{=} (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$.

Si verifica facilmente che $(\mathbb{K}^n, +, \cdot, \mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale.

Proposizione 7 (Prime caratteristiche)**.** *Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Allora:*

a) $\exists!\ \underline{0}_V \in V$.

b) $\forall \underline{v} \in V,\ \exists! -\underline{v} \in V$.

c) $\forall \underline{v} \in V,\ 0_{\mathbb{K}} \cdot \underline{v} = \underline{0}_V$.

d) $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \cdot \underline{0}_V = \underline{0}_V$.

e) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V,\ \alpha \underline{v} = \underline{0}_V \implies \alpha = 0_{\mathbb{K}} \vee \underline{v} = \underline{0}_V$.

f) $\forall \underline{v} \in V,\ (-1) \cdot \underline{v} = -\underline{v}$.

Dimostrazione. Le proposizioni seguono o dal fatto che $(V, +)$ è gruppo abeliano o da dimostrazioni estremamente simili a quelle fatte per dimostrare le proposizioni equivalenti nei gruppi. Vediamone quindi solo una per esempio:

e) $\alpha \neq 0 \implies \exists \alpha^{-1} \in \mathbb{K} \implies \underline{0}_V = \alpha^{-1}\underline{0}_V = \alpha^{-1}\alpha \cdot \underline{v} = 1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$.

3.2 Esercitazione

Esempio 6. Sia $A = \{$studenti in quest'aula$\}$. Una relazione di equivalenza $\mathscr{R}$ potrebbe essere $a \sim b \iff a, b$ hanno gli occhi dello stesso colore. Osserviamo che questa relazione soddisfa le richieste per essere una relazione di equivalenza:

- $\forall a \in A,\ a \sim a$: infatti ciascuno ha gli occhi del suo stesso colore.
- $\forall a, b \in A,\ a \sim b \iff b \sim a$: a ha gli occhi del colore di b solamente se b ha gli occhi del colore di a.
- $\forall a, b, c \in A,\ a \sim b \wedge b \sim c \implies a \sim c$.

Sia

- $\Gamma = \{$studenti con gli occhi azzurri$\}$.
- $\Delta = \{$studenti con gli occhi neri$\}$.

- $\Theta = \{\text{studenti con gli occhi marroni}\}$.

Osserviamo l'insieme quoziente:

$$A/_{\mathscr{R}} = \{[a] \mid a \in A\} = \{\Gamma, \Delta, \Theta, \dots\}$$

Osserviamo anche la proiezione al quoziente in questo insieme: abbiamo definito

$$A \xrightarrow{\pi} A/_{\mathscr{R}} \text{ con la legge } \forall a \in A,\ \pi(a) = [a]$$

Quindi per esempio avremo $\pi(Gigi) = \Theta$ se *Gigi* ha gli occhi marroni e così via.

Esempio 7. Sia $\mathscr{R}$ una relazione definita su $\mathbb{R}$ da:

$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Z}$$

Verifichiamo che si tratta di una relazione di equivalenza:

- $\forall a \in \mathbb{R},\ a - a = 0 \in \mathbb{Z}$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R},\ a - b \in \mathbb{Z} \iff b - a = -(a - b) \in \mathbb{Z}$.
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R},\ a - b = m \in \mathbb{R} \wedge b - c = n \in \mathbb{R} \implies a - c = (a - b) + (b - c) = m + n \in \mathbb{Z}$.

Osserviamo ora una classe di equivalenza:

$$\left[\frac{1}{2}\right] = \left\{a \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \sim \frac{1}{2}\right\} = \left\{a \in \mathbb{R} \,\middle|\, a = \frac{1}{2} + n : n \in \mathbb{Z}\right\}$$

Osserviamo ora che $\mathbb{R}/_{\mathscr{R}} \cong [0, 1)$; infatti ogni numero tra 0 e 1, ha una sua classe di equivalenza; inoltre ogni numero in $\mathbb{R}$ ha un suo rappresentante compreso tra 0 e 1. Osserviamo anche che $[0] = [1] = \mathbb{Z}$.

Esercizio 7. Osserviamo l'applicazione: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}$ con la legge $\phi(a, b) = a + \iota b$. Questa applicazione è bigettiva e inoltre ci fornisce uno strumento per rappresentare i numeri complessi come punti di un piano. Immaginiamoci infatti un piano tagliato da due rette perpendicolari (asse delle x e asse delle y). Ora il numero complesso $z = a + \iota b$ può è essere rappresentato come il punto del piano di coordinate (a, b). Da questo si può vedere che l'asse delle x rappresenta i numeri reali, mentre nell'asse delle y vi sono i numeri immaginari puri.
Indichiamo con $|z|$ la distanza tra z e l'origine $(0 + \iota 0)$. Quindi

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Abbiamo definito un'altra applicazione: $\mathbb{C} \xrightarrow{|\ |} \mathbb{R}^+$.
Si noti anche che, dati $z_1 = a + \iota b, z_2 = c + \iota d \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |(ac - bd) + \iota(ad + bc)| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} \\ &= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2} = \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{c^2 + d^2} \\ &= |z_1|\,|z_2| \end{aligned}$$

Vi è un'ultima applicazione interessante $\mathbb{C} \xrightarrow{\bar{}} \mathbb{C}$; definita dalla legge

$$\overline{z} = \overline{a + \iota b} = a - \iota b$$

che associa ad ogni numero il simmetrico rispetto all'asse delle x. Per questo abbiamo che, $\forall z \in \mathbb{R},\ \overline{z} = z$.

Esercizio 8. Dimostrare le seguenti proprietà:

- $\forall z \in \mathbb{C}, |\overline{z}| = |z|$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.
- $z \cdot \overline{z} = (a + \iota b) \cdot (a - \iota b) = a^2 + b^2 = |z|^2 \in \mathbb{R}$.

Lezione 4

Spazi vettoriali, primi esempi

4.1 Teoria

Definizione 29 (Sottocampo)**.** Sia $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ campo e $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{K}$. Se $\mathbb{K}'$ è chiuso rispetto alle operazioni di campo; cioè se sono operazioni:

$$\mathbb{K}' \times \mathbb{K}' \xrightarrow{+|_{\mathbb{K}' \times \mathbb{K}'}} \mathbb{K}', \quad \mathbb{K}' \times \mathbb{K}' \xrightarrow{\cdot|_{\mathbb{K}' \times \mathbb{K}'}} \mathbb{K}'$$

allora $\mathbb{K}'$ si dice sottocampo di $\mathbb{K}$.

Osservazione 6. Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e sia $\mathbb{K}' \subseteq \mathbb{K}$ un sottocampo; allora in particolare V è un $\mathbb{K}'$ spazio vettoriale ma

$$(V, +, \cdot, \mathbb{K}) \neq (V, +, \cdot, \mathbb{K}')$$

Esempio 8. Sia π un piano e $O \in \pi$ un punto del piano. Un vettore applicato in O è un vettore che ha come punto di partenza O e come punto di arrivo un qualsiasi punto $P \in \pi$. Sia quindi

$$V_O^2 = \{OP \mid P \in \pi\}$$

Visto che il primo punto è fissato, l'applicazione $\pi \xrightarrow{f} V_O^2$ che associa ad ogni punto $P \in \pi$ il vettore OP è un'applicazione bigettiva.
Definiamo ora un'operazione interna a V_O^2; diciamo che dati $OA, OB \in V_O^2, OA+OB$ è calcolato con la regola del parallelogramma. Inoltre dato $n \in \mathbb{R},\ n \cdot OA$ è il segmento avente direzione e verso uguali a quelli di OA e modulo uguale a $n \cdot$ modulo di OA.
Si può vedere facilmente che $\left(V_O^2, +, \cdot, \mathbb{R}\right)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.
Osserviamo inoltre che se venissero fissate nel piano due rette perpendicolari e su di esse venisse fissata un'unità di misura, avrei un'ulteriore applicazione bigettiva che mi associ ad ogni punto del piano una coppia ordinata $(a, b) \in \mathbb{R}^2$; come abbiamo visto durante la scorsa esercitazione. Quindi abbiamo tre strutture che si corrispondono: i punti del piano, i vettori di un piano e le coppie ordinate (a, b).

Primi spazi vettoriali

Esercizio 9. Verificare che le seguenti strutture, con le operazioni definite, sono spazi vettoriali.

1) Sia $\mathbb{K}$ un campo; allora $\mathbb{K}[x]$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con l'operazione di somma già definita e il prodotto per scalari $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[x] \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \mathbb{K}[x]$ con la legge:

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{K}[x], \alpha \cdot p(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i x^i$$

2) Sia A un insieme e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Sia

$$W = \mathcal{F}(A, V) = \left\{ A \stackrel{f}{\longrightarrow} V \right\}$$

Verificare che W è uno spazio vettoriale con:

- $W \times W \stackrel{+}{\longrightarrow} W \mid \forall f, g \in W, \forall x \in A, (f+g)(x) \stackrel{def.}{=} f(x) + g(x)$.
- $\mathbb{K} \times W \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} W \mid \forall f \in W, \forall \alpha \in \mathbb{K}, (\alpha f)(x) \stackrel{def.}{=} \alpha \cdot f(x)$.

Definizione 30 (Matrice)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo. Una matrice $p \times q$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è una tabella di elementi di $\mathbb{K}$ disposti su p righe e q colonne.

$$\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K}) = \{\text{matrici } p \times q \text{ a coefficienti in } \mathbb{K}\}$$
$$\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \{\text{matrici } n \times n \text{ a coefficienti in } \mathbb{K}\}$$

(A volte si sottintende il campo nel quale si trovano i coefficienti).

Esempio 9. Sia $M \in \mathcal{M}(2, 3, \mathbb{R})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vi sono alcune notazioni particolari:

- Si indica con $[M]_i^j$ l'elemento della matrice M situato nella i-esima riga e nella j-esima colonna.
- Si scrive M_i per indicare la i-esima riga.
- Si scrive M^j per indicare la j-esima colonna.
- Si indica con 0 la matrice nulla, contenente tutti 0.

Definizione 31 (Operazioni sulle matrici)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e $A, B \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$:

$$A = B \iff \forall i_1^p, j_1^q, [A]_i^j = [B]_i^j$$

Inoltre $\forall A, B \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

- $[A+B]_i^j \stackrel{def.}{=} [A]_i^j + [B]_i^j$.
- $[\alpha A]_i^j \stackrel{def.}{=} \alpha [A]_i^j$.

Esercizio 10. Verificare che $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con le operazioni appena definite.

4.2 Esercitazione

Esempio 10. Sia $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ un insieme con la seguente somma e prodotto:

- $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \xrightarrow{+} \mathbb{F}_2 \mid 0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1 + 0 = 1,\ 1 + 1 = 0.$
- $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \xrightarrow{\cdot} \mathbb{F}_2 \mid 0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0,\ 1 \cdot 1 = 1.$

Vediamo che $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ è un campo; il campo con il minor numero possibile di elementi.

Esercizio 11. Sia $p \in \mathbb{Z}^+$; costruiamo la relazione di equivalenza $\mathscr{R}$ con la legge:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a \sim b \iff \exists m \in \mathbb{Z} \mid a - b = mp$$

Dimostrare che si tratta di una relazione di equivalenza.
Analizziamo ora

$$\mathbb{Z}/_{\mathscr{R}} = \{[0], [1], \dots, [p-1]\}$$

(che viene scritto di solito $\mathbb{Z}_p$) e i suoi elementi: $[0] = \{0, \pm p, \pm 2p, \dots\}$.
Su di essi possiamo definire delle operazioni:

- $\mathbb{Z}/_{\mathscr{R}} \times \mathbb{Z}/_{\mathscr{R}} \xrightarrow{+} \mathbb{Z}/_{\mathscr{R}} \Big| [a] + [b] = [a + b].$
- $\mathbb{Z}/_{\mathscr{R}} \times \mathbb{Z}/_{\mathscr{R}} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{Z}/_{\mathscr{R}} \Big| [a] \cdot [b] = [a \cdot b].$

Verificare che:

a) Le operazioni sono ben definite.

b) $\forall p \in \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p$ è un anello commutativo.

c) $\mathbb{Z}_p$ è campo $\iff$ p è primo.

Osservazione 7 (Alcune note sui polinomi). Sia $\mathbb{K}$ campo;

a) Un polinomio $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ è unicamente una scrittura formale; è vero che, prendendo $\alpha \in \mathbb{K}$, possiamo valutare il polinomio in α e ottenere un'applicazione, ma le due cose non vanno confuse: il polinomio non è un'applicazione anche se può indurne una.

b) Gli elementi neutri di $\mathbb{K}[x]$ sono:

- $e^+ = 0 = \sum_{i=0}^{n} 0x^i$
- $e^{\cdot} = 1 = 1 + \sum_{i=1}^{n} 0x^i$

c)
$$\forall p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x],\ deg\ pq(x) = deg\ p(x) + deg\ q(x)$$

d) Dall'osservazione precedente si deduce che $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ invertibile $\iff$ $p(x) \in \mathbb{K}$; cioè possiamo dire:

$$\exists p(x)^{-1} \in \mathbb{K}[x] \mid p(x)p(x)^{-1} = 1 \iff deg\ p(x) = 0$$

Proposizione 8. *Sia $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.*

$$p(\alpha) = 0 \implies p(\overline{\alpha}) = 0$$

Dimostrazione.

$$p(\overline{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\alpha}^i \overset{a_i \in \mathbb{R}}{=} \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i \alpha}^i = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0$$

Proposizione 9. *Dunque se α è radice è radice anche $\overline{\alpha}$. Ma continua a valere il teorema di Ruffini; quindi se α è radice di $p(x)$ allora*

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-\alpha)(x-\overline{\alpha})s(x) = (x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha})s(x) \\ &= (x^2 + (2\mathfrak{Re}\ \alpha)x + |\alpha|^2)s(x) \ \text{con}\ 2\mathfrak{Re}\ \alpha, |\alpha|^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Riflettiamo quindi su un generico polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ di grado n. Questo avrà esattamente n radici in $\mathbb{C}$ per il teorema fondamentale dell'algebra; queste si presenteranno a coppie: $\alpha, \overline{\alpha}$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$ allora α può presentarsi da sola, ma in questo caso il nostro polinomio è riducibile, per Ruffini. Se invece il polinomio non ha radici in $\mathbb{R}$, allora le ha in $\mathbb{C}$ e può essere fattorizzato come $p(x) = (x^2 + (2\mathfrak{Re}\ \alpha)x + |\alpha|^2)s(x)$ perché, come abbiamo visto, $2\mathfrak{Re}\ \alpha, |\alpha|^2 \in \mathbb{R}$. Quindi in $\mathbb{R}[x]$ gli unici polinomi irriducibili sono:

- *I polinomi di primo grado.*
- *I polinomi di secondo grado con radici in $\mathbb{C} - \mathbb{R}$.*

Lezione 5

Sottospazi vettoriali e combinazioni lineari

5.1 Teoria

Matrici particolari e sottospazi vettoriali

Osservazione 8. Sia $\mathbb{K}$ campo, l'applicazione $\mathbb{K}^n \xrightarrow{f} \mathcal{M}(n, 1, \mathbb{K})$, con la legge $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ è chiaramente bigettiva.
Quindi scriveremo indifferentemente un vettore di $\mathbb{K}^n$ come una n-upla o come colonna.

Definizione 32 (Matrici quadrate particolari)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. Allora A si dice:

- Diagonale: se $\forall i_1^n, j_1^n, i \neq j \implies [A]_i^j = 0$. Cioè se tutti gli elementi che non stanno sulla diagonale sono nulli.
- Simmetrica: se $\forall i_1^n, j_1^n, [A]_i^j = [A]_j^i$.
- Antisimmetrica: se $\forall i_1^n, j_1^n, [A]_i^j = -[A]_i^j$.
- Triangolare superiore: $\forall i_1^n, j_1^n,\ i > j \implies [A]_i^j = 0$.

Queste definizioni inducono la definizione dei seguenti insiemi:

- $\mathcal{D}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \mid A \text{ è diagonale}\}$.
- $\mathcal{S}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \mid A \text{ è simmetrica}\}$.
- $\mathcal{A}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \mid A \text{ è antisimmetrica}\}$.
- $\mathcal{T}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \mid A \text{ è triangolare superiore}\}$.

Osservazione 9. In generale è impossibile per una matrice non nulla essere contemporaneamente simmetrica e antisimmetrica: infatti, se la matrice è antisimmetrica allora

$$\forall i_1^n\ [A]_i^i = -[A]_i^i \implies 2\,[A]_i^i = 0$$

Quindi o siamo in $\mathbb{Z}_2$ (e quindi abbiamo che $2 \cdot 1 = 0$) oppure la diagonale deve essere nulla. Inoltre la stessa cosa vale per tutti gli altri elementi per la stessa ragione: devono essere uguali e opposti all'elemento simmetrico rispetto alla diagonale.

Definizione 33 (Caratteristica di un campo)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot 1 \overset{def.}{=} \overbrace{1 + 1 + \ldots + 1}^{n \text{ volte}}$$

Se $\forall n \in \mathbb{N}, n \cdot 1 \neq 0$ allora si dice che $\mathbb{K}$ ha caratteristica zero (char $\mathbb{K} = 0$). Altrimenti char $\mathbb{K} = min\, \{n \in \mathbb{N} \mid n \cdot 1 = 0\}$.

Esercizio 12. Sia $\mathbb{K}$ campo e U, V dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Dimostrare che $U \times V$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con la seguente somma e prodotto per scalari:

- $\forall (\underline{u}_1, \underline{v}_1), (\underline{u}_2, \underline{v}_2) \in U \times V,\ (\underline{u}_1, \underline{v}_1) + (\underline{u}_2, \underline{v}_2) = (\underline{u}_1 + \underline{u}_2, \underline{v}_1 + \underline{v}_2)$
- $\forall (\underline{u}_1, \underline{v}_1) \in U \times V, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \cdot (\underline{u}_1, \underline{v}_1) = (\alpha \underline{u}_1, \alpha \underline{v}_1)$

Definizione 34 (Sottospazi vettoriali)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $W \subseteq V$. Allora W si dice sottospazio vettoriale se:

a) $\underline{0}_V \in W$. $\underline{0}_V$ esiste poiché V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

b) $\forall \underline{x}, \underline{y} \in W$, $\underline{x + y} \in W$. La somma è quella definita in V.

c) $\forall \underline{x} \in W, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot \underline{x} \in W$.

Esercizio 13. Sia $\mathbb{K}$ campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Verificare che quelli riportati di seguito sono sottospazi vettoriali.

a) $\{\underline{0}_V\}$ e V.

b) $\mathcal{D}(n, \mathbb{K}), \mathcal{S}(n, \mathbb{K}), \mathcal{A}(n, \mathbb{K}), \mathcal{T}(n, \mathbb{K})$.

c) $\forall m \in \mathbb{N},\ \mathbb{K}_m\,[x] = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid deg\ p(x) \leq m\}$.

d) Le rette $r \in \mathbb{R}^2$ passanti per l'origine in $\mathbb{R}^2$.

e) Le rette e i piani passanti per l'origine in $\mathbb{R}^3$.

f) Se $\{W_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di sottospazi vettoriali di V, allora

$$\bigcap_{i \in I} W_i$$

è sottospazio vettoriale di V.

g) $\mathbb{R}$ è un $\mathbb{R}$-sottospazio vettoriale, ma non un $\mathbb{C}$-sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Verifichiamo alcuni dei punti dell'esercizio precedente; per ogni sottospazio vettoriale dobbiamo verificare le tre condizioni della definizione.

a)
- $\underline{0}_V \in \{\underline{0}_V\} \wedge \underline{0}_V \in V$.
- $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \{\underline{0}_V\}, \underline{x + y} \in \{\underline{0}_V\}$. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V, \underline{x + y} \in V$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \underline{x} \in \{\underline{0}_V\}, \alpha \cdot x \in \{\underline{0}_V\}$. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \underline{x} \in V, \alpha \cdot \underline{x} \in V$.

b) Solo con $\mathcal{D}(n,\mathbb{K})$.

- $0_{\mathcal{M}(n)} \in \mathcal{D}(n,\mathbb{K})$.
- $\forall A, B \in \mathcal{D}(n,\mathbb{K}), A + B \in \mathcal{D}(n,\mathbb{K})$.
- $\forall A \in \mathcal{D}(n,\mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha A \in \mathcal{D}(n,\mathbb{K})$.

d)
- $0_{\mathbb{R}^2} \in r$.
- $\forall OP, OQ \in r$ la loro somma $OP + OQ$ è definita con la regola del parallelogramma. In questo caso, visto che i segmenti sono sulla stessa retta, si sommano semplicemente i moduli e la somma è il vettore con modulo uguale giacente sulla stessa retta. Quindi $OP + OQ \in r$
- Stessa cosa per il prodotto per scalari: viene moltiplicato il modulo ma il vettore continua ad appartenere alla retta.

f)
- $\forall i \in I, \underline{0}_V \in W_i \implies \underline{0}_V \in \bigcap_{i \in I} W_i$.
- $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \bigcap_{i\in I} W_i, \forall i \in I, \underline{x + y} \in W_i \implies \underline{x + y} \in \bigcap_{i \in I} W_i$.
- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \underline{x} \in \bigcap_{i\in I} W_i, \forall i \in I, \alpha\underline{x} \in W_i \implies \alpha\underline{x} \in \bigcap_{i\in I} W_i$.

Non ci sono molti altri modi per creare altri spazi vettoriali: sappiamo solamente sommare e moltiplicare; per questo cerchiamo di combinare insieme il concetto di somma e quello di prodotto

Combinazioni lineari e somma diretta

Definizione 35 (Combinazione lineare)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\} \subseteq V$ un insieme finito di vettori e $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} \subseteq \mathbb{K}$ un insieme finito di coefficienti.
Il vettore

$$v = \alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \underline{v}_n$$

si dice combinazione lineare dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ a coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Definizione 36 (*Span*)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $S \subseteq V$ un sottoinsieme non necessariamente sottospazio vettoriale.

$$Span(S) \overset{def.}{=} \left\{ \underline{v} \in V \,\middle|\, \exists_{\substack{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_m \in S \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}}} \text{ t.c. } v = \alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_m \cdot \underline{v}_m \right\}$$

I vettori di S sono detti generatori dello *Span*.

Proposizione 10. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $S \subseteq V$. Allora:*

a) $Span(S)$ è sottospazio vettoriale di V.

b) $S \subseteq Span(S)$.

c) Sia W un sottospazio vettoriale di V tale che $S \subseteq W \subseteq Span(S)$. Allora $W = Span(S)$; cioè $Span(S)$ è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente S.

d) Sia $\{W_i\}_{i\in I}$ la famiglia dei sottospazi vettoriali di V contenenti S. Allora

$$Span(S) = \bigcap_{i\in I} W_i$$

Dimostrazione. c) Basta mostrare che $Span(S) \subseteq W$. Poiché $S \subseteq W$ per ipotesi, e visto che W è uno spazio vettoriale ed è quindi chiuso per prodotto per scalari:

$$\forall \underline{v} \in S, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \cdot \underline{v} \in W$$

inoltre W è chiuso anche per somma quindi

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cdot \underline{v}_i \in W$$

d) $S \subseteq \bigcap_{i\in I} W_i$. Inoltre $\bigcap_{i\in I} W_i \subseteq Span(S)$ poiché $\exists i \in I \mid W_i = Span(S)$. Quindi tesi per c).

Osservazione 10. Sia $\mathbb{K}$ un campo e V, U dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Allora, in generale $U \cup V$ non è uno spazio vettoriale.

Proposizione 11. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e W, U dei suoi sottospazi vettoriali.*

$$U + W = \{\underline{v} \in V \mid \exists \underline{u} \in U, \exists \underline{w} \in W \ t.c. \ \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}\}$$

$U + W$ è un sottospazio vettoriale di V; è inoltre il più piccolo spazio vettoriale contenente U e W.

Dimostrazione. Verificare che si tratta di un sottospazio vettoriale.
Dimostriamo invece che è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente U e W, cioè che $\forall Z$ sottospazio vettoriale di V tale che $U \subseteq Z \supseteq W$, $U + W \subseteq Z$. Chiaramente $U \subseteq U + W \supseteq W$ poiché $\underline{0} \in W, \underline{0} \in U$. Inoltre se Z è sottospazio vettoriale e contiene U, W allora, $\forall \underline{u} \in U, \forall \underline{w} \in W, \underline{u} + \underline{w} \in Z$. Da questo si può affermare che $U + W \subseteq Z$.

Definizione 37 (Somma diretta (di due sottospazi vettoriali))**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e W, U dei suoi sottospazi vettoriali.
Se $U \cap W = \{\underline{0}_V\}$ allora $U + W$ si denota come $U \oplus W$ e viene chiamata somma diretta dei due sottospazi vettoriali.

Proposizione 12. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e W, U dei suoi sottospazi vettoriali tali che $U \cap W = \{\underline{0}_V\}$.*

$$\forall z \in U \oplus W \exists! \ u \in U, w \in W \ t.c. \ z = u + w$$

Cioè ogni vettore della somma diretta si scrive in modo unico come somma di vettori degli spazi vettoriali.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} z = \underline{u}_1 + \underline{w}_1 = \underline{u}_2 + \underline{w}_2 &\implies \underline{u}_1 - \underline{u}_2 = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \in U \cap W \\ \implies \underline{u}_1 - \underline{u}_2 = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 = \underline{0}_V &\implies \underline{u}_1 = \underline{u}_2, \underline{w}_1 = \underline{w}_2 \end{aligned}$$

Definizione 38 (Proiezione di $\underline{z} \in U \oplus W$)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e W, U dei suoi sottospazi vettoriali tali che $U \cap W = \{\underline{0}_V\}$ e $V = W \oplus U$. Sono allora ben definite le applicazioni:

- $V \xrightarrow{\pi_U} U$ tale che $\forall z = u + w \in V \pi_U(z) = u$.

- $V \xrightarrow{\pi_W} W$ tale che $\forall z = u + w \in V \pi_U(z) = w$.

Definizione 39 (Supplementare)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e U un sottospazio vettoriale di V. Si dice supplementare di U ogni sottospazio vettoriale W di V tale che $W \oplus U = V$.

Esercizio 14. Sia $\mathbb{K}$ un sottocampo di $\mathbb{C}$, provare che

$$\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) = \mathcal{S}(n, \mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}(n, \mathbb{K})$$

Dimostrazione. Abbiamo già detto che se un campo ha caratteristica diversa da 2 (come tutti i sottocampi di $\mathbb{C}$) allora $\mathcal{S}(n, \mathbb{K}) \cap \mathcal{A}(n, \mathbb{K}) = \left\{0_{\mathcal{M}(n)}\right\}$. Quindi c'è somma diretta tra i due sottospazi. Ci resta da dimostrare che

$$\forall M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \exists S_M \in \mathcal{S}(n, \mathbb{K}), A_M \in \mathcal{A}(n, \mathbb{K}) \text{ t.c. } M = S_M + A_M$$

Data la matrice M costruiamoci le altre due.
Notiamo innanzitutto che $\forall i_1^n \, [A_M]_i^i = 0 \implies \forall i_1^n \, [S_M]_i^i = [M]_i^i$.
Proviamo a vedere se funzionano:

$$[S_M]_i^j = [S_M]_j^i = \frac{[M]_i^j + [M]_j^i}{2}$$

inoltre

$$[A_M]_i^j = -\,[A_M]_j^i = [S_M]_i^j - [M]_i^j$$

Controlliamo che tornino i conti:

$$\begin{aligned}
[S_M]_i^j + [A_M]_i^j &= \frac{[M]_i^j + [M]_j^i}{2} + [S_M]_i^j - [M]_i^j \\
&= \frac{[M]_i^j + [M]_j^i}{2} + \frac{[M]_i^j + [M]_j^i}{2} - [M]_i^j = [M]_i^j
\end{aligned}$$

Ora per l'ultima Proposizione possiamo affermare che queste matrici sono uniche.

5.2 Esercitazione

Riflessione 2. I campi sono le strutture migliori che ci possono capitare, ma sono abbastanza rari e quindi non sempre possiamo aspettarci di lavorare con insiemi così ricchi, per questo analizziamo gli spazi vettoriali, più comuni e comunque molto interessanti.
Dato ($\mathbb{K}$ campo), V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $W \subseteq V$, si dice che W è un sottospazio vettoriale se W è uno spazio vettoriale con la stessa somma e lo stesso prodotto per scalari definiti su V.
Quindi cerchiamo sottoinsiemi di V sui quali continuino a funzionare le varie applicazioni che abbiamo su V (se per esempio la struttura fosse chiusa solamente rispetto al prodotto per scalari allora avremmo un cono, non uno spazio vettoriale, come due rette distinte passanti per l'origine in $\mathbb{R}^2$), in modo da poter ricondurre i problemi che dobbiamo risolvere a spazi più piccoli.

Osservazione 11. Pensiamo ai possibili spazi vettoriali W in $\mathbb{R}^2$. Possiamo avere:

- $\{O_{\mathbb{R}^2}\}$.
- Se W contiene un altro punto $P \neq O$ allora $Span(OP) \subseteq W$; quindi W contiene almeno la retta r passante per l'origine e P (e questa retta è uno spazio vettoriale).
- Se W contiene anche un altro punto $Q \notin r$, allora

$$\begin{aligned} Span(OQ) \subseteq W \supseteq Span(OP) &\implies \mathbb{R}^2 = Span(OP) \oplus Span(OQ) \subseteq W \\ &\implies W = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Esempio 11. Sia $\mathbb{K}$ campo e $V = \mathbb{K}[x]$.

- $W_1 = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid deg\ p(x) = 3\}$ non è ssv. di V: $0_V \notin W_1$.
- $W_2 = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid deg\ p(x) = 3\} \cup \{0_V\}$ non è ssv. di V: $(x^3 + (-x^3 + x^2)) \notin W_2$, quindi non è chiuso per somma; ma è chiuso per prodotto per scalari. È quindi un cono.
- $W_3 = \{p(x) \in \mathbb{K}[x] \mid deg\ p(x) \leq 3\}$ è sottospazio vettoriale di V e si indica con $\mathbb{K}_3[x]$.

Esempio 12. Consideriamo $V = \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$.

- $U_1 = \left\{A \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R}) \mid [A]_1^1 = 1\right\}$ non è sottospazio vettoriale: $0_V \notin U_1$.
- $U_2 = \left\{A \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R}) \mid [A]_1^1 = 0\right\}$ è sottospazio vettoriale di V. Infatti:
  - $0_V \in U_2$.
  - $\forall A, B \in U_2,\ A + B \in U_2$.
  - $\forall A \in U_2, \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \cdot A \in U_2$.
- $U_3 = \left\{A \in \mathcal{M}(3, \mathbb{R}) \mid [A]_1^1 + [A]_2^2 = 0\right\}$ è sottospazio vettoriale di V; infatti 0_V appartiene,

$$[A]_1^1 + [A]_2^2 = 0 \wedge [B]_1^1 + [B]_2^2 = 0 \Rightarrow [A + B]_1^1 + [A + B]_2^2 = 0$$

  inoltre moltiplicando per scalari il numero 0 questo non cambia.

Lezione 6

Applicazioni indotte da matrici

6.1 Teoria

Applicazioni lineari

Definizione 40 (Applicazione lineare)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e $V \xrightarrow{f} W$ applicazione. f è detta lineare se:

1) $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V,\ f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2)$.

2) $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v \in V,\ f(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot f(v)$.

Osservazione 12. Se un'applicazione f è lineare allora:

$$f(0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0$$

Esercizio 15. Sia $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Verificare la linearità delle seguenti applicazioni.

a) $V \xrightarrow{0} W$ tale che $\forall \underline{v} \in V,\ 0(\underline{v}) = \underline{0}$.

b) $V \xrightarrow{Id_V} V$ tale che $\forall \underline{v} \in V,\ Id_V(\underline{v}) = \underline{v}$.

c) Trasposta: $\mathcal{M}(p, q, \mathbb{K}) \xrightarrow{\tau} \mathcal{M}(q, p, \mathbb{K})$ con la legge:

$$\forall A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K}),\ \left[{}^{\tau}(A)\right]_i^j \overset{def.}{=} [A]_j^i$$

d) Traccia: $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{tr} \mathbb{K}$ tale che:

$$\forall A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}),\ tr\,(A) \overset{def.}{=} \sum_{i=1}^{n} [A]_i^i$$

e) Valutazione: fissato $\alpha \in \mathbb{K}$, si dice valutazione l'applicazione $\mathbb{K}\,[x] \xrightarrow{f} \mathbb{K}$ con la legge:

$$\forall p(x) \in \mathbb{K}\,[x]\,,\ f(p(x)) = p(\alpha)$$

f) Coniugio: $\mathbb{C} \xrightarrow{\bar{\ }} \mathbb{C}$ tale che:

$$\forall z = a + \iota b \in \mathbb{C},\ \overline{z} = a - \iota b$$

Quest'ultima applicazione è $\mathbb{R}$-lineare ma non $\mathbb{C}$-lineare: se si vede $\mathbb{C}$ come un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale allora non è lineare.

Dimostrazione. a) - $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$

$$0(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \underline{0} = \underline{0} + \underline{0} = 0(\underline{v}_1) + 0(\underline{v}_2)$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V$,

$$0(\alpha \underline{v}) = \underline{0} = \alpha \cdot \underline{0} = \alpha \cdot 0(\underline{v})$$

b) - $\forall \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$,

$$Id_V(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 = Id_V(\underline{v}_1) + Id_V(\underline{v}_2)$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall \underline{v} \in V$

$$Id_V(\alpha \underline{v}) = \alpha \cdot v = \alpha \cdot Id_V(\underline{v})$$

c) - $\forall A, B \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$,

$$[{}^{\tau}(A + B)]_i^j = [A + B]_j^i = [A]_j^i + [B]_j^i = [{}^{\tau}(A)]_i^j + [{}^{\tau}(B)]_i^j$$

- $\forall A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$[{}^{\tau}(\alpha \cdot A)]_i^j = [\alpha \cdot A]_j^i = \alpha\, [A]_j^i = \alpha\, [{}^{\tau}(A)]_i^j$$

d) - $\forall A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$

$$\begin{aligned} tr\,(A + B) &= \sum_{i=1}^{n} [A + B]_i^i = \sum_{i=1}^{n} [A]_i^i + [B]_i^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} [A]_i^i + \sum_{i=1}^{n} [B]_i^i = tr\,(A) + tr\,(B) \end{aligned}$$

- $\forall A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$tr\,(\alpha \cdot A) = \sum_{i=1}^{n} [\alpha \cdot A]_i^i = \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot [A]_i^i = \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} [A]_i^i = \alpha \cdot tr\,(A)$$

e) - $\forall p(x), q(x) \in \mathbb{K}\,[x]$

$$f(p(x) + q(x)) = p(\alpha) + q(\alpha) = f(p(x)) + f(q(x))$$

- $\forall p(x) \in \mathbb{K}\,[x]\,, \forall \gamma \in \mathbb{K}$,

$$f(\gamma \cdot p(x)) = \gamma \cdot p(\alpha) = \gamma \cdot f(p(x))$$

f) - $\forall z = a + \iota b, w = c + \iota d \in \mathbb{C}$,

$$\overline{z+w} = (a+c) - \iota(b+d) = a - \iota b + c - \iota d = \overline{z} + \overline{w}$$

Questa parte non presenta problemi: fino a qui $\mathbb{C}$ può essere inteso come $\mathbb{C}$ o come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale; poiché non è stato introdotto il prodotto per scalari.

- Per quanto riguarda questa seconda parte è necessario vedere $\mathbb{C}$ come un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Provare autonomamente a vedere cosa succede altrimenti.
$\forall z = a + \iota b \in \mathbb{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\alpha z} = \overline{\alpha a + \iota \alpha b} = \alpha a - \iota \alpha b = \alpha(a - \iota b) = \alpha \overline{z}$$

Nuovi aspetti delle matrici: prodotto righe per colonne

Definizione 41 (Prodotto righe per colonne)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(1, p, \mathbb{K}), B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(p, 1, \mathbb{K})$. Allora

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \overset{def.}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_p b_p$$

Definizione 42 (Prodotto matrice per colonna)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K}), X \in \mathcal{M}(q, 1, \mathbb{K})$.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \overset{def.}{=} \begin{pmatrix} A_1 \cdot X \\ A_2 \cdot X \\ \vdots \\ A_p \cdot X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1q}x_q \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2q}x_q \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pq}x_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{q} a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{q} a_{pi}x_i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$$

Osservazione 13. Proviamo a scrivere in un altro modo il prodotto appena definito:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} A_1 \cdot X \\ A_2 \cdot X \\ \vdots \\ A_p \cdot X \end{pmatrix} = \left(x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_q A^q \right) \in \mathbb{K}^p$$

Quindi data una matrice $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ essa associa, nel modo appena visto, ad ogni $X \in \mathbb{K}^q$ un vettore di $\mathbb{K}^p$. Potremmo quindi dire che una matrice induce

in modo naturale un'applicazione (lineare ?) $\mathbb{K}^q \xrightarrow{L_A} \mathbb{K}^p$.
È importante notare che i vettori di $Imm\,(L_A)$ sono le possibili combinazioni lineari delle colonne di A a coefficienti in $\mathbb{K}$: infatti l'applicazione associa ad ogni vettore di $\mathbb{K}^p$ un vettore che è combinazione lineare delle sue colonne, inoltre ogni vettore che può essere scritto come combinazione lineare delle colonne di A può essere facilmente ottenuto in questo modo. Quindi:

$$Imm\,(L_A) = Span\left(\left\{A^1, A^2, \ldots, A^q\right\}\right)$$

Le matrici come applicazioni

Definizione 43 (L_A e $\mathcal{C}_A$)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$. Si definisce l'applicazione $\mathbb{K}^q \xrightarrow{L_A} \mathbb{K}^p$ tale che $\forall X \in \mathcal{M}(q, 1, \mathbb{K})$,

$$L_A(X) = \begin{pmatrix} A_1 \cdot X \\ A_2 \cdot X \\ \ldots \\ A_p \cdot X \end{pmatrix} = \left(x_1 A^1 + x_2 A^2 + \ldots + x_q A^q\right) \in \mathbb{K}^p$$

Inoltre si definisce

$$\mathcal{C}_A = Imm\,(L_A) = Span\left(\left\{A^1, A^2, \ldots, A^q\right\}\right)$$

Proposizione 13. *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$. L'applicazione $\mathbb{K}^q \xrightarrow{L_A} \mathbb{K}^p$ sopra definita è lineare.*

Dimostrazione. 1) $\forall X, Y \in K^q$,

$$\begin{aligned} L_A(X+Y) &= \left((x_1 + y_1)A^1 + \ldots + (x_q + y_q)A^q\right) \\ &= \left(x_1 A^1 + \ldots + x_q A^q\right) + \left(y_1 A^1 + \ldots + y_q A^q\right) \\ &= L_A(X) + L_A(Y) \end{aligned}$$

2) $\forall X \in K^q, \forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} L_A(\alpha \cdot X) &= \left(\alpha x_1 A^1 + \ldots + \alpha x_q A^q\right) \\ &= \alpha\left(x_1 A^q + \ldots + x_q A^q\right) = \alpha \cdot L_A(X) \end{aligned}$$

Osservazione 14. Sia $\mathbb{K}$ campo. Posti $\mathbb{K}^q \ni e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ e in generale e_i la matrice colonna definita come $[e_i]_i = 1, [e_i]_j = 0$ se $j \neq i$; si ha, $\forall A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$,

$$L_A(e_1) = L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \left(1A^1 + 0A^2 + \ldots + 0A^q\right) = A^1$$

E questo vale in generale:

$$\forall i_1^q,\ L_A(e_i) = A^i$$

Teorema 4. *Sia $\mathbb{K}$ campo, ogni applicazione lineare da $\mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^q$ è indotta da una e una sola matrice. Ossia $\forall \mathbb{K}^p \xrightarrow{g} \mathbb{K}^q$ lineare,*

$$\exists! A \in \mathcal{M}(q, p, \mathbb{K})\ t.c.\ \forall X \in \mathbb{K}^p,\ g(X) = L_A(X) = A \cdot X$$

Dimostrazione. Sia $\forall \mathbb{K}^p \xrightarrow{g} \mathbb{K}^q$ un'applicazione data; vediamo quale potrebbe essere la matrice A candidata a indurre questa applicazione. Abbiamo detto che $\forall i_1^q,\ L_A(e_i) = A^i$, quindi per scoprire qual'è la i-esima colonna della matrice cercata potremmo provare con la colonna $g(e_i)$. Infatti se esiste una matrice che induce questa applicazione allora dovrà agire allo stesso modo di g su ogni vettore e in particolare dovrà agire come g sui vari e_i e visto che $A^i = L_A(e_i) = g(e_i)$ abbiamo un modo per trovare la nostra candidata. Quindi:

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} g(e_1) & \dots & g(e_q) \end{array} \right)$$

Verifichiamo che questa scelta sia corretta: questa è la nostra unica candidata (se non andasse bene questa dovremmo concludere che esiste un controesempio), ma non è detto che funzioni. $\forall X \in \mathbb{K}^q$,

$$L_A(X) = A \cdot X = \left(\begin{array}{c|c|c} g(e_1) & \dots & g(e_q) \end{array} \right) \cdot X = (x_1 g(e_1) + \dots + x_q g(e_q))$$

$$\overset{g \text{ lin}}{=} (g(x_1 e_1) + \dots + g(x_q e_q)) \overset{g \text{ lin}}{=} g\left(x_1 e_1 + \dots + x_q e_q\right) = g(X)$$

Esempio 13. Vediamo un esempio del teorema appenda dimostrato. Sia $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$ definita dalla legge: $g\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2x \\ x-y \\ x+4y \end{smallmatrix}\right)$. Cerchiamo la matrice A che induce questa applicazione:

$$A^1 = g(e_1) = g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = g(e_2) = g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$\mathcal{M}(3, 2, \mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Definizione 44 (Insieme degli omomorfismi)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.

$$Hom\,(V, W) = \left\{ V \xrightarrow{f} W \mid f \text{ lineare} \right\}$$

Hom sta per omomorfismo, sinonimo di applicazione lineare.

6.2 Esercitazione

Riflessione 3. Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $S \subseteq V$ un sottoinsieme finito di V.
Abbiamo definito $Span(S)$ lo spazio vettoriale dei vettori di V esprimibili come combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{K}$ di vettori contenuti in S.
Ipotizziamo $S = \{\underline{v}\}$ (quindi un insieme di un solo vettore), in questo caso ci sono due possibilità:

- $Span(S) = \{\underline{0}_V\} \iff \underline{v} = \underline{0}_V$.
- Se $\underline{v} \neq \underline{0}_V$ allora $Span(S) = \{\underline{z} \in V \mid \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \underline{z} = \lambda \underline{v}\}$.

In questo secondo caso vi è una bigezione $\mathbb{K} \xrightarrow{\pi} Span(S)$ con la legge:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \pi(\lambda) = \lambda \underline{v}$$

Si nota facilmente che questa applicazione è surgettiva per definizione di $Span(S)$, è inoltre anche iniettiva, infatti $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$,

$$\lambda_1 \underline{v} = \lambda_2 \underline{v} \implies \lambda_1 \underline{v} - \lambda_2 \underline{v} = \underline{0} \implies (\lambda_1 - \lambda_2)\underline{v} = \underline{0} \overset{\underline{v} \neq \underline{0}_V}{\implies} \lambda_1 = \lambda_2$$

Osservazione 15. Possiamo quindi intuire quello che succede se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $V = \mathbb{R}^2$. Abbiamo che $Span(\{O_V\})$ è semplicemente $\{O_V\}$, mentre se prendiamo un altro vettore OP nel piano, lo *Span* di quel vettore sarà la retta che passa per esso, quindi si intende generalmente con retta lo *Span* di un vettore non nullo; si intende inoltre con piano lo *Span* di due vettori, entrambi non nulli e ciascuno non appartenente allo *Span* dell'altro.

Esercizio 16. Sia $\mathbb{R}^3 \supseteq W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + 2y - z = 0 \right\}$. Dimostriamo che W è ssv. analizzandone gli elementi e vedendo che è *Span* di un insieme.

$$\begin{aligned}
\underline{v} \in W &\iff \exists x, y, z \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge z = x + 2y \\
&\iff \underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\iff \underline{v} \in Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Esercizio 17. Sia $\mathbb{R}^3 \supseteq V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + 2y - z = 0 \wedge x - y + z = 0 \right\}$. Come prima controlliamo che sia uno *Span* e cerchiamone i generatori.

$$\begin{aligned}
v \in V &\iff \exists x, y, z \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge (z = x + 2y) \wedge (x - y + z = 0) \\
&\iff (z = -3x) \wedge (y = -2x) \iff \underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ -3x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\iff \underline{v} \in Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Come prima abbiamo l'uguaglianza per i $\iff$.

Il verificare l'uguaglianza tra uno *Span* e uno spazio vettoriale può essere aiutato dalla seguente proposizione.

Proposizione 14. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V e $A \subseteq V$ un sottoinsieme finito di V. Allora*

$$Span(A) \subseteq W \iff A \subseteq W$$

Dimostrazione. '$\Rightarrow$' $A \subseteq Span(A) \wedge Span(A) \subseteq W \implies A \subseteq W$.

'$\Leftarrow$' $\forall \underline{v} \in Span(A), \exists n \in \mathbb{N}, \exists \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in A, \exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$\underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \ldots + a_n \underline{v}_n$$

Inoltre

$$A \subseteq W \wedge W \text{ ssv.} \implies \underline{v} = a_1 \underline{v}_1 + a_2 \underline{v}_2 + \ldots + a_n \underline{v}_n \in W$$

Osservazione 16. Questo è coerente con il fatto che $Span(A)$ è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente A.

Esercizio 18. Siano $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ con:

$$W_1 = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\2\end{smallmatrix}\right)\right\}\right) = Span\left(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\right)$$
$$W_2 = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\2\\-3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-1\\2\\-5\end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$$

Dimostreremo ora che $W_1 \subseteq W_2$; si lascia da dimostrare (è vero) che $W_2 \subseteq W_1$.

Dimostrazione. $W_1 \subseteq W_2 \iff \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\2\end{smallmatrix}\right) \in W_2$. Vediamo solo la prima appartenenza. $\underline{v}_1 \in W_2 \iff \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix} \iff \begin{cases}2\alpha + 0\beta - \gamma = 1\\ 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2\\ \alpha - 3\beta - 5\gamma = -1\end{cases}$$

Quindi il nostro vettore appartiene a W_2 se e solo se questo sistema ha soluzioni; in particolare questo sistema ne ha infinite (una variabile è indipendente) e quindi abbiamo, per esempio,

$$\left(\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right) = 0\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\1\end{smallmatrix}\right) + 2\left(\begin{smallmatrix}0\\2\\-3\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}-1\\2\\-5\end{smallmatrix}\right)$$

che ci mostra esplicitamente che $\underline{v}_1 \in W_2$.

Verificare inoltre che:

- $W_1 = W_2 \neq \mathbb{R}^3$.
- $W_1 = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\2\\-3\end{smallmatrix}\right)\right\}\right) = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\2\\-3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-1\\2\\-3\end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$

Esercizio 19. Sia $V = \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$,

$$W = Span\left(\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\right\}\right)$$

chiamiamo, per semplicità, le quattro matrici A_1, A_2, A_3, A_4. Vediamo se i generatori sono tutti necessari. Si vede abbastanza facilmente che $A_4 = A_2 - 2A_1$ e quindi è superfluo, si può omettere dai generatori (si sarebbero potuti togliere anche A_2 oppure A_1). Abbiamo quindi che

$$W = Span\left(\{A_1, A_2, A_3\}\right) = Span\left(\{A_4, A_2, A_3\}\right) = Span\left(\{A_1, A_4, A_3\}\right)$$

Dimostriamo che A_3 è necessario per generare W (dobbiamo dimostrare che non può essere espresso come combinazione lineare delle altre matrici). $\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}-1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix} &= \alpha_1\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix} + \alpha_4\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_1\\0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_2 & 2\alpha_2\\\alpha_2 & \alpha_2 - 5\gamma\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-\alpha_4 & 0\\\alpha_4 & \alpha_4\end{pmatrix}\\ &\iff \begin{cases}\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_4 = -1\\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 0 = 0\\ 0 + \alpha_2 + \alpha_4 = -1\\ 0 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0\end{cases} \quad \textit{assurdo}\end{aligned}$$

Esercizio 20. Siano

$$W = Span\left(\left\{x^3+2x+1, x^2-x-1, x\right\}\right) U = Span\left(\left\{x^2+1, x+1\right\}\right)$$

I generatori di questi spazi sono tutti necessario: si vede infatti che è impossibile ottenere x^3+2x+1 attraverso una combinazione lineare a coefficienti lineari di x^2-x-1 e x, vale lo stesso per il secondo sottospazio vettoriale.
Ci interessiamo a $U \cap W$, che sappiamo essere un sottospazio vettoriale; cerchiamo di esprimerlo indipendentemente da U e W. Sia $p(x)$ un generico polinomio appartenente a $W \cap U$. Allora $\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{aligned}
p(x) &= \alpha_1(x^3+2x+1) + \alpha_2(x^2-x-1) + \alpha_3(x) = \beta_1(x^2+1) + \beta_2(x+1) \\
&\implies x^3(\alpha_1) + x^2(\alpha_2) + x(2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3) + (\alpha_1 - \alpha_2) = \\
&= x^3(0) + x^2(\beta_1) + x(\beta_2) + (\beta_1 + \beta_2) \\
&\implies \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \beta_1 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \beta_1 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \\ \beta_2 = -2\beta_1 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} p(x) = \alpha_2(x^2-x-1) - \alpha_2(x) \\ p(x) = \beta_1(x^2+1) - 2\beta_1(x+1) \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} p(x) = \alpha_2(x^2-2x-1) \\ p(x) = \beta_1(x^2-2x-1) \end{cases} \implies p(x) \in Span\left(\left\{x^2-2x-1\right\}\right)
\end{aligned}$$

Esercizio 21. Siano $U, W \subseteq \mathbb{R}^4$,

$$U = Span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$$
$$W = Span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$$

Esaminiamo anche qui la loro intersezione; $\underline{v} \in U \cap W \implies \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\underline{v} = a\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \implies \begin{cases} a = c + d \\ a = -c \\ b = c - d \\ b = -c \end{cases} \implies \underline{v} = \underline{0}_{\mathbb{R}^4}$$

Quindi, visto che l'intersezione è solo $\underline{0}_{\mathbb{R}^4}$ possiamo cercare la somma diretta $U \oplus W$. Ci chiediamo se la somma diretta è tutto V, cioè se

$$\mathbb{R}^4 = Span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\right)$$

Una delle due inclusioni è ovvia; verifichiamo invece che $\mathbb{R}^4 \subseteq U \oplus W$, ci dobbiamo chiedere se $\forall \underline{v} \in \mathbb{R}^4, \underline{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ t.c.

$$\underline{v} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\implies \begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ y = \lambda_1 - \lambda_3 \\ z = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ t = \lambda_2 - \lambda_3 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda_1 = y + \lambda_3 = y - t + \lambda_2 \\ \lambda_3 = \lambda_2 - t \\ \lambda_4 = z + t - 2\lambda_2 \end{cases}$$

Inoltre si può trovare che $\lambda_2 = \dfrac{x - y + z + 3t}{4}$ ed è quindi ben determinato dal vettore che si cerca; e come si vede dal sistema gli altri λ_i sono interamente determinati da λ_2. Questo è coerente a quanto dimostrato: ogni vettore di una somma diretta può essere scritto in modo unico come somma di vettori appartenenti ai sottospazi della somma diretta.

Lezione 7

Endomorfismi e prodotto tra matrici

7.1 Teoria

Endomorfismi

Sia $\mathbb{K}$ campo, abbiamo visto che tutte le applicazioni lineari da $\mathbb{K}^q$ a $\mathbb{K}^p$ sono indotte da una matrice nella forma $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$.

Proposizione 15. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W, Z dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e $V \xrightarrow{f} W$, $W \xrightarrow{g} Z$ delle applicazioni lineari. Allora anche $V \xrightarrow{g\circ f} Z$ è un'applicazione lineare.*

Dimostrazione. - $\forall \underline{x}, \underline{y} \in V$,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(\underline{x}+\underline{y}) &= g(f(\underline{x}+\underline{y})) = g(f(\underline{x})+f(\underline{y})) = g(f(\underline{x}))+g(f(\underline{y}))\\ &= (g\circ f)(\underline{x})+(g\circ f)(\underline{y})\end{aligned}$$

- $\forall \underline{x} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K}$,

$$(g\circ f)(\alpha\underline{x}) = g(f(\alpha\underline{x})) = g(\alpha f(\underline{x})) = \alpha(g\circ f)(\underline{x})$$

Definizione 45 (Endomorfismo)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Si dice insieme degli endomorfismi:

$$End\,(V) = Hom\,(V,V)$$

Gli elementi di $End\,(V)$ si dicono endomorfismi.

Osservazione 17. La Proposizione 15 ci garantisce che la composizione è un'operazione di $End\,(V)$: comunque si compongano due endomorfismi, la loro composizione rimarrà un endomorfismo.

Proposizione 16. *Sia $\mathbb{K}$ campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale; $(End\,(V), +, \circ)$ è un anello. Ricordiamo che le operazioni sono:*

- $End\,(V) \times End\,(V) \xrightarrow{+} End\,(V)$ *con la legge:*

$$\forall f, g \in End\,(V)\,, \forall \underline{x} \in V,\ (f+g)(\underline{x}) = f(\underline{x}) + g(\underline{x})$$

- $End\,(V) \times End\,(V) \xrightarrow{\circ} End\,(V)$ *con la legge:*

$$\forall f, g \in End\,(V)\,, \forall \underline{x} \in V,\ (g \circ f)(\underline{x}) = g(f(\underline{x}))$$

Dimostrazione. Verifichiamo che $(End\,(V)\,, +, \circ)$ è un anello:

1) $(End\,(V)\,, +)$ è gruppo abeliano:

   - $\forall f, g, h \in End\,(V)\,, \forall \underline{x} \in V,$

   $$((f+g)+h)(\underline{x}) = (f+g)(\underline{x}) + h(\underline{x}) = f(\underline{x}) + g(\underline{x}) + h(\underline{x}) = (f+(g+h))(\underline{x})$$

   - $\forall f \in End\,(V)\,, \forall \underline{x} \in V,$

   $$(0_{End(V)} + f)(\underline{x}) = 0_{End(V)}(\underline{x}) + f(\underline{x}) = 0 + f(\underline{x}) = f(\underline{x})$$

   - $\forall f \in End\,(V)\, \exists - f \in End\,(V)$ t.c.

   $$\forall \underline{x} \in V (-f+f)(\underline{x}) = -f(\underline{x}) + f(\underline{x}) = 0$$

   - $\forall f, g \in End\,(V)\,, \forall \underline{x} \in V,$

   $$(f+g)(\underline{x}) = f(\underline{x}) + g(\underline{x}) = g(\underline{x}) + f(\underline{x}) = (g+f)(\underline{x})$$

2) $\forall f, g, h \in End\,(V)\,, \forall \underline{x} \in V,$

$$((f \circ g) \circ h)(\underline{x}) = (f \circ g(h(\underline{x})) = f(g(h(\underline{x}))) = f(g \circ h(\underline{x})) = (f \circ (g \circ h))(\underline{x})$$

3) $\exists Id_V \in End\,(V)$ t.c. $\forall f \in End\,(V)\,, \forall \underline{x} \in V,$

$$(f \circ Id_V)(\underline{x}) = (Id_V \circ f)(\underline{x}) = f(\underline{x})$$

4) $\forall f, g, h \in End\,(V)\,, \forall \underline{x} \in V,$

$$((f+g) \circ h)(\underline{x}) = (f+g)(h(\underline{x})) = f(h(\underline{x})) + g(h(\underline{x})) = (f \circ h)(\underline{x}) + (g \circ h)(\underline{x})$$

5) $\forall f, g, h \in End\,(V)\,, \forall \underline{x} \in V,$

$$(f \circ (g+h))(\underline{x}) = f((g+h)(\underline{x})) = f(g(\underline{x}) + h(\underline{x})) = (f \circ g)(\underline{x}) + (f \circ h)(\underline{x})$$

Osservazione 18. Abbiamo ora dimostrato che $(End\,(V)\,, +, \circ)$ è un anello. Possiamo notare inoltre che gli endomorfismi hanno alcune proprietà anche rispetto al prodotto scalare: $\forall a \in \mathbb{K}, \forall f, g \in \mathbb{K}, \forall \underline{x} \in V,$

$$((\alpha g) \circ f)(\underline{x}) = \alpha g(f(\underline{x})) = \alpha(g \circ f)(\underline{x}) = g(\alpha f(\underline{x})) = (g \circ (\alpha f))(\underline{x})$$

Definizione 46 (Isomorfismo)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Un'applicazione lineare $V \xrightarrow{f} W$ si dice isomorfismo se è bigettiva.
Due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V, W si dicono isomorfi se $\exists V \xrightarrow{f} W$ isomorfismo.

Osservazione 19. Sia $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Se $V \xrightarrow{f} W$ è un isomorfismo è allora ben definita anche $W \xrightarrow{f^{-1}} V$; anche f^{-1} è un isomorfismo. Abbiamo infatti:

- $\forall \underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W, \exists \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ t.c. $f(\underline{v}_1) = \underline{w}_1, f(v_2) = \underline{w}_2 \implies$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\underline{w}_1 + \underline{w}_2) &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) = v_1 + v_2 \\ &= f^{-1}(\underline{w}_1) + f^{-1}(\underline{w}_2) \end{aligned}$$

- $\forall \underline{w} \in W, \exists \underline{v} \in V$ t.c. $f(\underline{v}) = \underline{w} \implies$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K},\ f^{-1}(\alpha \underline{w}) = f^{-1}(\alpha f(\underline{v})) = f^{-1}(f(\alpha \underline{v})) = \alpha \underline{v} = \alpha f^{-1}(\underline{w})$$

Definizione 47 (Gruppo lineare generale)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Allora definiamo:

$$GL(V) = \left\{ V \xrightarrow{f} V \text{ t.c. } f \text{ è isomorfismo} \right\}$$

Osservazione 20. $(GL, \circ)$ è un gruppo, detto gruppo lineare generale. Dimostriamo velocemente che è un gruppo:

Dimostrazione.

- La proprietà associativa è stata dimostrata nella proposizione precedente in un caso più generale: $End(V)$.
- Id_V è chiaramente il neutro della composizione.
- $\forall f \in GL(V)$, f^{-1} è l'inversa rispetto alla composizione (e abbiamo dimostrato che, se f è isomorfismo, lo è anche f^{-1}); inoltre componendo f e f^{-1} si ottiene Id_V, per come abbiamo definito f^{-1}.

Riflessione 4. Sia $\mathbb{K}$ campo e A un insieme di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali. Allora su di A la relazione $\mathscr{R}$, che associa due spazi vettoriali solo se sono isomorfi, è una relazione di equivalenza. Infatti è:

- Riflessiva: chiaramente ciascuno spazio vettoriale V è isomorfo a se stesso tramite Id_V.
- Simmetrica: Abbiamo già detto che se $V \xrightarrow{f} W$ è isomorfismo allora lo è anche $W \xrightarrow{f^{-1}} V$.
- Transitiva: Se $V \xrightarrow{f} W, W \xrightarrow{g} Z$ sono isomorfismi allora lo è anche $V \xrightarrow{g \circ f} Z$.

Se abbiamo $V \in A$ e vogliamo trovare la classe di equivalenza di V stiamo cercando tutti i $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di A che sono isomorfi a V.

Ma cosa condividono due spazi isomorfi? Quando tutti gli oggetti di una certa classe di equivalenza hanno una caratteristica in comune questa viene detta invariante; lo studio degli invarianti è importante perché può essere utilizzato per caratterizzare una classe di equivalenza: se un elemento dell'insieme non ha l'invariante di quella classe certamente non vi appartiene; questo metodo

può evitare di controllare caratteristiche più complesse per scremare la lista dei possibili elementi di una classe.
Però in generale questo non è sufficiente a dire se un elemento appartiene a quella classe, anche se è sufficiente a dire che in quella classe non c'è. Ma potrebbe esistere una lista di invarianti sufficiente a dire che due elementi sono nella stessa classe. In questo caso si parla di un sistema completo di invarianti: un insieme di caratteristiche sufficienti per indicare che un elemento appartiene alla classe esaminata.
Tornando al nostro caso, per decidere se due spazi vettoriali sono isomorfi in teoria dovrei costruire un isomorfismo, cosa che può essere complessa, ma se riuscissimo a trovare un sistema completo di invarianti questo non sarebbe più necessario: avremmo la garanzia che due elementi appartengono a una data classe senza dover trovare esplicitamente l'isomorfismo.

Sottospazi vettoriali legati agli omomorfismi

Definizione 48 (Kernel)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e $V \xrightarrow{f} W$ un'applicazione lineare. Si dice Ker di f:

$$Ker\,(f) \overset{def.}{=} \{\underline{x} \in V \mid f(\underline{x}) = \underline{0}_W\}$$

Osservazione 21. Sia $\mathbb{K}$ campo e V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.

$$\forall V \xrightarrow{f} W,\ f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W \implies \forall V \xrightarrow{f} W,\ Ker\,(f) \neq \varnothing$$

inoltre $Ker\,(f) = V \iff f = 0_{Hom(V,W)}$ cioè se è l'applicazione nulla.

Proposizione 17. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V, W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e $V \xrightarrow{f} W$ un'applicazione lineare. Allora*

a) $Ker\,(f)$ è sottospazio vettoriale di V.

b) $Imm\,(f)$ è sottospazio vettoriale di W.

c) f iniettiva $\iff Ker\,(f) = \{\underline{0}_V\}$.

Dimostrazione. a) - $\underline{0}_V \in Ker\,(f)$
- $\forall \underline{x}, \underline{y} \in Ker\,(f),\ f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y}) = \underline{0}_W$
- $\forall \underline{x} \in Ker\,(f), \forall \alpha \in \mathbb{K},\ f(\alpha\underline{x}) = \alpha f(\underline{x}) = \underline{0}_W$

b) - $f(\underline{0}_V) = \underline{0}_W \implies \underline{0}_W \in Imm\,(f)$
- $\forall f(\underline{x}), f(\underline{y}) \in Imm\,(f),\ (\underline{x} + \underline{y}) \in V \wedge f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$
- $\forall f(\underline{x}) \in Imm\,(f), \forall \alpha \in \mathbb{K},\ (\alpha\underline{x}) \in V \wedge f(\alpha\underline{x}) = \alpha f(\underline{x})$

c) '$\Rightarrow$' $\underline{x} \in Ker\,(f) \implies f(\underline{x}) = f(\underline{0}_V) \overset{f\ in.}{\implies} \underline{x} = \underline{0}_V \implies Ker\,(f) = \{\underline{0}_V\}$

'$\Leftarrow$' $f(\underline{x}) = f(\underline{y}) \implies f(\underline{x}) - f(\underline{y}) = \underline{0}_W \implies f(\underline{x} - \underline{y}) = \underline{0}_W \overset{K(f)=\{0\}}{\implies}$
$\underline{x} - \underline{y} = \underline{0}_V \implies \underline{x} = \underline{y}$

Definizione 49 (Ker e Imm di matrici)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$, si dice:

$$Ker\,(A) = \{X \in \mathbb{K}^q \mid AX = 0_{\mathbb{K}^p}\}$$
$$Imm\,(A) = \{B \in \mathbb{K}^p \mid \exists X \in \mathbb{K}^q \text{ t.c. } AX = B\}$$

Osservazione 22. Sia $\mathbb{K}$ campo, abbiamo detto che ad ogni applicazione lineare da $\mathbb{K}^q \longrightarrow \mathbb{K}^p$ corrisponde una matrice e che ad ogni matrice $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$ corrisponde naturalmente un'applicazione lineare da $\mathbb{K}^q$ a $\mathbb{K}^p$.

Proposizione 18. *Sia $\mathbb{K}$ campo, l'applicazione $\mathcal{M}(p, n, \mathbb{K}) \xrightarrow{\phi} Hom\,(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ con la legge:*

$$\forall A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K}),\ \phi(A) = L_A$$

è un isomorfismo e quindi ad ogni matrice corrisponde una e una sola applicazione lineare e ad ogni applicazione lineare corrisponde esattamente una matrice.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che ϕ è lineare.

- $\forall A, B \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K}), \forall X \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned} L_{A+B}(X) &= (A+B)(X) = \big(x_1(A+B)^1 + \ldots + x_n(A+B)^n\big) \\ &= \big(x_1(A^1 + B^1) + \ldots + x_n(A^n + B^n)\big) \\ &= \big(x_1A^1 + x_1B^1 + \ldots + x_nA^n + x_nB^n\big) = L_A(X) + L_B(X) \end{aligned}$$

- $\forall A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K}), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall X \in \mathbb{K}^n$,

$$\begin{aligned} L_{\alpha A}(X) &= \big(x_1(\alpha A)^1 + \ldots + x_n(\alpha A)^n\big) \\ &= \big(x_1\alpha A^1 + \ldots + x_n\alpha A^n\big) \\ &= \alpha\,\big(x_1A^1 + \ldots + x_nA^n\big) = \alpha L_A(X) \end{aligned}$$

Il teorema 4 ci garantisce che ϕ è surgettiva: ad ogni applicazione lineare corrisponde una matrice. Se riusciamo anche a dimostrare l'iniettività abbiamo finito. Utilizziamo per questo la proposizione 17 e cerchiamo

$$Ker\,(\phi) = \{A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K}) \mid \forall X \in \mathbb{K}^n, AX = 0_{\mathbb{K}^p}\}$$

Ma ricordiamoci come costruire A a partire da L_A:

$$\forall i_1^n, A^i = L_A(e_i)$$

e in particolare $\forall i_1^n, e_i \in \mathbb{K}^n$ e quindi

$$L_A(e_i) = 0_{\mathbb{K}^p}$$

quindi tutte le colonne della matrice sono nulle, ed è quindi nulla anche la matrice stessa. Se quindi una matrice corrisponde all'applicazione nulla, questa è la matrice nulla.

Abbiamo quindi dimostrato che c'è un isomorfismo tra le matrici $\mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ e $Hom(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$.

Riflessione 5. Sia $\mathbb{K}$ campo, prendiamo $\mathbb{K}^n \xrightarrow{f} \mathbb{K}^p$, $\mathbb{K}^p \xrightarrow{g} \mathbb{K}^q$ lineari. Queste abbiamo detto sono indotte da due matrici appartenenti, rispettivamente, a $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}(q, p, \mathbb{K})$. Abbiamo detto che la composizione di applicazioni lineari è ancora un'applicazione lineare, quindi $\exists C \in \mathcal{M}(q, n, \mathbb{K})$

che corrisponde a $\mathbb{K}^n \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{K}^q$. Proviamo a vedere la costruzione di questa matrice:

$$\forall i_1^n, C^i = (g \circ f)(e_i) = g(f(e_i)) = g(A^i) = BA^i$$

quindi la nostra candidata è la matrice costruita in questo modo, visto che sappiamo che $\exists!\ C \mid L_C = g \circ f$, la nostra candidata va sicuramente bene.

Questo ci dà l'idea per la definizione di una nuova operazione tra matrici, che assegni a due matrici la matrice composizione.

Nuove operazioni sulle matrici

Definizione 50 (Prodotto righe per colonne)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo; definiamo l'applicazione: $\mathcal{M}(q, p, \mathbb{K}) \times \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K}) \xrightarrow{\cdot} \mathcal{M}(q, n, \mathbb{K})$ con la legge: $\forall A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K}), \forall B \in \mathcal{M}(q, p, \mathbb{K}), \forall j_1^q, i_1^n$

$$[B \cdot A]_j^i = \sum_{h=1}^{p} [B]_j^h \, [A]_h^i$$

Potrebbe essere non immediatamente chiaro ma noi sappiamo che $C^i = BA^i$. Concentriamoci quindi su una colonna:

$$C^i = B \cdot A^i = \left([A]_1^i \, B^1 + \ldots + [A]_p^i \, B^p \right) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{p} [A]_j^i \, [B]_1^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{p} [A]_j^i \, [B]_q^j \end{pmatrix}$$

Quindi, l'elemento $[C]_j^i = \sum_{h=1}^{p} [B]_j^h \, [A]_h^i$, come avevamo detto.

Definizione 51 (Matrice identità)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, si definisce matrice identità I_n la matrice:

$$I_n \in \mathcal{D}(n, \mathbb{K}) \text{ t.c. } \forall i_1^n, [I_n]_i^i = 1$$

Proposizione 19. *Sia $\mathbb{K}$ campo, $\forall A, B, C$ matrici di formato opportuno a coefficienti in $\mathbb{K}$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, si ha:*

a) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.

b) $(\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B) = A \cdot (\lambda B)$.

c) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

d) $A \cdot (B + C) = A \cdot C + A \cdot C$.

e) $A \cdot I = I \cdot A = A$.

Dimostrazione. Abbiamo visto che c'è corrispondenza tra matrici e applicazioni lineari, fare quindi il prodotto righe per colonne di due matrici o la composizione dell'applicazione che inducono è la stessa cosa. Quindi ci possiamo servire di questa definizione del prodotto righe per colonne (la matrice che induce l'applicazione composizione) e delle proposizioni dimostrate per le applicazioni lineari per dimostrare alcune di queste proposizioni. In pratica quindi questa Proposizione è equivalente alla Proposizione 16.

Corollario 2. *Sia* $\mathbb{K}$ *campo, allora* $(\mathcal{M}(n,\mathbb{K}),+,\cdot)$ *è un anello (con* $\cdot$ *il prodotto righe per colonne appena definito).*

Definizione 52 (Nilpotenza)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. $\underline{v} \in V$ si definisce nilpotente se

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \underline{v}^n = \underline{0}_V$$

il minimo naturale s per il quale $\underline{v}^s = \underline{0}_V$ è detto indice di nilpotenza.

Osservazione 23. L'anello $(\mathcal{M}(n,\mathbb{K}),+,\cdot)$ non è commutativo, quindi non è nemmeno un campo, e ha divisori di zero. Vediamo alcuni esempi di proprietà di $(\mathcal{M}(n,\mathbb{K}),+,\cdot)$ per le quali questo non è un campo.

- Non commutatività:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \wedge \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

- Esistenza di divisori di zero:

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

- Esistenza di nilpotenti:

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Proposizione 20. *Sia* $\mathbb{K}$ *campo, allora valgono:*

a) $\forall A, B \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$,
$$^\tau(A \cdot B) = {}^\tau(B) \cdot {}^\tau(A)$$

b) $\forall A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K}), \forall S \in \mathcal{S}(n,\mathbb{K})$,
$$^\tau(A)SA \in \mathcal{S}(n,\mathbb{K})$$

c) $\forall A, B \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$,
$$tr\,(AB) = tr\,(BA)$$

Dimostrazione. Tutti i punti di questa Proposizione hanno un significato importante (che capiremo meglio più avanti). È quindi importante capire le dimostrazioni.

a)

$$\begin{aligned} \left[{}^\tau(A \cdot B)\right]_i^j &= \sum_{h=1}^n [A]_i^h [B]_h^j = \sum_{h=1}^n \left[{}^\tau(A)\right]_h^i \left[{}^\tau(B)\right]_j^h \\ &= \sum_{h=1}^n \left[{}^\tau(B)\right]_j^h \left[{}^\tau(A)\right]_h^i = {}^\tau(B) \cdot {}^\tau(A) \end{aligned}$$

b) Sappiamo che $M \in \mathcal{S}(n,\mathbb{K}) \iff {}^{\tau}(M) = M$. Verifichiamo che è così anche in questo caso.

$$\begin{aligned} {}^{\tau}({}^{\tau}(A)SA) &= {}^{\tau}(({}^{\tau}(A)S)A)) = {}^{\tau}(A)\,{}^{\tau}({}^{\tau}(A)S) \\ &= {}^{\tau}(A)\,{}^{\tau}(S)\,{}^{\tau}({}^{\tau}(A)) = {}^{\tau}(A)SA \end{aligned}$$

c)

$$tr\,(A\cdot B) = \sum_{i=1}^{n} [A\cdot B]_i^i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} [A]_i^j\,[B]_j^i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} [B]_j^i\,[A]_i^j = tr\,(B\cdot A)$$

Lemma 2. *Sia $\mathbb{K}$ campo, e $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$,*

$$A \text{ è invertibile} \iff L_A \text{ è isomorfismo}$$

Dimostrazione. '⇒'

$$\begin{aligned} A \text{ invertibile} &\implies \exists B \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \mid A\cdot B = B\cdot A = I_n \\ &\implies L_B \circ L_A = L_{B\cdot A} = L_{I_n} = Id_{\mathbb{K}^n} \end{aligned}$$

Quindi L_A è una bigezione, perché ha un'inversa ed è un'applicazione lineare, quindi è un isomorfismo.

'⇐'

$$\begin{aligned} L_A \text{ isomorfismo} &\implies \exists g \in GL(V) \text{ t.c. } g = L_A^{-1} \implies \exists B \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \text{ t.c. } g = L_B \\ &\implies L_{B\cdot A} = L_B \circ L_A = g \circ L_A = Id_{\mathbb{K}^n} = L_{I_n} \\ &\implies B\cdot A = I_n \end{aligned}$$

Definizione 53 (Gruppo generale lineare nelle matrici)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, definiamo

$$GL\,(n,\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \text{ t.c. } L_A \text{ è isomorfismo di } \mathbb{K}^n\}$$

Poiché:

a) $\forall A, B \in GL\,(n,\mathbb{K})\,, A\cdot B \in GL\,(n,\mathbb{K})$.

b) Il $\cdot$ è associativo in $GL\,(n,\mathbb{K})$ (visto che lo è anche in $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$).

c) $I_n \in GL\,(n,\mathbb{K})$.

d) $\forall A \in GL\,(n,\mathbb{K})\,, A^{-1} \in GL\,(n,\mathbb{K})$.

$(GL\,(n,\mathbb{K})\,,\cdot)$ è un gruppo e viene detto gruppo generale lineare.

Proposizione 21. *Sia $\mathbb{K}$ campo, allora*

a) $\forall A \in GL\,(n,\mathbb{K})\,,$
$$\left({}^{\tau}(A)\right)^{-1} = {}^{\tau}\!\left(A^{-1}\right)$$

b) $\forall A, B \in GL\,(n,\mathbb{K})\,,$
$$(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$$

c) $\forall A, B \in GL(n, \mathbb{K})$,

$$A \cdot B = I_n \implies B \cdot A = I_n$$

Dimostrazione. a) Sappiamo che in un gruppo l'inverso di un elemento è unico, mostriamo dunque che un opposto di ${}^{\tau}(A)$ è proprio ${}^{\tau}\left(A^{-1}\right)$. Abbiamo:

$${}^{\tau}(A) \cdot {}^{\tau}\left(A^{-1}\right) = {}^{\tau}\left(A^{-1} \cdot A\right) = I_n$$

Quindi, vista l'unicità dell'inverso, abbiamo la tesi.

b) Utilizziamo la stessa strategia del punto a):

$$(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

c) Osserviamo innanzitutto che:

$$B^{-1} \cdot A^{-1} = (A \cdot B)^{-1} = (I_n)^{-1} = I_n$$

Possiamo quindi scrivere:

$$B \cdot A = B \cdot (I \cdot A) = B \cdot ((B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot A) = B \cdot B^{-1} = I_n$$

7.2 Esercitazione

Osservazione 24. Sia V uno spazio vettoriale e $U, W, Z \subseteq V$ dei suoi sottospazi vettoriali. Allora:

- $U \subseteq W \wedge W \cap Z = \{\underline{0}_V\} \implies U \cap Z = \{\underline{0}_V\}$
- $\forall \underline{v} \in V,\ Span(\{\underline{v}\}) \cap W = \{\underline{0}_V\} \iff \underline{v} \notin W$
- $\forall \underline{v} \in V$,

$$W \cap U = \{\underline{0}_V\} \wedge \underline{v} \notin W \oplus U \implies W \cap (Span(\{\underline{v}\}) \oplus U) = \{\underline{0}_V\}$$

Algoritmo 1 (Costruzione di supplementari)**.** . *Sia V uno spazio vettoriale e $W \subseteq V$ un suo sottospazio vettoriale. Cerchiamo un sottospazio vettoriale Z di V tale che $W \oplus Z = V$.*

a) $W = V$ *abbiamo finto.*

b) $W \neq V \implies \exists \underline{v}_1 \in V$ *t.c.* $\underline{v}_1 \notin W \implies Z_1 = Span(\{\underline{v}_1\})$

a_1*)* $W \oplus Z_1 = V$ *abbiamo finito.*

a_1*)* $W \oplus Z_1 \neq V \implies \exists \underline{v}_2 \in V \mid \underline{v}_2 \notin W \oplus Z_1 \implies Z_2 = Z_1 \oplus Span(\{\underline{v}_2\})$

...

Esempio 14. Sia $V = \mathcal{M}(3, \mathbb{R})$,

$$W = \left\{A \in V \text{ t.c. } [A]_1^1 = [A]_2^2 = [A]_3^3 = 0\right\}$$

- $W \neq \mathcal{M}(3,\mathbb{R})$. Prendiamo una matrice non appartenente a W:

$$B_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \notin W \implies W_1 = W \oplus Span\left(\{B_1\}\right)$$

  - $W_1 \neq \mathcal{M}(3,\mathbb{R})$. Prendiamo una matrice non appartenente a W_1: $B_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \notin W_1 \implies W_2 = W_1 \oplus Span\left(\{B_2\}\right)$

    - $W_2 \neq \mathcal{M}(3,\mathbb{R})$. Prendiamo una matrice non appartenente a W_2:

$$B_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \notin W_2 \implies W_3 = W_2 \oplus Span\left(\{B_3\}\right)$$

Verifichiamo che $W_3 = \mathcal{M}(3,\mathbb{R})$

'$\subseteq$' Ovvia.

'$\supseteq$' Si deve dimostrare che $\forall A \in V,\ \exists C \in W, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ t.c. $A = C + \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 + \lambda_3 B_3$. Sia

$$A = \left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right) = a_{11}B_1 + a_{22}B_2 + a_{33}B_3 + C$$

Verifichiamo che $C \in W$.

$$C = A - (a_{11}B_1 + a_{22}B_2 + a_{33}B_3) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} - a_{11} & a_{13} - a_{11} \\ a_{21} - a_{11} & 0 & a_{23} - a_{22} \\ a_{31} - a_{11} & a_{32} - a_{22} & 0 \end{pmatrix} \in W$$

Esercizio 22. Sia $\mathbb{K}$ un campo tale che char $\mathbb{K} \neq 2$. Abbiamo detto che $\mathcal{S}(n,\mathbb{K}), \mathcal{A}(n,\mathbb{K})$ sono sottospazi vettoriali di $\mathcal{M}(n,\mathbb{K})$ e $\mathcal{S}(n,\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}(n,\mathbb{K}) = 0_{\mathcal{M}(n)}$. Dimostriamo ora che

$$\mathcal{S}(n,\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}(n,\mathbb{K}) = \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$$

cioè che i due sottospazi vettoriali sono in somma diretta.

'$\subseteq$' Ovvia.

'$\supseteq$' Facciamo innanzitutto una piccola osservazione:

$$\begin{aligned} {}^{\tau}(A) = A &\iff A \in \mathcal{S}(n,\mathbb{K}) \\ {}^{\tau}(A) = -A &\iff A \in \mathcal{A}(n,\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Osserviamo allora che:

- $\forall M \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} {}^{\tau}(M) + M = {}^{\tau}(M) + {}^{\tau}({}^{\tau}(M)) &= {}^{\tau}(M + {}^{\tau}(M)) \\ \implies M + {}^{\tau}(M) &\in \mathcal{S}(n,\mathbb{K}) \end{aligned}$$

- $\forall M \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} {}^{\tau}(M) - M = {}^{\tau}(M) - {}^{\tau}({}^{\tau}(M)) &= {}^{\tau}(M - {}^{\tau}(M)) \\ \implies M - {}^{\tau}(M) &\in \mathcal{A}(n,\mathbb{K}) \end{aligned}$$

Quindi

$$\forall M \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K}),\ M = \frac{M + {}^{\tau}(M)}{2} + \frac{M - {}^{\tau}(M)}{2}$$

Lezione 8

Le matrici come sistemi

8.1 Teoria

Rappresentare sistemi con le matrici

Esercizio 23. Sia $\mathbb{K}$ campo e $A \in \mathcal{M}(p_1+p_2, n_1+n_2, \mathbb{K})$, $A_1 \in \mathcal{M}(p_1, n_1, \mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}(p_1, n_2, \mathbb{K})$, $A_3 \in \mathcal{M}(p_2, n_1, \mathbb{K})$, $A_4 \in \mathcal{M}(p_2, n_2, \mathbb{K})$. Sia

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)$$

Si dice in questo caso che la matrice A è a blocchi (tutte le matrici possono essere scritte a blocchi). Supponiamo di avere un'altra matrice $B \in \mathcal{M}(n_1 + n_2, q_1 + q_2, \mathbb{K})$, in particolare, esattamente come sopra, avremo:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$$

Verificare che

$$A \cdot B = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & B_2A_3 + B_4A_4 \end{array}\right)$$

Definizione 54 (Matrice a scalini e pivot)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo e $M \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ una matrice. M si dice a scalini se, detto k_i il numero colonne nulle all'inizio della i-esima riga, $\forall i_1^{p-1}\ k_{i+1} > k_i$.
Inoltre il primo elemento non nullo di ogni riga si dice pivot. Una matrice quindi è a scalini se

$$pivot(M_i) = [M]_i^j \Rightarrow pivot(M_{i+1}) = [M]_{i+1}^{j_1} \text{ con } j_1 > j$$

$$\begin{pmatrix} p_1 & & & & * \\ & p_2 & & & \\ & & p_3 & & \\ & & & p_4 & \\ 0 & & & & p_5 \end{pmatrix}$$

Definizione 55 (Traslazione)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo e $\underline{w} \in \mathbb{K}^n$. Si definisce traslazione l'applicazione $\mathbb{K}^n \xrightarrow{\tau_{\underline{w}}} \mathbb{K}^n$ con la seguente legge:

$$\forall \underline{v} \in \mathbb{K}^n, \ \tau_{\underline{w}}(\underline{v}) = \underline{v} + \underline{w}$$

L'applicazione non è lineare (se $\underline{w} \neq \underline{0}_{\mathbb{K}^n}$).

Riflessione 6. Sia

$$\mathcal{M}(2,4,\mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo detto che A può essere vista come un'applicazione lineare $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{L_A} \mathbb{R}^4$ che manda:

$$\mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \xrightarrow{in} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

Proviamo a vedere se il vettore

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}_A$$

Per farlo dobbiamo vedere se $\exists X \in \mathbb{R}^4 \mid AX = \underline{v}$. Prendiamo quindi il generico vettore di $\mathbb{R}^4$ visto prima e vediamo cosa succede; $\underline{v} \in \mathcal{C}_A$ solo se ha soluzione:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$$

Ci dobbiamo ora chiedere quali e quante soluzioni vi sono del sistema, le soluzioni saranno i vettori la cui immagine è $\underline{v}$. In pratica abbiamo ricondotto un problema di immagini di matrici a un sistema lineare, potremo poi fare anche il contrario: risolvere sistemi lineari lavorando sulle matrici a loro associate. La matrice racchiude in se tutte le informazioni necessarie: i coefficienti delle variabili. Continuiamo risolvendo il sistema sopra e vediamo dove ci porta; il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_3 = x_4 - 1 \\ x_1 = x_2 - 3x_4 + 2 \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
Sol &= \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - 3x_4 + 2 \\ x_2 \\ x_4 - 1 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi equivalenti a

$$\tau_{(2,0,-1,0)}\left(Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \right)$$

In particolare lo $Span$ sono le soluzioni del sistema $AX = 0$, è quindi il nucleo di A. Invece $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ è una soluzione particolare del sistema che volevamo risolvere. Quindi tutte le soluzioni sono date da una soluzione particolare più una soluzione del nucleo: le soluzioni sono una traslazione del nucleo di un vettore che è soluzione.
Una spiegazione intuitiva può essere: prendiamo una soluzione particolare Y: un vettore che ha un'immagine che è quella che stavamo cercano; ma visto che l'applicazione è lineare, se vi aggiungiamo una vettore appartenente al nucleo è come se vi aggiungessimo 0, quindi la soluzione rimane quella che ci interessava. Abbiamo infatti:

$$X \in Ker\,(A)\,,\ AX = 0 \implies A(X+Y) = AX + AY = 0 + Sol = Sol$$

Quindi per questo tutti i vettori nella forma $Sol + Ker$ sono soluzioni.

Definizione 56 (Sistema omogeneo)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{K}^p$. Sappiamo che $X \in \mathbb{K}^n$ si dice soluzione del sistema se $AX = B$. In particolare il sistema si dice omogeneo se $B = 0_{\mathbb{K}^p}$.

Osservazione 25. Ogni sistema omogeneo ha sempre almeno una soluzione: la matrice nulla.

Definizione 57 (Sistemi equivalenti)**.** Due sistemi si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Osservazione 26. Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in M \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{K}^p$, risolvere il sistema $AX = B$ significa trovare tutte le sue soluzioni, per farlo si possono risolvere dei sistemi equivalenti. Intanto è necessario vedere se vi sono soluzioni possibili.

$$AX = B \text{ è risolubile} \iff B \in Imm\,(A)$$

Siano:

- $Sol_B = \{X \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } AX = B\}$
- $Sol_0 = \{X \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } AX = 0\} = Ker\,(A)$

Sol_0 è sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$, visto che è Ker di un'applicazione lineare.

Proposizione 22. *Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{K}^p$. Sia $Y_B \in \mathbb{K}^n$ una soluzione di $AX = B$. Allora*

$$Sol_B = Y_B + Sol_0 = \{Y_B + Y_0 \in \mathbb{K}^n \textit{ t.c. } Y_0 \in Sol_0\}$$

Dimostrazione. '$\supseteq$' Verifichiamo che $Y_B + Y_0 \in Sol_B$.

$$A \cdot (Y_B + Y_0) = A \cdot Y_B + A \cdot Y_0 = B + 0_{\mathbb{K}^p} = B$$

'$\subseteq$' Sia $Z \in Sol_B$, dobbiamo dimostrare che $Z - Y_B \in Sol_0$.

$$A \cdot (Z - Y_B) = A \cdot Z - A \cdot Y_B = B - B = 0_{\mathbb{K}^p}$$

Definizione 58 (Matrice completa)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, $A \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{K}^p$; abbiamo detto che queste matrici rappresentano un sistema le cui soluzioni sono le $X \in \mathbb{K}^n$ t.c. $AX = B$. Si dice matrice completa del sistema la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$$

Ottenuta aggiungendo alla matrice dei coefficienti la colonna dei termini noti.

Osservazione 27. Sia $\mathbb{K}$ campo. Dato un sistema lineare a n incognite e p equazioni, si possono effettuare su di esso tre operazioni che vengono dette elementari, che non cambiano le soluzioni del sistema, fornendo un sistema equivalente (che può essere più facile da risolvere):

ι) Scambiare tra di loro due equazioni.

$\iota\iota$) Moltiplicare un' equazione per uno scalare non nullo.

$\iota\iota\iota$) Sostituire ad una equazione la somma di questa e del multiplo di un'altra equazione.

Consideriamo ora $A \in M \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^p$, abbiamo detto che possiamo considerare la matrice come un sistema di n incognite e p equazioni. Le cui soluzioni sono gli $X \in \mathbb{K}^n \mid AX = B$. Possiamo applicare le operazioni elementari anche alla matrice:

ι) Scambiare tra di loro due righe.

$\iota\iota$) Moltiplicare una riga per uno scalare non nullo.

$\iota\iota\iota$) Sostituire ad una riga la somma di questa e del multiplo di un'altra.

In particolare vedremo poi come utilizzare queste operazioni per rendere la matrice a scalini, forma in cui è più facilmente risolubile.

8.2 Esercitazione

Esercizio 24. Sia $\mathbb{R}_2[x] \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ un'applicazione definita dalla legge:

$$f(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} a+b+c \\ 4a+2b+c \end{pmatrix}$$

Dimostrare che f è lineare (e poi vedere se è iniettiva, surgettiva).

Dimostrazione. Siano $p(x) = ax^2+bx+c,\ q(x) = a_1x^2+b_1x+c_1 \in \mathbb{R}_2[x]$. Allora:

$$\begin{aligned} f(p(x)+q(x)) &= f((a+a_1)x^2+(b+b_1)x+(c+c_1)) \\ &= \begin{pmatrix} (a+a_1)+(b+b_1)+(c+c_1) \\ 4(a+a_1)+2(b+b_1)+(c+c_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b+c)+(a_1+b_1+c_1) \\ (4a+2b+c)+(4a_1+2b_1+c_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+b+c \\ 4a+2b+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 \\ 4a_1+2b_1+c_1 \end{pmatrix} \\ &= f(p(x)) + f(q(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\lambda p(x)) &= f(\lambda ax^2+\lambda bx+\lambda c) = \begin{pmatrix} \lambda a+\lambda b+\lambda c \\ 4\lambda a+2\lambda b+\lambda c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a+b+c \\ 4a+2b+c \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(p(x)) \end{aligned}$$

Si poteva vedere questa applicazione anche come $\mathbb{R}_2[x] \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ con la legge

$$f(p(x)) = \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \end{pmatrix}$$

Vediamo ora se questa applicazione è surgettiva, per farlo analizziamo lo spazio delle immagini.

$$\begin{aligned} \underline{v} \in Imm(f) \implies \exists a,b,c \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underline{v} &= \begin{pmatrix} a+b+c \\ 4a+2b+c \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \underline{v} \in Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \end{aligned}$$

Inoltre è vero anche il contrario: un vettore nello *Span* appartiene anche alle immagini. Quindi

$$Imm(f) = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

La nostra domanda: f è surgettiva? Si trasforma quindi nel chiederci se

$$Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = \mathbb{R}^2$$

'$\subseteq$' Ovvia.

'$\supseteq$' Sia $\underline{t} \in \mathbb{R}^2, \underline{t} = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$, ci dobbiamo chiedere se

$$\exists \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underline{t} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Impostiamo quindi il sistema (nel quale però imponiamo $\gamma = 0$, visto che non ci serve per arrivare a dimostrare che è surgettiva: potremmo anche non farlo ma avremmo più conti e in questo caso specifico è inutile)

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta \\ b = 4\alpha + 2\beta \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = -\dfrac{2a+b}{2} \\ \beta = \dfrac{4a-b}{2} \end{cases}$$

L'applicazione è quindi surgettiva.
È però iniettiva? Visto che è lineare ci chiediamo se $Ker\,(f) = \left\{0_{\mathbb{R}_2[x]}\right\}$.

$$Ker\,(f) = \left\{ p \in \mathbb{R}_2\,[x] \,\middle|\, \begin{pmatrix} p(1) \\ p(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{q(x)(x-1)(x-2) \mid deg\; q(x) = 0\}$$

Il nucleo dell'applicazione è quindi lo *Span* a coefficienti in $\mathbb{R}$ del polinomio $(x-1)(x-2)$. L'applicazione quindi non è iniettiva.

Esercizio 25. Sia $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$ un'applicazione definita dalla legge:

$$g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ x-y+3z \end{pmatrix}$$

Dimostrare che g è lineare (e poi vedere se è iniettiva, surgettiva).

Dimostrazione. Vediamo intanto che è lineare. Siano $\underline{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{smallmatrix}\right), \underline{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) &= \begin{pmatrix} (x_1+x_2) + 2(y_1+y_2) - (z_1+z_2) \\ (x_1+x_2) - (y_1+y_2) + 3(z_1+z_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1+2y_1-z_1 \\ x_1-y_1+3z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2+2y_2-z_2 \\ x_2-y_2+3z_2 \end{pmatrix} = g(\underline{v}_1) + g(\underline{v}_2) \end{aligned}$$

$$g(\lambda\underline{v}_1) = \begin{pmatrix} \lambda x + 2\lambda y - \lambda z \\ \lambda x - \lambda y + 3\lambda z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x+2y-z \\ x-y+3z \end{pmatrix} = \lambda g(\underline{v}_1)$$

Abbiamo dimostrato che g è lineare, quindi esisterà $A \in \mathcal{M}(2,3,\mathbb{R})$ tale che $L_A = g$. Osserviamo che

$$g\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$$

La matrice A sarà quindi proprio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Utilizziamo ora la matrice per vedere se l'applicazione è surgettiva. Abbiamo già detto che

$$Imm\,(L_A) = \mathcal{C}_A = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Per dimostrare che è surgettiva dobbiamo mostrare che

$$\mathbb{R}^2 = Span\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right\}\right)$$

'$\supseteq$' Ovvia.

'$\subseteq$' Sia $\mathbb{R}^2 \ni \underline{v} = \left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)$. Ci dobbiamo chiedere se $\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\underline{v} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

Domanda che si riconduce a chiedersi se ha soluzioni il sistema:

$$\begin{cases} a = \alpha + 2\beta - \gamma \\ b = \alpha - \beta + 3\gamma \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \dfrac{a-2b}{3} \\ \beta = \dfrac{a-b}{3} \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Quindi l'applicazione è surgettiva. Studiamone invece ora il Ker per vedere se è iniettiva.

$$\begin{aligned} Ker\,(g) = Ker\,(L_A) &= \left\{\underline{v} \in \mathbb{R}^3 \mid A\underline{v} = 0_{\mathbb{R}^2}\right\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & -1\\1 & -1 & 3\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right\} \\ &= Sol\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases} = Sol\begin{cases} x = \frac{-5}{3}z \\ y = \frac{4}{3}z \end{cases} \\ &= \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = \frac{-5}{3}z,\ y = \frac{4}{3}z\right\} = \left\{\left(\begin{smallmatrix}\frac{-5}{3}z\\\frac{4}{3}z\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \left\{z \cdot \left(\begin{smallmatrix}\frac{-5}{3}\\\frac{4}{3}\\1\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3\right\} = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix}-5\\4\\3\end{smallmatrix}\right)\right\}\right) \end{aligned}$$

L'applicazione quindi non è iniettiva.

Osservazione 28. Ripensiamo ora agli ultimi due esercizi (es.: 24. 25). Abbiamo due applicazioni lineari: $\mathbb{R}_2\,[x] \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$. Pensiamo ora al seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2\,[x] & \xrightarrow[lin.]{f} & \mathbb{R}^2 \\ \phi\big\downarrow iso. & & iso.\big\downarrow\psi \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow[\psi\circ f\circ\phi^{-1}=g]{lin.} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Ci chiediamo se esistono degli isomorfismi $\mathbb{R}_2\,[x] \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^2$ tali che il diagramma sia verificato. Abbiamo cioè definito delle applicazioni lineari, che partono da campi isomorfi tra di loro e arrivano in campi a loro volta isomorfi. Ci chiediamo ora se esistono due isomorfismi che in qualche modo uniscano le due applicazioni lineari. Pensiamo a un generico $\underline{v} \in \mathbb{R}_2\,[x]$, cerchiamo ora due isomorfismi, ϕ, ψ, uno che mandi $f(\underline{v})$ in $g(\psi(\underline{v}))$, l'altro che mandi $\underline{v}$ in $g^{-1}(\psi(f(\underline{v})))$. Cioè in qualche modo cerchiamo di vedere le due applicazioni lineari come la stessa applicazione lineare, che però agiscono su spazi vettoriali tra loro isomorfi, quindi per trovare l'immagine di un elemento rispetto a un' applicazione h si può vedere dove quell'elemento è mandato dall'altra applicazione i, far agire i, e poi utilizzare l'altro isomorfismo per tornare allo spazio di arrivo dell'applicazione h. In effetti sembra un percorso molto lungo: si percorrono tre lati del diagramma anzi che uno; può però essere utile.

Esercizio 26. Questo esercizio è legato con la precedente osservazione. Dimostrare che $\mathbb{R}_2[x] \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^3$, con la legge

$$\phi(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} 4a + 3b \\ -2a + 3c \\ 3a \end{pmatrix}$$

e $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^2$ con la legge

$$\psi = L_B \ con \ B = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$$

sono gli isomorfismi (dimostrare anche che sono isomorfismi) cercati.

Dimostrazione. a) ϕ è isomorfismo.

- Si veda che $\phi = L_P$ con

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  Quindi l'applicazione è lineare, poiché indotta da una matrice.

- Vediamo le immagini:

$$Imm\,(\phi) = \mathcal{C}_P = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$$

  Per vedere se è surgettiva si prende un generico elemento di $\mathbb{R}^3$: $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ e si vede se il corrispettivo sistema ha soluzione:

$$\begin{cases} x = 4\alpha + 3\beta \\ y = -2\alpha + 3\gamma \\ z = 3\alpha \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{1}{3}z \\ \beta = \frac{x}{3} - \frac{4}{9}z \\ \gamma = \frac{y}{3} + \frac{2}{9}z \end{cases}$$

-

$$Ker\,(\phi) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\begin{smallmatrix} 4\alpha+3\beta \\ -2\alpha+3\gamma \\ 3\alpha \end{smallmatrix}\right) = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$$

  Dal sistema precedente ricaviamo:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0 \implies Ker(\phi) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$$

b) ψ è isomorfismo.

- ψ è un'applicazione lineare poiché è indotta da una matrice.

-
$$Imm\,(\psi) = \mathcal{C}_B = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} 9 \\ -9 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$$

Per verificare che è surgettiva dobbiamo vedere che il sistema ha soluzioni; sia $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ un generico elemento di $\mathbb{R}^2$, vediamo se esiste $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\psi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a = 9x - 3y \\ b = 9x + 6y \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{a+3y}{9} \\ y = \frac{b-a}{9} \end{cases}$$

- $Ker\,(\psi) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{cases} 0 = 9x - 3y \\ 0 = 9x + 6y \end{cases} \right\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

c) Un modo di lavorare potrebbe essere: ricavarsi la matrice di f, e poi vedere se funzionano le composizioni. Ricordiamo tutte le matrici:

- La f era definita come $\mathbb{R}_2[x] \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ con la legge: $f(ax^2+bx+c) = \left(\begin{smallmatrix} a+b+c \\ 4a+2b+c \end{smallmatrix}\right)$. La matrice che la induce dunque è: $F = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2$, con la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$
- $\mathbb{R}_2[x] \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}^3$, con la matrice $P = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
- $\mathbb{R}_2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}^2$, con la matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 6 \end{smallmatrix}\right)$

Per vedere ora se le applicazioni ϕ, ψ sono quelle che volevamo dobbiamo vedere se fanno il loro lavoro, cioè se $\psi \circ f = g \circ \phi$. Se questo è vero abbiamo le applicazioni che cercavamo. In particolare controlliamo la composizione di applicazioni con la moltiplicazione di matrici. Dobbiamo vedere se $B \cdot F = A \cdot P$. Se ci viene entrambe le volte la stessa matrice abbiamo finito.

$$B \cdot F = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 15 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 15 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Riscriviamo quindi il diagramma anche con le matrici.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_2[x] \arrow[r, "f", "L_F"'] \arrow[d, "\phi"', "L_P"] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "L_B"', "\psi"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "L_A", "g"'] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

Esercizio 27. Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $V \xrightarrow{f} V$ un'applicazione lineare tale che $f \circ f = Id_V$. Dimostrare che

- $V_1 = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = \underline{v}\}$
- $V_{-1} = \{\underline{v} \in V \mid f(\underline{v}) = -\underline{v}\}$

sono sottospazi vettoriali di V e che $V = V_1 \oplus V_{-1}$

Dimostrazione. 1) V_1 è sottospazio vettoriale:

$$\begin{aligned} \underline{0}_V \in V_1 &\Longleftarrow f(\underline{0}_V) = \underline{0}_V \\ \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_1 &\Longrightarrow f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \\ \lambda \in \mathbb{K}, \underline{v} \in V_1 &\Longrightarrow f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \end{aligned}$$

2) V_{-1} è sottospazio vettoriale:

$$\begin{aligned} \underline{0}_V \in V_{-1} &\Longleftarrow f(\underline{0}_V) = \underline{0}_V \\ \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V_{-1} &\Longrightarrow f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_1) + f(\underline{v}_2) = -\underline{v}_1 - \underline{v}_2 = -(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \\ \lambda \in \mathbb{K}, \underline{v} \in V_{-1} &\Longrightarrow f(\lambda \underline{v}) = \lambda f(\underline{v}) = -\lambda \underline{v} \end{aligned}$$

3) $V_{-1} \cap V_1 = \{\underline{0}_V\}$
Infatti

$$\underline{v} \in V_{-1} \cap V_1 \Longrightarrow \underline{v} = f(\underline{v}) = -\underline{v} \Longrightarrow \underline{v} = \underline{0}_V$$

4) $V = V_1 \oplus V_{-1}$

'$\supseteq$' Ovvio.

'$\subseteq$' Vogliamo dimostrare che, $\forall \underline{v} \in V$, $\exists \underline{v}_1 \in V_1, \underline{v}_{-1} \in V_{-1}$ t.c.

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_{-1}$$

Consideriamo ora che $\forall \underline{v} \in V$,
- $f(\underline{v} + f(\underline{v})) = f(\underline{v}) + f(f(\underline{v}) = f(\underline{v}) + \underline{v}$
- $f(\underline{v} - f(\underline{v})) = f(\underline{v}) - f(f(\underline{v})) = -(\underline{v} - f(\underline{v}))$

Quindi possiamo scrivere:

$$2\underline{v} = (\underline{v} + f(\underline{v})) + (\underline{v} - f(\underline{v})) \Longrightarrow \underline{v} = \overbrace{\frac{1}{2}(\underline{v} + f(\underline{v}))}^{\in V_1} + \overbrace{\frac{1}{2}(\underline{v} - f(\underline{v}))}^{\in V_{-1}}$$

Esercizio 28. Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $V \xrightarrow{g} V$ un'applicazione lineare tale che $g \circ g = g$. Siano inoltre:

- $V_0 = Ker\,(g)$.
- $V_1 = \{\underline{v} \in V \mid g(\underline{v}) = \underline{v}\}$.

Dimostrare che $V = V_0 \oplus V_1$.

Dimostrazione. 1)

$$\underline{v} \in V_0 \cap V_1 \Longrightarrow \underline{v} = g(\underline{v}) = \underline{0}_V \Longrightarrow V_0 \cap V_1 = \{\underline{0}_V\}$$

2) $V = V_0 \oplus V_1$.

'$\supseteq$' Ovvio.

'$\subseteq$' Dimostriamo innanzitutto che

$$Imm\,(g) = V_1$$

'$\supseteq$' Ovvio, infatti

$$\forall \underline{v}_1 \in V_1,\ g(\underline{v}_1) = \underline{v}_1$$

'$\subseteq$'

$$v \in Imm\,(g) \implies \exists \underline{w} \in V \text{ t.c. } g(\underline{w}) = \underline{v}$$

Ma

$$g(\underline{w}) \overset{g\circ g = g}{=} g(g(\underline{w})) = g(\underline{v}) = \underline{v} \implies \underline{v} \in V_1$$

A questo punto possiamo dire:

$$\forall \underline{v} \in V,\ \underline{v} = \overset{\in V_1}{g(\underline{v})} + (\overset{\in V_0?}{\underline{v} - g(\underline{v})})$$

Se si riesce a dimostrare che $\forall \underline{v} \in V, \underline{v} - g(\underline{v}) \in V_0$ abbiamo finito. Ma g è lineare quindi

$$g(\underline{v} - g(\underline{v})) = g(\underline{v}) - g(g(\underline{v})) \overset{g\circ g = g}{=} g(\underline{v}) - g(\underline{v}) = \underline{0}_V$$

Lezione 9

Algoritmo di Gauss e basi

9.1 Teoria

L'algoritmo di Gauss

Abbiamo visto la scorsa lezione che è possibile risolvere sistemi di equazioni lineari utilizzando le matrici; prima però di fare i calcoli necessari possiamo trasformare il sistema in un sistema equivalente attraverso le operazioni elementari per riga che abbiamo visto. In particolare vorremmo trovare un sistema equivalente a scalini: in cui la matrice completa è a scalini. Questo ci aiuterebbe molto.

Osservazione 29. Sia $\mathbb{K}$ un campo, $A \in \mathcal{M}(n, p, \mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{K}^n$. Consideriamo il sistema rappresentato dalla matrice completa $\left(\, A \, \middle| \, B \, \right)$. Immaginiamoci che questo, ridotto a scalini corrisponda a $\left(\, A' \middle| B' \, \right)$. Allora il sistema $AX = B$ è risolubile $\iff$ la colonna B' non contiene pivot (se infatti questa avesse pivot avremmo una combinazione lineare a coefficienti nulli delle incognite che deve essere uguale a un valore diverso da zero).
Immaginiamoci di avere una matrice di questo tipo: in cui B' non contenga pivot. E immaginiamoci che i pivot siano nelle colonne $A^{j_1}, \dots, A^{j_m}$, a questo punto mi ricavo le incognite $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$ in funzione delle altre: parto dalla riga più bassa non nulla (A_r) che abbia il pivot nella colonna k e mi ricavo x_{j_k} dalle altre altre variabili, poi salgo alla riga superiore e mi ricavo il pivot di quella riga utilizzando anche x_{j_k} e così via, fino ad arrivare alla prima riga.

Dobbiamo quindi trovare un modo per scalinare una matrice completa.

Algoritmo 2 (di Gauss)**.** *Sia $M \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$, questo algoritmo trasforma M in una matrice a scalini attraverso un numero finito di operazioni elementari.*

1) *Sia M^{J_1} la prima colonna da sinistra diversa da zero, questo vuol dire che almeno un elemento di essa è diverso da zero.*

   - *Se è $[M]_1^{j_1}$ ad essere diverso da zero non faccio nulla.*
   - *Sia n la prima riga dall'alto tale che $[M]_n^{j_1} \neq 0$. Allora scambio la prima riga con l'n-esima.*

2) *A questo punto ho $[M]_1^{j_1} \neq 0$. Adesso mi serve che la colonna j_1 sia vuota sotto la prima riga. Allora $\forall i_2^p$, sostituisco la riga M_i con la riga:*

$$M_i - \frac{[M]_i^{j_1}}{[M]_1^{j_1}} M_1$$

A questo punto abbiamo ottenuto la matrice:

$$\widetilde{M} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & [M]_1^{j_1} & * \\ \hline & 0 & \\ 0 & | & M' \\ & 0 & \end{array}\right)$$

E si può ripetere l'algoritmo sulla sottomatrice M', infatti la prima riga e le prima j_1 colonne sono ordinate e ripetendo l'algoritmo arriverò a sistemare tutta la matrice.

Teorema 5 (di Gauss)**.** 1) *Ogni matrice può essere trasformata in una matrice a scalini.*

2) *Ogni sistema lineare $AX = B$ è equivalente a un sistema lineare $SX = T$ dove $S' = \left(S \,\middle|\, T \right)$ è a scalini.*

3) *Il sistema è risolubile $\iff$ S, S' hanno lo stesso numero di pivot.*

Osservazione 30. - L'algoritmo di Gauss, per garantire che la matrice che otteniamo sia equivalente a quella iniziale, si basa sul fatto che le operazioni elementari per riga non cambiano le soluzioni del sistema. Quindi questo ci fa pensare a una cosa: se mentre eseguiamo l'algoritmo vediamo che potrebbe essere più utile scegliere la seconda riga con un pivot anzi che la prima potremmo spostare quella, faremmo comunque operazioni elementari. In effetti non siamo macchine e quindi possiamo di volta in volta adattare l'algoritmo al caso particolare. Ma questo fa sorgere diversi problemi.

- La scalinatura di una matrice non è unica: se facciamo operazioni elementari diverse da quelle dell'algoritmo potremmo ottenere una matrice diversa, a scalini, e comunque equivalente all'altra scalinata. Ma se il sistema è risolubile se e solo se non vi sono pivot nella colonna dei termini noti, questo dovrebbe voler dire che il numero di pivot è sempre quello, a prescindere dal loro valore. In effetti si trova sempre lo stesso numero di pivot (altrimenti il sistema potrebbe essere contemporaneamente risolubile e non risolubile) però questo è da dimostrare.

- Tutto questo potrebbe essere complicato da una matrice parametrica: potremmo avere sulla stessa colonna $h, h+1$; in questo caso chiaramente la colonna non è mai nulla, ma a volte è nulla h, a volte $h+1$, e l'algoritmo di Gauss ci permetterebbe unicamente di completare la scalinatura a casi (noi invece potremmo sottrarre alla riga che contiene l'$h+1$ la riga che contiene h).

Matrici elementari

Definizione 59 (Matrici elementari)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e $E \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, E si dice elementare se è possibile ottenerla da I_n con un'unica operazione elementare. Vi sono tre tipi di matrice elementare:

- E_{ij}, ottenuta da I_n scambiando la riga I_i con la riga I_j.

- $E_i\lambda$, ottenuta moltiplicando per $\lambda \in \mathbb{K}$ la riga I_i.

- $E_{ij}\lambda$, ottenuta sommando alla riga I_i la riga λI_j

Esercizio 29. Siano $A, B \in \mathcal{M}(n, p, \mathbb{K})$, se B è la matrice ottenuta da A attraverso un'operazione elementare per riga allora $B = EA$, dove E è la matrice elementare corrispondente a quell'operazione.

Dimostrazione. Per dimostrarlo vediamo cosa succede moltiplicando i vari tipi di matrice elementare per una generica matrice. Per farlo ragioneremo colonna per colonna, visto che così viene fatto il prodotto righe per colonne tra due matrici.

- In una matrice elementare del primo tipo si hanno solamente elementi che valgono 0 oppure 1, inoltre in ogni colonna vi è esattamente un 1. Sia A^k una generica colonna di A, sappiamo che $B^k = E_{ij} \cdot A^i$, la colonna cioè è ottenuta sommando le varie colonne che si ottengono moltiplicando l'elemento $[A]^i_m$ per la colonna E^m_{ij}, al variare di m^n_1. Il generico elemento $[A]^k_h$ dovrà essere moltiplicato per la h-esima colonna di E_{ij}, questa colonna contiene un solo uno (alla posizione s), quindi la colonna finale sarà una colonna con tutti zeri, tranne alla posizione s, che conterrà esattamente $[A]^k_h$. In genere, visto che la matrice è molto simile alla matrice identità, avremo $s = h$, quindi, abbiamo garanzia che le righe non toccate dall'operazione rimangano esattamente le stesse: infatti la matrice elementare ha esattamente un elemento 1 per riga, quindi in ciascuna riga la somma è determinata solo da una moltiplicazione, e le righe che non sono state cambiate, come abbiamo visto, hanno come valore lo stesso valore che si trovava nella riga (e colonna) corrispondente di A. Invece per le righe cambiate cosa avremo? Avremo che moltiplichiamo l'elemento $[A]^k_i$ per una colonna contenente tutti zeri tranne un uno alla posizione j, quindi la colonna che otteniamo dalla moltiplicazione avrà tutti zeri e al posto j l'elemento $[A]^k_i$. Uguale per l'elemento $[A]^k_j$. Quindi questi due elementi vengono scambiati di riga. Visto che si trattava di una colonna generica abbiamo finito.
  Per dirla in un altro modo abbiamo moltiplicato degli elementi di una colonna per delle colonne che erano quasi del tutto nulle, tranne per un uno; moltiplicando queste colonne l'1 assumeva il valore considerato, ma la riga dell'1 era o uguale alla sua colonna, oppure era i o j, in questi casi scambiate; quindi in questo modo si scambia di volta in volta la posizione di due elementi in una colonna, alla fine la somma darà gli elementi voluti, visto che è la somma di zeri e di un elemento non nullo.

- Ragionamento simile per la matrice $E_i\lambda$, quando moltiplichiamo gli elementi della colonna rimangono sempre uguali (perché si moltiplica per 1), tranne quello della riga i, questo non rimane uguale perché viene moltiplicato per λ, la somma, come prima, non è influenzata da elementi di altre righe perché ciascuna riga della matrice elementare contiene un solo elemento non zero.

- Stesso ragionamento dei due tipi di matrici precedenti, l'unica cosa che cambia è che ora c'è una riga della matrice elementare con due valori non nulli, prendiamo la matrice $E_{ij}\lambda$, questa avrà tutte le righe uguali a quelle della matrice identità tranne la riga i, che avrà sempre un uno alla i-esima colonna, ma avrà anche un λ alla j-esima. Quindi quando facciamo la moltiplicazione per la colonna A^k, avremo una variazione alla j-esima riga: il valore $[A]_j^k$ sarà contato due volte nella colonna finale, una alla riga j, moltiplicato per 1, l'altra alla riga i, moltiplicato per λ, quindi nella somma finale si dovrà tenere conto di due valori per la riga i: il valore di $[A]_i^k$ e il valore $[A]_j^k$.

Proposizione 23. - $E_{ij}^{-1} = E_{ij}$.

- $(E_i\lambda)^{-1} = E_i(\lambda^{-1})$.
- $(E_{ij}\lambda)^{-1} = E_{ij} - \lambda$.

Dimostrazione. Queste proposizioni si dimostrano pensando come agiscono i loro inversi. Per esempio nel primo caso: La matrice E_{ij} sappiamo ormai come agisce su una generica matrice (scambiando due righe), quindi agirà allo stesso modo anche su se stessa, riportando le righe alla posizione di origine; il secondo caso invece la riga viene moltiplicata per l'inverso del numero per la quale era stata moltiplicata in precedenza, quindi la riga tornerà a contenere 1 alla posizione $[E]_i^i$. Ugualmente la terza matrice, la sua inversa toglie dalla sua i-esima riga lei ciò che le era stato aggiunto: λE_j. Quindi le matrici inverse agiscono sui loro inversi esattamente come agiscono su ogni altra matrice, in questo caso però rendono le matrici la matrice identità.

Corollario 3. *Tutte le matrici elementari sono invertibili.*

Osservazione 31. Sia quindi S la matrice a scalini ottenuta da A attraverso operazioni elementari per riga. Allora il processo che ha portato alla scalinatura è stato:

$$A \to M_1 \cdot A \to M_2 \cdot M_1 \cdot A \to M_s \cdot \ldots \cdot M_1 A = S$$

Chiamiamo $M = M_s \cdot \ldots \cdot M_1$. Ora, visto che $\forall i_1^s, M_i$ è invertibile $\implies$ M è invertibile. Quindi M induce un isomorfismo.

Basi e vettori linearmente indipendenti

Definizione 60 (Spazio vettoriale finitamente generato)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. V si dice finitamente generato se $\exists n \in \mathbb{N}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$ t.c.

$$\forall \underline{v} \in V, \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \mid \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n$$

Cioè se

$$V = Span\left(\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}\right)$$

Esempio 15. $\mathbb{R}[x]$ non è uno spazio vettoriale finitamente generato: se lo fosse non potremmo generare i polinomi di grado più alto del grado del polinomio generatore di grado massimo.

Definizione 61 (Lineare indipendenza)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ sono detti linearmente indipendenti se

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}_V \implies \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$$

Cioè se l'unico modo di ottenere $\underline{0}_V$ come loro combinazione lineare a coefficienti in $\mathbb{K}$ è prendere tutti i coefficienti nulli.

Osservazione 32. Sia $\mathbb{K}$ campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

- $\forall \underline{v} \in V, \underline{v}$ è linearmente indipendente $\iff \underline{v} \neq 0_V$.
- Se uno tra i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ è nullo, allora i vettori sono linearmente dipendenti.

Proposizione 24. *Siano V uno spazio vettoriale e $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$, questi vettori sono linearmente dipendenti $\iff \exists i_1^n$ t.c. $\underline{v}_i$ può essere scritto come combinazione lineare degli altri vettori.*

Dimostrazione. '$\Rightarrow$' per ipotesi $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che $\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}_V$, ipotizziamo $\alpha_1 \neq 0_{\mathbb{K}}$, a meno di riordino, allora

$$\underline{v}_1 = -\alpha_1^{-1}(\alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n)$$

'$\Leftarrow$' ipotizziamo $\underline{v}_1$ (a meno di riordino) il vettore che può essere scritto come combinazione lineare degli altri. Allora

$$\exists \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \mid \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{v}_1 \implies -\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}_V$$

Quindi i vettori sono linearmente dipendenti.

Osservazione 33. Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e

$$S = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \subseteq V$$

un insieme di vettori linearmente indipendenti. Allora $T \subseteq S \implies T$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti.

Dimostrazione. A meno dell'ordine degli indici $T = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r\}$, quindi possiamo scrivere

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_r\underline{v}_r + 0\underline{v}_{r+1} \ldots + 0\underline{v}_n = \underline{0}_V$$

se anche solo uno degli α fosse diverso da zero avremmo una combinazione lineare nulla a coefficienti non nulli di vettori linearmente indipendenti.

Esercizio 30. Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$.

$$\underline{v}_n \in Span\left(\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}\}\right) \implies Span\left(\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}\right) = Span\left(\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}\}\right)$$

Dimostrazione. '$\supseteq$' Ovvio.

'$\subseteq$' $\underline{v}_n \in Span\left(\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}\}\right) \implies \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ t.c.

$\underline{v}_n = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \underline{v}_{n-1}$

$$\begin{aligned} &\underline{v} \in Span\left(\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}\right) \implies \exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \underline{v} = \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n \\ &\quad \implies \underline{v} = \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_{n-1} \underline{v}_{n-1} + \beta_n(\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \underline{v}_{n-1}) \\ &\quad \implies \underline{v} \in Span\left(\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}\}\right) \end{aligned}$$

Definizione 62 (Base)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. Un insieme ordinato $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \subseteq V$ è detto base dello spazio vettoriale V se:

- $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti.
- $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ generano V.

Proposizione 25. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e*

$$\mathscr{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$$

una base di V. Allora $\forall \underline{v} \in V, \exists! \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ t.c.

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n$$

cioè ogni vettore può essere scritto in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base.

Dimostrazione. Siano $v = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n$, $v = \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n$ due modi di scrivere il vettore v come combinazione lineare dei vettori della una base. Allora

$$\begin{aligned} \underline{0}_V &= \underline{v} - \underline{v} = (\alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n) - (\beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n) \\ &= (\alpha_1 - \beta_1)\underline{v}_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\underline{v}_n \\ &\overset{\mathscr{B} \text{ è base}}{\implies} \alpha_1 - \beta_1 = \ldots = \alpha_n - \beta_n = 0_{\mathbb{K}} \end{aligned}$$

Quindi i coefficienti erano uguali.

Definizione 63 (Coordinate)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\underline{v} \in V$ e $\mathscr{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Poiché ogni vettore può essere scritto in modo unico come combinazione lineare dei vettori della base, i coefficienti della combinazione lineare sono unici, si dicono coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base $\mathscr{B}$ e si indicano con $[\underline{v}]_B$.

Proposizione 26. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\mathscr{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Allora l'applicazione $V \xrightarrow{[\ ]_{\mathscr{B}}} \mathbb{K}^n$ con la legge $\forall \underline{v} \in V, [\ ]_{\mathscr{B}}(\underline{v}) = [\underline{v}]_{\mathscr{B}}$ è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Siano $\underline{v}, \underline{w} \in V$ t.c.

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n, \\ \underline{w} &= \beta_1 \underline{v}_1 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n \end{aligned}$$

- L'applicazione è lineare.

$$\begin{aligned}[\underline{v}+\underline{w}]_{\mathscr{B}} &= [(\alpha_1+\beta_1)\underline{v}_1 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)\underline{v}_n]_{\mathscr{B}} \\ &= (\alpha_1+\beta_1, \ldots, \alpha_n+\beta_n) = [\underline{v}]_{\mathscr{B}} + [\underline{w}]_{\mathscr{B}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\lambda\underline{v}]_{\mathscr{B}} &= [\lambda\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \lambda\alpha_n\underline{v}_n]_{\mathscr{B}} \\ &= (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n) = \lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \lambda\,[\underline{v}]_{\mathscr{B}}\end{aligned}$$

- Vediamo intanto che è iniettiva.

$$v \in Ker\,([\ ]_{\mathscr{B}}) \implies \underline{v} = 0\underline{v}_1 + \ldots + 0\underline{v}_n \implies \underline{v} = \underline{0}_V$$

- Per vedere che è surgettiva basta pensare al fatto che $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, $\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n \in V$, e quindi le coordinate di questo elemento, visto che uniche, sono esattamente quelle desiderate.

Teorema 6. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\mathscr{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ una base di V e $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k \in V$ dei vettori di V.*

$$k > n \implies \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k \textit{ linearmente dipendenti}$$

Dimostrazione. $\forall i_1^k, \underline{w}_i \in V \implies \exists \alpha_{11}^{kn}$ t.c. $\begin{matrix}\underline{w}_1 = \alpha_{11}\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{1n}\underline{v}_n \\ \ldots \\ \underline{w}_k = \alpha_{k1}\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{kn}\underline{v}_n\end{matrix}$. Ci basta trovare una serie di coefficienti $\beta_1, \ldots, \beta_k$ non tutti nulli che rendano nulla la combinazione lineare

$$\beta_1\underline{w}_1 + \ldots + \beta_k\underline{w}_k = \beta_1(\alpha_{11}\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{1n}\underline{v}_n) + \ldots + \beta_k(\alpha_{k1}\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{kn}\underline{v}_n)$$

Ma visto che $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono una base e quindi linearmente indipendenti, questo è come chiedersi le soluzioni del sistema

$$\begin{cases}\beta_1\alpha_{11} + \ldots + \beta_k\alpha_{k1} = 0 \\ \qquad\vdots \\ \beta_1\alpha_{1n} + \ldots + \beta_k\alpha_{kn} = 0\end{cases}$$

In realtà ci interessa solo sapere se questo sistema ha soluzioni non nulle, ma sappiamo che le ha: infatti per ipotesi $k > n \implies$ abbiamo n equazioni e k incognite, una matrice con più colonne che righe, il numero di pivot può quindi essere al massimo n, che però è minore di k, quindi non possiamo trovare soluzioni esplicite, solo dipendenti da parametri. Quindi le soluzioni sono infinite e questo vuol dire che esistono coefficienti non nulli che annullino la nostra combinazione lineare.

Corollario 4. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale,*

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_1 &= \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \\ \mathscr{B}_2 &= \{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k\}\end{aligned}$$

due diverse basi di V, allora $n = k$.

Definizione 64 (Dimensione di uno spazio vettoriale)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale,

$$\mathscr{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

una base di V, visto che, per il corollario precedente, ogni base ha lo stesso numero di vettori, chiamiamo questo numero dimensione di V, diciamo cioè che V ha dimensione n.

9.2 Esercitazione

Esercizio 31. Sia $\mathcal{M}(3, \mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{R}^3 \ni \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Ridurre a scalini A.

b) Risolvere $AX = 0$

c) Risolvere $AX = \underline{v}$

Dimostrazione. *a*) Dopo aver scambiato alcune righe abbiamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3 = A_3 + 3A_1]{A_2 = A_2 - 2A_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -3 \\ 0 & -9 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{A_3 = A_3 + A_2 \\ A_3 = -A_3 \\ A_2 = A_2 - 8A_3}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_2 \leftrightarrow A_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 29 \end{pmatrix} = A'$$

b) Per risolvere $AX = 0$ dovremmo scalinare la matrice completa del sistema: dovremmo cioè fare sulla colonna dei termini noti le stesse operazioni che abbiamo fatto sulla matrice, ma visto che la colonna dei termini noti è nulla, qualsiasi operazione facciamo rimarrà sempre tale. Quindi risolviamo $A'X = 0$ che è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \\ 29x_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

c) Invece adesso la colonna dei termini noti non è nulla, quindi viene influenzata dalle operazioni elementari per riga, dobbiamo fare su $\underline{v}$ le stesse operazioni fatte su A, nello stesso ordine, poi risolveremo il sistema che ne viene fuori.

$$\left(A \,\vdots\, \underline{v} \right) \xrightarrow{op.el.} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 29 & 11 \end{array}\right)$$

$$\implies \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 - 4x_3 = -1 \\ 29x_3 = 11 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = \frac{5}{29} \\ x_2 = \frac{15}{29} \\ x_3 = \frac{11}{29} \end{cases}$$

Vedendo le soluzioni di $A'X = 0$ abbiamo anche scoperto che l'applicazione $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{L_A} \mathbb{R}^3$ è iniettiva, inoltre possiamo dire che

$$AX = \underline{w} \text{ ha soluzione } \iff \underline{w} \in \mathcal{C}_A = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Esercizio 32. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{M}(3, \mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} \lambda & 3 & -\lambda \\ 2\lambda & -\lambda & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Scalinare la matrice.

Dimostrazione. Visto che la matrice è parametrica dividiamo in due casi la risoluzione:

'$\lambda = 0$' Allora la matrice diventa: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, che è già scalinata, a meno di riordino.

'$\lambda \neq 0$' $\begin{pmatrix} \lambda & 3 & -\lambda \\ 2\lambda & -\lambda & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{A_2 = A_2 - 2A_1 \\ A_3 = A_3 - \frac{1}{\lambda}A_1}} \begin{pmatrix} \lambda & 3 & -\lambda \\ 0 & -\lambda-6 & 2+2\lambda \\ 0 & -2-\frac{3}{\lambda} & -1 \end{pmatrix}$
Dobbiamo adesso rifare due casi: $\lambda = -6, \lambda \neq -6$, nel primo caso la matrice è già scalinata, a meno di riordino di righe, nel secondo caso ci sono dei conti da fare, ma sono solo conti.

Lezione 10

Alcune riflessioni sulle basi

10.1 Teoria

Alcune considerazioni sulle basi

Definizione 65 (Base canonica)**.** Sia $\mathbb{K}$ un campo, si dice base canonica di $\mathbb{K}^n$ la base

$$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$$

La dimensione di $\mathbb{K}^n$ come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale è quindi n.
Il nome base canonica si utilizza solamente per $\mathbb{K}^n$.

Osservazione 34. Consideriamo il campo $\mathbb{C}$, questo può, in particolare, essere considerato un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale di dimensione 1 con la base $1 + \iota 0$, infatti $\forall \underline{v} \in \mathbb{C}, \underline{v} = \underline{v} \cdot (1 + \iota 0)$. Ma questo ragionamento non si può fare se si considera $\mathbb{C}$ come un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, in questo caso la sua base sarebbe $\{1, \iota\}$, infatti

$$\forall \underline{v} \in \mathbb{C}, \underline{v} = a + \iota b \text{ con } a, b \in \mathbb{R}$$

quindi $1, \iota$ generano, inoltre $a + \iota b = 0_{\mathbb{C}} \implies a = b = 0$, quindi i vettori sono linearmente indipendenti.
Quindi $\mathbb{C}$ è uno spazio vettoriale che ha dimensione diversa a seconda del campo di cui si considera spazio vettoriale.

Esempio 16. Sia $\mathbb{K}$ un campo, consideriamo $\mathcal{M}(2, \mathbb{K})$, dimostriamo che è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione 4.

Dimostrazione. $\mathcal{M}(2, \mathbb{K}) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, a, b, c, d \in \mathbb{K} \right\}$. $\forall M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(2, \mathbb{K})$,

$$M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi sicuramente

$$\mathcal{M}(2, \mathbb{K}) = Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Dobbiamo però controllare che questi siano linearmente indipendenti, ma

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies a = b = c = d = 0$$

Le quattro matrici sono quindi una base, e la dimensione di $\mathcal{M}(2,\mathbb{K})$ come $\mathbb{K}$-spazio vettoriale è 4.

Osservazione 35. Sia $\mathbb{K}$ un campo,

- Consideriamo $V = \mathcal{M}(p,q,\mathbb{K})$, l'esempio appena fatto mostra che V è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione pq; in particolare la base di V è:

$$B = \{E_{11},\ldots,E_{pq}\} \text{ con } [E_{ij}]_h^k \overset{def.}{=} \begin{matrix} 0 \iff (i,j)\neq(h,k) \\ 1 \iff (i,j)=(h,k) \end{matrix}$$

- Abbiamo già detto che $\mathbb{K}[x]$ è uno spazio vettoriale non finitamente generato, quindi non ha senso parlare di base, però $\forall n \in \mathbb{N}$ è finitamente generato:

$$\mathbb{K}_n[x] \overset{def.}{=} \{a_0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n\} = Span\left(\{1,x,\ldots,x^n\}\right)$$

  Inoltre $1,x,\ldots,x^n$ sono linearmente indipendenti, poiché se un polinomio è il polinomio nullo, allora tutti i suoi coefficienti devono essere zero. Cioè

$$a_0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n = 0_{\mathbb{K}_n[x]} \implies a_0 = \ldots = a_n = 0$$

  Questa base non prende il nome di base canonica, nome usato solamente per $\mathbb{K}^n$.

Esercizio 33. Sia $\mathbb{K}$ un campo, V,W dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, definiamo ora una somma e un prodotto per scalari: $(V\times W)\times(V\times W) \overset{+}{\longrightarrow} V\times W$, $\mathbb{K}\times(V\times W) \overset{\cdot}{\longrightarrow} V\times W$ con la legge:

$$\begin{aligned}&(\underline{v}_1,\underline{w}_1)+(\underline{v}_2,\underline{w}_2) = (\underline{v}_1+\underline{v}_2,\underline{w}_1+\underline{w}_2)\\ &\alpha(\underline{v},\underline{w}) = (\alpha\underline{v},\alpha\underline{w})\end{aligned}$$

- Verificare che $V\times W$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale con la somma e il prodotto per scalari appena definiti.
- Siano

$$\begin{aligned}\mathscr{B}_1 &= \{\underline{v}_1,\ldots,\underline{v}_n\}\\ \mathscr{B}_2 &= \{\underline{w}_1,\ldots,\underline{w}_m\}\end{aligned}$$

  delle basi di V,W; allora

$$\{(\underline{v}_1,\underline{0}_W),\ldots,(\underline{v}_m,\underline{0}_W),(\underline{0}_V,\underline{w}_1),\ldots,(\underline{0}_V,\underline{w}_m)\}$$

  è una base di $V\times W$.

Dimostrazione. - 1) Dobbiamo mostrare innanzitutto che $(V\times W,+)$ è un gruppo abeliano. Per farlo notiamo che la somma appena definita agisce separatamente sul vettore di V e sul vettore di W, inoltre sappiamo che $(V,+)$ e $(W,+)$ sono dei gruppi abeliani; quindi quando facciamo la somma di vettori appartenenti a $V\times W$ è come se facessimo due somme separate; inoltre $(\underline{0}_V,\underline{0}_W)$ è lo $\underline{0}_{V\times W}$,

$$\forall(\underline{v},\underline{w}) \in V\times W,\ -(\underline{v},\underline{w}) = (-\underline{v},-\underline{w})$$

la commutativa si ricava facilmente dalla commutatività in V e W.

2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall (\underline{v}, \underline{w}) \in V \times W$,

$$(\alpha\beta)(\underline{v}, \underline{w}) = \alpha(\beta\underline{v}, \beta\underline{w})$$

3) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall (\underline{v}, \underline{w}) \in V \times W$,

$$(\alpha + \beta)(\underline{v}, \underline{w}) = ((\alpha + \beta)\underline{v}, (\alpha + \beta)\underline{w}) = \alpha(\underline{v}, \underline{w}) + \beta(\underline{v}, \underline{w})$$

4) $\forall (\underline{v}, \underline{w}) \in V \times W$,

$$1_{\mathbb{K}}(\underline{v}, \underline{w}) = (\underline{v}, \underline{w})$$

Una base per il Ker

Riflessione 7. Sia $\mathbb{K}$ un campo, $A \in \mathcal{M}(r, n, \mathbb{K})$, per semplicità supponiamo A a scalini e con la prima colonna e l'ultima riga non nulle: se ci fossero state righe o colonne iniziali nulle le avremmo potute eliminare senza modificare nulla. Visto che A è a scalini, non ha righe finali nulle e ha esattamente r righe, sappiamo che ha r pivot. Consideriamo il sistema $AX = 0$, le sue soluzioni sono $Sol_0 = Ker\,(L_A)$, che sappiamo essere un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.
Risolvendo il sistema (partendo dall'ultima riga e quindi dal pivot più a destra) ci accorgiamo che ogni variabile è dipendente dalle variabili delle righe inferiori: se siamo alla j-esima troviamo il pivot della j esima riga in funzione delle variabili che abbiamo trovato nelle righe precedenti.
Quindi possiamo dividere le variabili della colonna delle soluzioni in due tipi: variabili dipendenti e variabili libere, mano a mano che si sale con le righe sempre più variabili saranno dipendenti dalle variabili libere delle righe trovate sotto. In particolare però si possono trovare solamente r variabili in funzione delle altre: è possibile ricavare solamente le variabili delle colonne che corrispondono alle colonne dei pivot: se nella colonna di una variabile non vi è un pivot, allora questa variabile sarà libera e le altre variabili dipenderanno da lei. Quindi abbiamo n variabili di cui $n - r$ libere.
Ora, nella colonna delle soluzioni, spostiamo in basso le righe che contengono variabili indipendenti (questo corrisponde, nella matrice, a spostare a destra le colonne che non contengono i pivot, cosa che possiamo fare, se ci ricordiamo di spostare, come stiamo facendo, anche le righe nella colonna delle soluzioni), avremo quindi

$$Sol_0 = \left\{ \underline{v} \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } \underline{v} = \begin{pmatrix} p_1(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ \vdots \\ p_r(x_{r+1}, \dots, x_n) \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ x_{r+1} \begin{pmatrix} ? \\ \hline 1 \\ 0 \\ | \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} ? \\ \hline 0 \\ | \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ t.c. } x_{r+1}, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\}$$

Possiamo quindi dire che queste colonne generano il sottospazio vettoriale $Sol_0 = Ker\,(L_A)$. Oltre che generatori sono anche linearmente indipendenti, e questo lo si può dire guardando le ultime righe: ciascuna colonna 'interessa' una e una sola riga tra le ultime, quindi se una loro combinazione lineare è nulla devono essere nulle le singole colonne. Quindi abbiamo dei generatori linearmente indipendenti: una base, costituita da $n - r$ vettori, dove, ricordiamo, r è il numero dei pivot e n il numero delle variabili (colonne).

Corollario 5. *Questa riflessione porta a diverse conclusioni:*

- *Sia $B \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{K})$, allora in ogni riduzione a scalini di B la matrice ottenuta avrà sempre lo stesso numero di pivot: infatti se esistessero C, D matrici equivalenti a B, a scalini, e con numeri di pivot diversi (h, k) avremmo che*
$$\{X \in \mathbb{K}^q \mid BX = 0\}$$
ha contemporaneamente due dimensioni distinte: $q - h$ e $q - k$.

- *Ci dice inoltre che le soluzioni di un qualsiasi sistema lineare omogeneo sono uno spazio vettoriale di dimensione $n - r$ dove n è il numero delle variabili del sistema e r è il numero dei pivot di una ridotta a scalini della matrice associata al sistema che stiamo considerando.*

Algoritmo 3 (Estrazione di una base)**.** *Sia $\mathbb{K}$ un campo, V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e*
$$S = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \subseteq V$$
un insieme finito di generatori di V. Allora da S si può estrarre una base $\mathscr{B}$ di V.

Dimostrazione. Dobbiamo costruire un insieme $\mathscr{B}$ di vettori linearmente indipendenti utilizzando vettori di S. Possiamo supporre $\forall i_1^n$, $\underline{v}_i \neq \underline{0}_V$, infatti se $\underline{v}_i = \underline{0}_V$ allora questo vettore è certamente dipendente e quindi si può togliere dall'insieme (Esercizio 30).
Prendiamo ora $\underline{v}_1$, questo è certamente indipendente, quindi lo aggiungiamo all'insieme $\mathscr{B}$ che stiamo costruendo. Considero adesso: $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$, ci sono due casi:

- sono linearmente indipendenti, allora aggiungo anche $\underline{v}_2$ a $\mathscr{B}$

- sono linearmente dipendenti, cioè $\underline{v}_2 \in Span\left(\{\underline{v}_1\}\right)$, allora, per l'esercizio già citato,
$$Span\left(\{\underline{v}_1\}\right) = Span\left(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}\right)$$
Quindi non metto $\underline{v}_2$ in B.

Ora consideriamo $\underline{v}_3$ e iteriamo il procedimento, fino ad arrivare a $\underline{v}_n$: si aggiungono solo i vettori che sono linearmente indipendenti da tutti gli altri, di volta in volta è necessario controllare se sono o non sono linearmente indipendenti.
Alla fine dell'algoritmo sappiamo di avere dei vettori linearmente indipendenti (abbiamo preso solo quelli), ma sappiamo anche che sono generatori, perché i vettori che scartato erano già combinazione lineare degli altri, quindi non avrebbero aggiunto altri vettori allo *Span*.

Corollario 6. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k\} \subseteq V$ un insieme di generatori, allora $n \leq k$. Quindi il numero dei vettori di una base (la dimensione della base) è il numero minimo di vettori generatori dello spazio vettoriale e il numero massimo di vettori indipendenti.*

10.2 Esercitazione

Esercizio 34. Siano $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_2[x] \ni \substack{p_1=\lambda x^2+2\lambda x+1\\ p_2=3x^2-\lambda x-2\\ p_3=-\lambda x^2+2x-2}$. Questi polinomi sono linearmente indipendenti?

Dimostrazione. Ricordiamoci che sono linearmente indipendenti

$$\iff \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0_{\mathbb{R}}$$

Ma consideriamo che:

$$\alpha_1 p_1+\alpha_2 p_2+\alpha_3 p_3 = (\lambda\alpha_1+3\alpha_2-\lambda\alpha_3)x^2+(2\lambda\alpha_1-\lambda\alpha_2+2\alpha_3)x+(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3)$$

Se i vettori sono linearmente indipendenti allora la soluzione del sistema è unica, visto che si tratta di una soluzione di un sistema omogeneo (e quindi l'insieme delle soluzioni è uno spazio vettoriale) questa soluzione può essere o $\{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$ oppure avere infiniti elementi. Il sistema di cui vogliamo soluzioni, visto che $1, x, x^2$ sono linearmente indipendenti, è:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \lambda\alpha_1 + 3\alpha_2 - \lambda\alpha_3 = 0 \\ 2\lambda\alpha_1 - \lambda\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ \lambda & 3 & -\lambda \\ 2\lambda & -\lambda & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo trovare quindi $Ker(L_A)$ con A la matrice parametrica appena vista. Scaliniamo la matrice e vediamo cosa otteniamo.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ \lambda & 3 & -\lambda \\ 2\lambda & -\lambda & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3=A_3-2\lambda A_1]{A_2=A_2-\lambda A_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3+2\lambda & \lambda \\ 0 & 3\lambda & 2+4\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[A_3=A_3+3A_2]{A_2=A_2-A_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & -3\lambda-2 \\ 0 & 9 & -4+25\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[A_3=A_3+\frac{1}{9}(\lambda-3)A_2]{A_2\leftrightarrow A_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 9 & -4+25\lambda \\ 0 & 0 & *\neq 0 \end{pmatrix}$$

Questo sistema ha quindi sempre 3 pivot, indipendentemente dalla λ, quindi

$$dim\ Sol_0 = (n-r) = 3-3 \implies Sol_0 = \{0_{\mathbb{R}_2[x]}\}$$

Esercizio 35. Sia $\mathbb{R}^3 \supseteq W_\lambda$,

$$W_\lambda = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ \lambda+1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\lambda-1 \\ 2-\lambda \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right) = Span\left(\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}\right)$$

Vediamo se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. I vettori sono linearmente indipendenti solamente se il sistema omogeneo che ricaviamo ponendo le loro coordinate come colonne di una matrice ha un'unica soluzione:

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda+1 & 2\lambda-1 \\ 1 & \lambda & \lambda+1 & 2-\lambda \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chiaramente questo sistema non ha un unica soluzione ($dim\ Sol_0 = n - r \geq 1$). Quindi i vettori sono linearmente dipendenti, cerchiamo di capire meglio la situazione e scaliniamo la matrice.

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda+1 & 2\lambda-1 \\ 1 & \lambda & \lambda+1 & 2-\lambda \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A'$$

La scalinatura porta quindi a una matrice a due scalini indipendente da λ, quindi non più parametrica. Proviamo a scrivere in forma diversa il sistema $A' \cdot X = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = -3x_2 - 4x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}$$

Cioè $Ker\,(L_A) = Ker\,(L_{A'})$ poiché i due sistemi sono equivalenti, e $Ker\,(L_{A'})$ è uno spazio vettoriale di dimensione due, come vediamo dal numero di pivot, inoltre possiamo anche scriverlo come

$$\begin{aligned} Ker\,(L_{A'}) &= \left\{ \mathbb{R}^4 \ni x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right) \end{aligned}$$

Ora viene una parte molto importante: tutti i vettori contenuti in $Ker\,(L_A) = Ker\,(L_{A'})$ sono vettori che rendono nulla la matrice (se moltiplichiamo A per un generico elemento di $Ker\,(L_A)$ otteniamo zero). Consideriamo adesso $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, essendo un generatore di certo appartiene a $Ker\,(L_A)$, quindi se lo moltiplichiamo per A otterremo zero, stesso discorso per l'altro vettore, questo ci dice quindi che

$$\begin{cases} -\underline{v}_1 - \underline{v}_2 + \underline{v}_3 = 0 \\ -2\underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_4 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \underline{v}_3 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \\ \underline{v}_4 = 2\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato i vettori indipendenti tra i generatori: $\underline{v}_1, \underline{v}_2$, quindi $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è una base di W_λ.

Esercizio 36. Sia $U_\alpha = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2\alpha \end{pmatrix}\right\}\right)$. Dire per quali λ e per quali α $U_\alpha \subseteq W_\lambda$ (quello dell'esercizio precedente).

Dimostrazione. Ci stiamo chiedendo per quali α e per quali λ,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 2\alpha \end{pmatrix} \in Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda+1 \\ \lambda+1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\lambda-1 \\ 2-\lambda \\ -1 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

Per trovare la risposta dobbiamo scalinare la matrice completa e vedere quando ha soluzione; visto che la matrice la abbiamo scalinata prima non stiamo a rifare tutti i conti; comunque basta scalinare la matrice completa, se avesse tre pivot allora ci sarebbe sempre soluzione e quindi $\forall \alpha U_\alpha \subseteq W_\lambda$; ma sappiamo che vi sono solamente due pivot. Quindi imponiamo l'ultima riga dei termini noti uguale a zero; gli α per i quali si annulla l'ultima riga della colonna dei termini noti sono gli α per i quali $U_\alpha \subseteq W_\lambda$.

Corollario 7. *Dall'esercizio precedente possiamo concludere che*

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^n \text{ sono base di } \mathbb{K}^n \iff \left(\underline{v}_1 \middle| \cdots \middle| \underline{v}_n \right) \text{ ha } n \text{ pivot}$$

cioè se il sistema omogeneo che rappresenta ha un' unica soluzione.

Proposizione 27. *Sia V uno spazio vettoriale e $U, W \subseteq V$ dei suoi sottospazi vettoriali in somma diretta. Sia inoltre $\mathscr{B}_U = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n\}$ base di U, $\mathscr{B}_W = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h\}$ base di W. Allora*

$$\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_h\} \text{ è base di } U \oplus W$$

Dimostrazione.

$$U = Span(\mathscr{B}_U), W = Span(\mathscr{B}_W) \implies U \oplus W = Span(\mathscr{B}_U \cup \mathscr{B}_W)$$

Per la definizione di somma diretta di spazi vettoriali. Ma dobbiamo vedere che questi vettori sono linearmente indipendenti.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{u}_i + \sum_{j=1}^{h} \beta_j \underline{w}_j = \underline{0}_V \implies U \ni \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underline{u}_i = -\sum_{j=1}^{h} \beta_j \underline{w}_j \in W$$

Ma l'unico elemento appartenente all'intersezione è $\underline{0}_V$ e inoltre i vettori di ciascun termine sono linearmente indipendenti. Quindi

$$\alpha_1 \underline{u}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{u}_n = \underline{0}_V = \beta_1 \underline{w}_1 + \ldots + \beta_h \underline{w}_h \implies \forall i_1^n, j_1^h,\ \alpha_i = \beta_j = 0$$

Esercizio 37. Siano $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, è vero che posso scrivere ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ in modo unico come combinazione lineare di questi tre vettori (è vero se e solo se questi tre vettori sono una base)?

Dimostrazione. La domanda che ci facciamo è equivalente a:

$$\forall \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ \overset{?}{\exists} x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Trasformiamo la nostra combinazione in una matrice e vediamo di risolverla lì. Questa combinazione è equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Quindi, la nostra domanda iniziale equivale a chiederci se esiste una soluzione unica a questo sistema, la soluzione esiste unica solo se la scalinatura della matrice completa ci dà 3 scalini e quindi possiamo ottenere tutte le variabili dai termini noti per risolvere il sistema. Quindi ci occupiamo di:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \alpha \\ 1 & 0 & -1 & \beta \\ 2 & -1 & -1 & \gamma \end{array} \right) \xrightarrow{*} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & \alpha \\ 0 & 1 & 3 & \alpha - \beta \\ 0 & 0 & 4 & \gamma + \alpha - 3\beta \end{array} \right)$$

La matrice ottenuta ha tre scalini, quindi abbiamo un unica soluzione per ogni vettore, in particolare, dato il vettore generico di prima, le sue coordinate nella base saranno:

$$x_3 = \frac{\gamma+\alpha-3\beta}{4}$$
$$x_2 = \frac{\alpha+5\beta-3\gamma}{4}$$
$$x_1 = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}$$

L'isomorfismo $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{[\ ]_{\mathscr{B}}} \mathbb{R}^3$ è dato dalla legge:

$$\left[\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\right]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{4}\\ \frac{\alpha+5\beta-3\gamma}{4}\\ \frac{\gamma+\alpha-3\beta}{4}\end{pmatrix}$$

La matrice che induce questo isomorfismo è quindi

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 5 & -3\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

Questa matrice è stata scelta affinché $[\ ]_{\mathscr{B}} = L_A$.

Proposizione 28. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-sp. vett. e $\mathscr{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \subseteq V$.*

$$\mathscr{B} \text{ è base di } V \iff \mathscr{B} \text{ è un insieme minimale di generatori di } V$$

Dimostrazione. '$\Rightarrow$' Supponiamo per assurdo che l'insieme $\mathscr{B}$ non sia minimale, allora sarebbe possibile togliere un elemento da $\mathscr{B}$ ed avere comunque un insieme di generatori. A meno di riordinare gli elementi possiamo dire che questo elemento è $\underline{v}_n$, quindi $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}\}$ generano tutto V; ma in particolare abbiamo:

$$\begin{aligned}\underline{v}_n \in V &\implies \exists \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \underline{v}_n = \alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{n-1}\underline{v}_{n-1}\\ &\implies \alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{n-1}\underline{v}_{n-1} - \underline{v}_n = \underline{0}_V\end{aligned}$$

Ma questo va contro le ipotesi: i vettori di una base sono linearmente indipendenti.

'$\Leftarrow$' Si deve mostrare che sono linearmente indipendenti. Supponiamo per assurdo che non sia vero. Allora:

$$\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \underline{0}_V$$

questi coefficienti non sono tutti nulli, a meno di riordino supponiamo $\alpha_n \neq 0_{\mathbb{K}}$. Allora:

$$\underline{v}_n = -\frac{\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{n-1}\underline{v}_{n-1}}{\alpha_n} \implies \underline{v}_n \in Span\left(\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}\}\right)$$

Quindi $\mathscr{B}$ non era un insieme minimo di generatori, contro le ipotesi.

Proposizione 29. *Sia $\mathbb{K}$ campo, V un $\mathbb{K}$-sp. vett. e $\mathscr{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \subseteq V$.*

$$\mathscr{B} \text{ è base di } V \iff \mathscr{B} \text{è un insieme massimale di vettori indipendenti}$$

Dimostrazione. '$\Rightarrow$' Supponiamo che l'insieme $\mathscr{B}$ non sia massimale, allora $\exists \underline{v}_k \notin \mathscr{B}$, $\underline{v}_k \in V$ t.c. $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{v}_k\}$ è un insieme di elementi linearmente indipendenti. Ma in particolare i vettori di $\mathscr{B}$, essendo una base, generano V, quindi si potrà scrivere $\underline{v}_k$ come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \implies \mathscr{B} \cup \{\underline{v}_k\}$ sono vettori linearmente dipendenti, visto che se ne può scrivere uno come combinazione lineare degli altri; assurdo perché avevamo ipotizzato $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n, \underline{v}_k\}$ linearmente indipendenti.

'$\Leftarrow$' Dobbiamo mostrare che $\mathscr{B}$ genera sapendo che è un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti. Sia $V \ni \underline{v} \notin \mathscr{B}$ un generico elemento di V, sappiamo che $\underline{v}$ è linearmente dipendente dai vettori di $\mathscr{B}$, poiché per ipotesi sono un insieme massimale di vettori linearmente indipendenti; allora $\underline{v}$ può essere scritto come combinazione lineare di vettori di $\mathscr{B} \implies \underline{v} \in Span(\mathscr{B})$, e visto che $\underline{v}$ era un vettore generico possiamo dire $V = Span(\mathscr{B})$.

Lezione 11

Completamento a base e formula di Grassman

11.1 Teoria

Altre caratterizzazioni delle basi

Riflessione 8. Ricordiamoci alcune cose che abbiamo detto nelle passate lezioni:

- Dato uno spazio vettoriale $\overline{V}$, tutte le sue basi hanno lo stesso numero di vettori, questo numero si dice dimensione di $\overline{V}$: $dim\ \overline{V}$.
- Abbiamo fatto esempi di basi.
- Da un qualsiasi insieme di generatori sappiamo ricavare una base tramite un algoritmo.

Quindi finora abbiamo estratto una base da un insieme di generatori e verificato se dei vettori che generano sono una base; ma cosa facciamo se non abbiamo dei generatori?

Proposizione 30. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, $\overline{V}$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \overline{V}$ dei vettori linearmente indipendenti;*

$$\underline{v} \notin Span\left(\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}\right) \implies \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v} \text{ indipendenti}$$

Dimostrazione. Siano $\alpha, \alpha_1 \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ t.c. $\alpha\underline{v} + \alpha_1\underline{v}_1 + \dots + \alpha_k\underline{v}_k = \underline{0}_{\overline{V}}$. Se fosse $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ allora avremmo:

$$\underline{v} = \frac{\alpha_1\underline{v}_1 + \dots + \alpha_k\underline{v}_k}{\alpha} \implies \underline{v} \in Span\left(\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}\right)$$

che va contro le ipotesi; abbiamo quindi: $0_{\mathbb{K}}\underline{v} + \alpha_1\underline{v}_1 + \dots + \alpha_k\underline{v}_k = \underline{0}_{\overline{V}}$ ma i vettori per ipotesi erano linearmente indipendenti, quindi $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0_{\mathbb{K}}$.

Lemma 3. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, $\overline{V}$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $dim\ \overline{V} = n$.*

$$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in \overline{V} \text{ indipendenti} \implies \mathscr{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \text{ è una base}$$

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che questi elementi generano $\overline{V}$; se non generassero allora esisterebbe

$$\underline{v} \in \overline{V} \text{ t.c. } \underline{v} \notin Span\left(\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}\right)$$

ma allora $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}$ sarebbero $n+1$ vettori indipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione n, assurdo.

Lemma 4. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, $\overline{V}$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale non finitamente generato; allora $\forall n \geq 1, \exists \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ vettori linearmente indipendenti in $\overline{V}$.*

Dimostrazione. Si dimostra per induzione:

i) Per $n = 1$ basta prendere $\underline{v}_1 \neq \underline{0}_{\overline{V}}$

ii) Sappiamo che esistono $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}$ vettori linearmente indipendenti,

$$\begin{aligned} Span\left(\left\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}\right\}\right) \subsetneq \overline{V} &\implies \exists \underline{v}_n \in \overline{V} \text{ t.c. } \underline{v}_n \notin Span\left(\left\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}\right\}\right) \\ &\implies \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \text{ indipendenti} \end{aligned}$$

Proposizione 31. *Sia $\overline{V}$ uno spazio vettoriale finitamente generato di dimensione n e $\overline{W}$ un sottospazio vettoriale di $\overline{V}$. Allora:*

- *$\overline{W}$ è finitamente generato.*
- *$dim\ \overline{W} \leq dim\ \overline{V}$*
- *$dim\ \overline{W} = dim\ \overline{V} \implies \overline{W} = \overline{V}$*

Dimostrazione.
- Se $\overline{W}$ non fosse finitamente generato esisterebbero (per il Lemma precedente) $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{n+1}$ vettori linearmente indipendenti, però, oltre ad essere indipendenti in $\overline{W}$ sarebbero anche indipendenti in $\overline{V}$, e sono $dim\ \overline{V} + 1$, assurdo.
- Se fosse $dim\ \overline{W} > dim\ \overline{V}$ potrei trovare $n+1$ vettori linearmente indipendenti in $\overline{W}$, e quindi anche in $\overline{V}$, assurdo.
- $dim\ \overline{W} = n \implies \exists \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ vettori linearmente indipendenti in $\overline{V}$; ma n vettori indipendenti in uno spazio vettoriale di $dim\ n$ sono una base, sono quindi base sia di $\overline{W}$ sia di $\overline{V}$, e due spazi vettoriali con la stessa base sono lo stesso spazio vettoriale.

Teorema 7. *Sia $\overline{V}$ uno spazio vettoriale finitamente generato di dimensione n.*

$$\begin{gathered} \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k \leq n} \in \overline{V} \textit{ linearmente indipendenti } \implies \exists \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n \textit{ t.c.} \\ \mathscr{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\} \textit{ è base di } \overline{V} \end{gathered}$$

Dimostrazione.
- Se $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ generano $\overline{V}$ allora ho finito: il loro insieme è una base.
- Se non generano $\overline{V}$ allora

$$\exists \underline{v}_{k+1} \in \overline{V} \text{ t.c. } \underline{v}_{k+1} \notin Span\left(\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}\right)$$

  Quindi $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{k+1}$ sono linearmente indipendenti.

Si itera il procedimento; l'algoritmo ha una fine perché, per ipotesi, $\overline{V}$ è finitamente generato.

Riflessione 9. Il grosso problema di questo metodo (concettualmente non complesso) sono i calcoli: non è per nulla facile vedere se un vettore appartiene o no allo *Span* di altri vettori, e nemmeno trovare un vettore che non vi appartiene, inoltre per ogni passaggio dobbiamo vedere se lo *Span* dei vettori che abbiamo è tutto $\overline{V}$ oppure no. Per questo di solito non si utilizza questo metodo.

Algoritmo di completamento a base

Algoritmo 4 (di completamento a base)**.** *Sia $\overline{V}$ uno spazio vettoriale finitamente generato di dimensione n, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k \in \overline{V}$ linearmente indipendenti, $\mathscr{B}_1 = \{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n\}$ una base di $\overline{V}$. Sappiamo che $\mathscr{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n\}$ è un insieme di generatori linearmente dipendenti.*
Possiamo però utilizzare l'algoritmo di estrazione di una base da un insieme di generatori; possiamo saltare i primi k vettori (perché sappiamo che $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$ sono linearmente indipendenti) poi, arrivati a $\underline{x}_1$, inizieremo a fare una cernita dei vettori indipendenti, dopo averne trovati $n-k$ abbiamo una base.

Corollario 8. *Sia $\overline{V}$ uno spazio vettoriale finitamente generato, ogni $\overline{W}$ sottospazio vettoriale di $\overline{V}$ ha un supplementare (che però non è unico).*

Dimostrazione. Sia $dim\ \overline{V} = n, dim\ \overline{W} = k \le n$ e $\mathscr{B}_1 = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k\}$ una base di $\overline{W}$. Sappiamo di poter completare $\mathscr{B}_1$ a base di $\overline{V}$. Esistono quindi

$$\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n-k} \text{ t.c. } \mathscr{B}_1 \cup \{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n-k}\} \text{ è base di } \overline{V}$$

Consideriamo

$$\overline{U} = Span\left(\{\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_{n-k}\}\right)$$

si verifica immediatamente che $\overline{V} = \overline{U} \oplus \overline{W}$.

Esercizio 38. Sia $\overline{V}$ uno spazio vettoriale, $\overline{U}, \overline{W}$ dei suoi sottospazi vettoriali tali che $\overline{V} = \overline{U} \oplus \overline{W}$ e

$$\mathscr{B}_1 = \{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_k\} \text{ base di } \overline{U}$$
$$\mathscr{B}_2 = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\} \text{ base di } \overline{W}$$

allora $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ è base di $\overline{V}$ e quindi

$$dim\ \overline{V} = dim\ \overline{U} + dim\ \overline{W}$$

Dimostrazione.

- Dimostriamo innanzitutto che i vettori di $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ generano tutto $\overline{V}$.

$$\overline{V} = \overline{U} \oplus \overline{W} \implies \forall \underline{v} \in \overline{V},\ \exists \underline{u} \in \overline{U}, \underline{w} \in \overline{W} \text{ t.c. } \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$$

Ma $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ sono basi di $\overline{U}, \overline{W}$ quindi $\underline{u}, \underline{w}$ si possono scrivere come combinazione lineare di elementi di $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$, anche $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ può essere scritto come combinazione di vettori appartenenti all'unione delle basi.

- Dimostriamo la lineare indipendenza dei vettori di $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$.

$$\overbrace{\alpha_1 \underline{u}_1 + \dots + \alpha_k \underline{u}_k}^{\underline{u} \in \overline{U}} + \overbrace{\beta_1 \underline{w}_1 + \dots + \beta_m \underline{w}_m}^{\underline{w} \in \overline{W}} = \underline{0}_V$$
$$\implies \overline{U} \ni \underline{u} = -\underline{w} \in \overline{W} \implies \underline{u} = \underline{w} = \underline{0}_{\overline{V}}$$

Quindi tutti i coefficienti sono zero per la lineare indipendenza dei vettori di $\mathscr{B}_1$ e di $\mathscr{B}_2$.

Riflessione 10. I ragionamenti che abbiamo fatto fino ad ora sui sottospazi vettoriali possono essere utili: è più facile lavorare su tanti sottospazi vettoriali piccoli anzi che su un unico spazio vettoriale più grande, è vero che dobbiamo sapere molte cose per lavorarci (che siano in somma diretta e conoscere una base dei vari spazi vettoriali) ma è utile saperci lavorare.

Formula di Grassmann

Teorema 8 (Formula di Grassmann)**.** *Siano* $\mathbb{K}$ *campo,* $\overline{V}$ *un* $\mathbb{K}$*-spazio vettoriale e* $\overline{U}, \overline{W}$ *dei sottospazi vettoriali di* $\overline{V}$ *di dimensione finita. Allora*

$$dim\ \overline{U} + \overline{W} = dim\ \overline{U} + dim\ \overline{W} - dim\ \overline{U} \cap \overline{W}$$

Dimostrazione. Siano $h = dim\ \overline{U},\ k = dim\ \overline{W},\ s = dim\ \overline{U} \cap \overline{W}$. Devo produrre una base di $\overline{U} + \overline{W}$ che abbia $h + k - s$ vettori.
Considero

$$\mathscr{B}_{\overline{U} \cap \overline{W}} = \{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_s\}$$

base di $\overline{U} \cap \overline{W}$; questi s vettori in particolare stanno in $\overline{U}$ e sono vettori linearmente indipendenti, posso quindi completarli a base di $\overline{U}$; inoltre posso fare lo stesso ragionamento con $\overline{W}$, ottengo quindi:

$$\mathscr{B}_{\overline{U}} = \{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_s, \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_{h-s}\} \text{ base di } \overline{U}$$
$$\mathscr{B}_{\overline{W}} = \{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_s, \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{k-s}\} \text{ base di } \overline{W}$$

Se riusciamo a provare che

$$\begin{aligned} \mathscr{B} &= \{\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_s, \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_{h-s}, \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{k-s}\} \\ &= \mathscr{B}_{\overline{U} \cap \overline{W}} \cup (\mathscr{B}_{\overline{W}} - \mathscr{B}_{\overline{U} \cap \overline{W}}) \cup (\mathscr{B}_{\overline{U}} - \mathscr{B}_{\overline{U} \cap \overline{W}}) \end{aligned}$$

è una base di $\overline{U} + \overline{W}$ abbiamo la tesi.

- $\mathscr{B}$ è un insieme di generatori; vero per la definizione di spazio somma: lo spazio dei vettori che si possono ottenere sommando un vettore di U e un vettore di W. Preso un generico vettore $\underline{v} \in \overline{U} + \overline{W}$ posso scrivere questo vettore come $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ con $\underline{u} \in \overline{U}, \underline{w} \in \overline{W}$; ma posso scrivere sia $\underline{u}$ che $\underline{w}$ come combinazione lineare di vettori di $\mathscr{B}$ (che contiene una base di $\overline{U}$ e una base di $\overline{W}$), quindi anche $\underline{v}$.

- $\mathscr{B}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti. Consideriamo:

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{s} \alpha_i \underline{x}_i}^{\underline{z} \in \overline{U} \cap \overline{W}} + \overbrace{\sum_{j=1}^{h-s} \beta_j \underline{u}_j}^{\underline{u} \in U} + \overbrace{\sum_{h=1}^{k-s} \gamma_h \underline{w}_h}^{\underline{w} \in \overline{W}} = \underline{0}_{\overline{V}}$$

$$\begin{aligned} \underline{z} + \underline{u} + \underline{w} = \underline{0}_{\overline{V}} &\implies \underline{z} + \underline{u} = -\underline{w} \text{ ma } \underline{z} + \underline{u} \in \overline{U},\ -\underline{w} \in \overline{W} \\ &\implies \underline{z} + \underline{u} \in \overline{U} \cap \overline{W} \ni -\underline{w} \\ &\implies \exists \delta_1, \ldots, \delta_n \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \underline{w} = \delta_1 \underline{x}_1 + \ldots + \delta_s \underline{x}_s \\ &\implies \underline{u} + \underline{z} + (\delta_1 \underline{x}_1 + \ldots + \delta_s \underline{x}_s) = \underline{0}_{\overline{V}} \\ &\implies \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i + \delta_i) \underline{x}_i + \sum_{j=1}^{h-s} \beta_i \underline{u}_i = \underline{0}_{\overline{V}} \end{aligned}$$

Ma questi vettori sono vettori di una base di $\overline{U}$, sono quindi linearmente indipendenti. Quindi $\beta_1 = \ldots = \beta_{h-s} = 0_{\mathbb{K}}$. A questo punto abbiamo:

$$\underline{z} + \underline{w} = \alpha_1 \underline{x}_1 + \cdots + \alpha_s \underline{x}_s + \gamma_1 \underline{w}_1 + \cdots + \gamma_{k-s} \underline{w}_{k-s} = \underline{0}_{\overline{V}}$$

Ma questi vettori sono nuovamente linearmente indipendenti. Abbiamo quindi

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{k-s} = 0_{\mathbb{K}}$$

Forme parametrica e cartesiana

Riflessione 11 (Forma parametrica e cartesiana di sottospazi di $\mathbb{K}^n$). Sia $\mathbb{K}$ un campo. Quali sono i modi in cui possiamo rappresentare un sottospazio vettoriale $\overline{W}$ di $\mathbb{K}^n$?

- La prima forma, detta forma parametrica, consiste nel vedere $\overline{W}$ come *Span* di vettori, non obbligatoriamente indipendenti.

  $$\overline{W} = Span\left(\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_p\}\right) \iff \overline{W} = \{t_1 \underline{w}_1 + \ldots + t_p \underline{w}_p \text{ t.c. } t_i \in \mathbb{K}\}$$

  Consideriamo allora l'applicazione $\mathbb{K}^p \xrightarrow{L_A} \mathbb{K}^n$ che manda un generico vettore $\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$ nel vettore $t_1 \underline{w}_1 + \ldots + t_p \underline{w}_p = \underline{x} \in \mathbb{K}^n$. Chiaramente questa applicazione è lineare ed è indotta da una matrice, chiamiamo questa matrice A. Visto che $\overline{W} = Imm\,(L_A)$, per come abbiamo definito $\overline{W}$ e L_A, allora $\overline{W} = \mathcal{C}_A$: lo spazio delle colonne di A. Vediamo inoltre che $A = \left(\begin{array}{c|c|c} \underline{w}_1 & \cdots & \underline{w}_p \end{array}\right)$. Quindi vediamo $\overline{W}$ come spazio delle colonne della matrice che ha come colonne i vettori dell'insieme di cui $\overline{W}$ è *Span*.

- La seconda forma, detta forma cartesiana, consiste nel vedere $\overline{W}$ come Ker di un' applicazione lineare. Cioè $\overline{W} = \{\underline{x} \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } B\underline{x} = 0\} = Ker\,(B)$, per una data matrice B. Le equazioni del sistema $BX = 0$ si dicono equazioni cartesiane di $\overline{W}$.

Osservazione 36. Vediamo ora come passare da forma cartesiana a forma parametrica e viceversa.

- Per passare da forma cartesiana a parametrica semplicemente si risolve il sistema delle equazioni cartesiane del sottospazio vettoriale.

- Più complicato invece il passaggio inverso. Facciamo prima un esempio e diamo poi un procedimento generale.

  Esempio 17. Sia $\overline{W} \subseteq \mathbb{R}^3$ il sottospazio vettoriale

  $$\overline{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{smallmatrix} x=t \\ y=t+s \\ z=3t+2s \end{smallmatrix} \right\} = Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

Quindi abbiamo un sistema in 2 incognite e 3 equazioni.

$$\text{Il sistema} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 1 & 1 & \vdots & y \\ 3 & 2 & \vdots & z \end{pmatrix} \text{ ha soluzione } \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & \vdots & y-x \\ 0 & 2 & \vdots & z-3x \end{pmatrix} \text{ ha soluzione } \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & x \\ 0 & 1 & \vdots & y-x \\ 0 & 0 & \vdots & z-x-2y \end{pmatrix} \text{ ha soluzione } \overset{Thm.5}{\Longleftrightarrow}$$

$$x + 2y - z = 0$$

Quindi $\overline{W} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \; x + 2y - z = 0 \right\} = Ker\,(B)$ con $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \end{smallmatrix} \right)$.

In generale sia $\mathbb{K}$ campo e $\overline{W} = Imm\,(L_A)$, con $A \in \mathcal{M}(n, p, \mathbb{K})$; quindi $\overline{W} = \{\underline{X} \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } \exists \underline{Y} \in \mathbb{K}^p t.c.\ A\underline{Y} = \underline{X}\}$. A questo punto riduco a scalini $\left(A \vdots \underline{X} \right)$ ottenendo $\left(S \vdots \underline{T} \right)$. Sia r il numero dei pivot di S; il sistema è risolubile se e solo se le ultime $n - r$ righe di $\underline{T}$ sono nulle; le equazioni cartesiane di $\overline{W}$ sono le equazioni che rendono nulli questi ultimi $n - r$ termini della colonna dei termini noti. Trovo quindi $n - r$ equazioni che descrivono $\overline{W}$.

11.1.1 Un primo incontro con le traslazioni

Esercizio 39. Sia $\mathbb{K}$ un campo, $\overline{V} = \mathbb{K}^n$ e $\underline{w} \in \overline{V}$. Abbiamo già definito l'applicazione $\overline{V} \xrightarrow{\tau_w} \overline{V}$ con la seguente legge: $\forall \underline{v} \in \overline{V}, \tau_{\underline{w}}(\underline{v}) = \underline{v} + \underline{w}$. Dimostrare:

- $\forall \underline{w} \in \overline{V} \tau_{\underline{w}}^{-1} = \tau_{-\underline{w}}$
- $\forall \underline{w} \in \overline{V}, \tau_{\underline{w}}$ è bigettiva.
- $\forall \underline{v}, \underline{w} \in \overline{V}, \tau_{\underline{v}+\underline{w}} = \tau_{\underline{v}} \circ \tau_{\underline{w}} = \tau_{\underline{w}} \circ \tau_{\underline{v}}$

Dimostrazione. - Vediamo che $\forall \underline{v}, \underline{w} \in \overline{V}, \; \left(\tau_{\underline{w}} \circ \tau_{-\underline{w}}\right)(\underline{v}) = \underline{v}$.

$$\left(\tau_{\underline{w}} \circ \tau_{-\underline{w}}\right)(\underline{v}) = \tau_{\underline{w}}(\tau_{-\underline{w}}(\underline{v})) = \tau_{\underline{w}}(\underline{v} - \underline{w}) = \underline{v}$$

- Abbiamo appena mostrato che ha un'inversa. Quindi chiaramente è bigettiva.
- $\forall \underline{v}, \underline{w}, \underline{z} \in V$,

$$\begin{aligned} \tau_{\underline{v}+\underline{w}}(\underline{z}) &= \left(\underline{z} + (\underline{v} + \underline{w})\right) = \left((\underline{z} + (\underline{w} + \underline{v})\right) = \tau_{\underline{v}+\underline{w}}(\underline{z}) \\ &= \left((\underline{z} + \underline{v}) + \underline{w}\right) = \tau_{\underline{w}}(\underline{z} + \underline{v}) = \tau_{\underline{w}}\left(\tau_{\underline{v}}(\underline{x})\right) \\ &= \tau_{\underline{w}} \circ \tau_{\underline{v}}(\underline{z}) \end{aligned}$$

Che valga la commutativa si vede dall'espressione tra parentesi: se si porta avanti, esattamente come si è fatto con la sua simile, si ottiene formalmente la commutativa.

Proposizione 32. *Sia* $\overline{V}$ *uno spazio vettoriale e* $\mathcal{T}\left(\overline{V}\right) = \{\tau_{\underline{v}}$ *t.c.* $\underline{v} \in \overline{V}\}$. *Allora* $\left(\mathcal{T}\left(\overline{V}\right), \circ\right)$ *è un gruppo abeliano.*

Dimostrazione. - L'associativa vale, in generale, per la composizione.

- L'elemento neutro è rappresentato da $\tau_{\underline{0}_{\overline{V}}}$.
- Abbiamo dimostrato nell'esercizio precedente l'esistenza dell'inverso.
- Abbiamo dimostrato la commutatività.

Definizione 66 (Spazio affine)**.** Sia $\overline{V}$ uno spazio vettoriale; $H \subseteq \overline{V}$ si dice sottospazio affine di $\overline{V}$ se $\exists \underline{v} \in H$, $\exists \overline{W} \subseteq \overline{V}$ sottospazio vettoriale di $\overline{V}$ tali che:

$$H = \tau_{\underline{v}}(W) = \{\underline{v} + \underline{w} \text{ t.c. } \underline{w} \in \overline{W}\}$$

Esempio 18. Sia $\mathbb{K}$ campo e A una generica matrice di $\mathcal{M}(n, p, \mathbb{K})$, le soluzioni del sistema $AX = B$ abbiamo visto (Riflessione 6) che sono un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$. Data infatti una soluzione particolare tutte le altre sono ottenute sommando a questa una soluzione appartenente allo spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato.

Esempio 19. Consideriamo una generica retta r in $\mathbb{R}^3$, sia r_0 la retta parallela a r passante per l'origine; se $\underline{P}_0 \in r$ allora $r = \tau_{\underline{P}_0}(r_0)$. Quindi se $\underline{v}_0 \in r_0, \underline{v}_0 \neq \underline{0}_{\mathbb{R}^3}$ (e quindi $r_0 = Span\left(\{\underline{v}_0\}\right)$, visto che $\underline{v}_0 \neq 0_{\mathbb{R}^3}$) posso scrivere:

$$r = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \underline{x} = \underline{P}_0 + t\underline{v}_0 \text{ t.c. } t \in \mathbb{R}\}$$

11.2 Esercitazione

Facciamo un esempio di quanto può essere utile la formula di Grassmann.

Esempio 20. Siano

$$\mathbb{R}^4 \supseteq \overline{W} = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$\mathbb{R}^4 \supseteq \overline{U} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } \begin{matrix} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{matrix}\right\}$$

Cerchiamo di trovare $\overline{U} + \overline{W}$

Dimostrazione. Innanzitutto portiamo in forma parametrica $\overline{W}$. $\overline{W} = Imm\left(L_A\right) = \mathcal{C}_A$, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{Quindi } \underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \overline{W} \iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \text{ è risolubile}$$

$$\iff \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 + 3x_2 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 + 2x_2 \end{array}\right) \text{ è risolubile}$$

$$\iff \begin{cases} x_3 - x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_4 - x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Quindi

$$\overline{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } \begin{smallmatrix} x_3 - x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_4 - x_1 + 2x_2 = 0 \end{smallmatrix} \right\}$$

Adesso possiamo anche sapere, velocemente, gli elementi dell'intersezione:

$$\begin{aligned} \overline{U} \cap \overline{W} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } \begin{smallmatrix} x_3 - x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_4 - x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{smallmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0 \right\} \end{aligned}$$

Quindi in particolare $\overline{U} + \overline{W}$ è una somma diretta, quindi $\overline{U} \oplus \overline{W}$.
Consideriamo quindi che:

- $dim\ \overline{W} = 2$. Facile da vedere.
- Vediamo quanto vale $dim\ \overline{U}$; nel sistema che lo descrive ci ricaviamo x_1, x_2 da x_3, x_4 e poi diamo a x_3, x_4 alternativamente il valore di $1, 0$ e otteniamo i vettori dei quali $\overline{U}$ è *Span*. Quindi $\overline{U} = Span \left(\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$, vettori chiaramente indipendenti. Quindi $dim\ \overline{U} = 2$.

Ora utilizziamo Grassmann:

$$dim\ \overline{U} + \overline{W} = dim\ \overline{U} + dim\ \overline{W} - dim\ \overline{U} \cap \overline{W} \implies dim\ \overline{U} + \overline{W} = 2 + 2 - 0$$

Quindi $\overline{U} + \overline{W}$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 4 di uno spazio vettoriale di dimensione 4, quindi è tutto lo spazio vettoriale: $\overline{U} \oplus \overline{W} = \mathbb{R}^4$. Un altro modo per vedere se questi 4 vettori sono indipendenti è metterli in una matrice e scalinarla, se la matrice ha esattamente 4 pivot (uno per ogni colonna), allora sono indipendenti.

Esercizio 40. Sia $\mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R}) \ni B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} \right)$. Sia inoltre $\overline{W} = \{A \in \mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R}) \text{ t.c. } AB = BA\}$. Cerchiamo di capire se $\overline{W}$ è sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R})$, e se si, di trovare la sua dimensione.

Dimostrazione. Consideriamo una generica matrice $\mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R}) \ni A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right)$.

$$\begin{aligned} AB &= \left(\begin{smallmatrix} a-b & a \\ c-d & c \end{smallmatrix} \right) \\ BA &= \left(\begin{smallmatrix} a+c & b+d \\ -a & -b \end{smallmatrix} \right) \end{aligned}$$

Quindi

$$\overline{W} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R}) \text{ t.c. } \begin{smallmatrix} a-b=a+c \\ a=b+d \\ c-d=-a \\ c=-b \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) \in \mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R}) \text{ t.c. } \begin{smallmatrix} a=b+d \\ c=-b \end{smallmatrix} \right\}$$

Questo chiarisce che $\overline{W}$ è un sottospazio vettoriale: è soluzione di un sistema omogeneo (se sposto a sinistra le b e le d). Scritto come *Span* di vettori diventa: $\overline{W} = Span \left(\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) \right\} \right)$.

Lezione 12

Approfondimento suoi sottospazi affini

12.1 Teoria

Sottospazi affini come traslazione di spazi vettoriali

Proposizione 33. *Sia $\overline{V}$ uno spazio vettoriale, $\overline{W}$ un sottospazio vettoriale di $\overline{V}$ e $\underline{v} \in \overline{V}$. Consideriamo ora $\dot{H} = \underline{v} + \overline{W} = \tau_{\underline{v}}(\overline{W})$, sottospazio affine di $\overline{V}$.*

1) $\overline{W} = \left\{\underline{x} - \underline{y} \text{ t.c. } \underline{x}, \underline{y} \in \dot{H}\right\}$. Cioè $\overline{W}$ è l'insieme delle differenze dei vettori che stanno in $\dot{H}$. Di conseguenza $\overline{W}$ è univocamente determinato da $\dot{H}$.

2) $\forall \underline{x} \in \dot{H}, \dot{H} = \tau_{\underline{x}}(\overline{W})$. Cioè si può scrivere $\dot{H}$ come traslazione di un qualsiasi punto di $\dot{H}$ stesso. Il vettore di cui $\dot{H}$ è traslazione, quindi, è tutt'altro che unico.

Dimostrazione. 1) '$\subseteq$' $\underline{w} \in \overline{W} \implies \underline{v} + \underline{w} \in \dot{H}$ per definizione, inoltre $\underline{v} \in \dot{H}$, quindi

$$\underline{w} = (\underline{v} + \underline{w}) - \underline{v} \in \left\{\underline{x} - \underline{y} \text{ t.c. } \underline{x}, \underline{y} \in \dot{H}\right\}$$

'$\supseteq$' $\underline{h}, \underline{k} \in \dot{H} \implies h = \underline{v} + \underline{w}_1, k = \underline{v} + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in \overline{W}$. Allora

$$\underline{h} - \underline{k} = (\underline{v} + \underline{w}_1) - (\underline{v} + \underline{w}_2) = \underline{w}_1 - \underline{w}_2 \in \overline{W}$$

2) '$\supseteq$' $\underline{x} \in \dot{H} \implies \underline{x} = \underline{v} + \underline{w}$ t.c. $\underline{w} \in \overline{W}$, $\forall \underline{h}$ t.c. $\underline{h} = \underline{x} + \underline{w}_1$ con $\underline{w}_1 \in \overline{W}$ si ha che:

$$\underline{h} = \underline{v} + \overbrace{\underline{w} + \underline{w}_1}^{\in \overline{W}} \implies \underline{h} \in \dot{H}$$

'$\subseteq$' Prendiamo un generico elemento $\underline{p} \in \dot{H}$, dobbiamo mostrare che ogni elemento di $\dot{H}$ può essere scritto come $\underline{p} + \underline{w}$ con $\underline{w} \in \overline{W}$. Avremo

$\underline{p} = \underline{v} + \underline{w}_1$ con $\underline{w}_1 \in \overline{W}$, sia $\underline{h} = \underline{v} + \underline{w}_2$ con $\underline{w}_2 \in \overline{W}$ un generico elemento di $\dot{H}$. Allora

$$\underline{h} = \underline{p} + \overbrace{(\underline{w}_2 - \underline{w}_1)}^{\in \overline{W}}$$

Forma parametrica e cartesiana

Definizione 67 (Giacitura)**.** La proposizione precedente ci garantisce che, dato uno spazio affine, è univocamente determinato lo spazio vettoriale del quale questo è traslazione; quindi è ben definita la seguente definizione: sia $\overline{V}$ uno spazio vettoriale e $\dot{H}$ un suo sottospazio affine, si dice giacitura di $\dot{H}$ il sottospazio vettoriale di cui $\dot{H}$ è traslazione.

Osservazione 37. Sia $\mathbb{K}$ campo, $\overline{W} \subseteq \mathbb{K}^n$ un sottospazio vettoriale di dimensione q, $\underline{v} \in \mathbb{K}^n$ e $\dot{H} = \tau_{\underline{v}}(\overline{W})$.
Come per gli spazi vettoriali abbiamo due modi per rappresentare lo spazio affine: in forma parametrica o in forma cartesiana.

- Forma parametrica. Sia $\overline{W} = Imm\,(L_A) = \mathcal{C}_A$ per una qualche matrice $A \in \mathcal{M}(n, q, \mathbb{K})$, cioè $\overline{W} = \{A \cdot Y \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } Y \in \mathbb{K}^q\}$. Quindi possiamo scrivere il sottospazio affine come:

$$\dot{H} = \{\underline{v} + A \cdot Y \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } Y \in \mathbb{K}^q\}$$

- Forma cartesiana. $\overline{W} = Ker\,(L_B)$ per una qualche $B \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{K})$. Cioè $\overline{W} = \{Y \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } B \cdot Y = 0\}$. Quindi possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned}\dot{H} &= \{\underline{v} + Y \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } B \cdot Y = 0\} \\ &= \left\{X \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } X - \underline{v} \in \overline{W}\right\} \\ &= \{X \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } B \cdot (X - \underline{v}) = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } B \cdot X = B \cdot \underline{v}\}\end{aligned}$$

Esercizio 41. Calcolare le equazioni cartesiane del sottospazio affine seguente: Sia

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^4 \supseteq \dot{H} &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \begin{smallmatrix} x_1 = 2+s \\ x_2 = 1+2s+t \\ x_3 = 1+t \\ x_4 = s+t \end{smallmatrix} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{C}_A \text{ con } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dimostrazione. Rappresentiamo la giacitura di $\dot{H}$ (che chiameremo $\overline{W}$) in forma cartesiana. $\overline{W} = \mathcal{C}_A$; consideriamo ora $X \in \mathbb{R}^4$,

$$
\begin{aligned}
X = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \overline{W} &\iff \exists Y \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } X = AY \\
&\iff (\, A \,\vdots\, X \,) \text{ ha soluzione} \\
&\iff \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & x_3 \\ 1 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow{*} \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 2x_1 - x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 + x_4 \end{array}\right) \text{ ha soluzione} \\
&\iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Possiamo quindi dire, detta $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$:

$$
\overline{W} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \begin{smallmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{smallmatrix} \right\} = Ker\,(B)
$$

$$
\dot{H} = \left\{ X \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } B \cdot X = B \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{smallmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1 \end{smallmatrix} \right\}
$$

Definizione 68 (Retta, piano, iperspazio)**.** Sia $\mathbb{K}$ campo e $\dot{H}$ un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$. $\dot{H}$ si dice:

- retta, se $dim\ \dot{H} = 1$.
- piano, se $dim\ \dot{H} = 2$.
- iperpiano, se $dim\ \dot{H} = n - 1$.

Esercizio 42. Sia $\mathbb{K}$ campo e $P_0, P_1 \in \mathbb{K}^n$; scrivere un'equazione parametrica della retta $r \subseteq \mathbb{K}^n$ che congiunge i punto P_0, P_1.

Dimostrazione. Sia $\overline{W}$ la giacitura di r, abbiamo detto che $P_0 - P_1 \in \overline{W}$, visto che $\overline{W}$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 1 posso scrivere $\underline{v} = P_0 - P_1$ e $\overline{W} = Span\,(\{\underline{v}\})$, quindi $r = \left\{P_0 + \underline{w} \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } \underline{w} \in \overline{W}\right\} = \{P_1 + s\underline{v} \text{ t.c. } s \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 43. Sia $\mathbb{K}$ campo e $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{K}^n$; scrivere un'equazione parametrica del piano $\pi \subseteq \mathbb{K}^n$ che contiene i punti P_1, P_2, P_3.

Dimostrazione. Sia $\overline{W}$ la giacitura di π, abbiamo detto che $P_2 - P_1 = \underline{v} \in \overline{W} \ni \underline{z} = P_3 - P_1$; visto che $\overline{W}$ è un sottospazio vettoriale di dimensione 2 (e $\underline{v} \notin Span\,(\{\underline{z}\})$, altrimenti i punti sarebbero allineari) posso scrivere $\overline{W} = Span\,(\{\underline{v}, \underline{z}\})$, quindi $\pi = \left\{\underline{v} + \underline{w} \in \mathbb{K}^n \text{ t.c. } \underline{w} \in \overline{W}\right\} = \{P_1 + s\underline{v} + t\underline{z} \text{ t.c. } s, t \in \mathbb{R}\}$.

Definizione 69 (Rette incidenti, parallele, sghembe)**.** Due rette si dicono:

- Parallele: se hanno la stessa giacitura.
- Incidenti: se hanno giacitura diversa e un intersezione non vuota.
- Sghembe: se hanno giaciture diversa e intersezione vuota.

Una retta e un piano sono paralleli se la giacitura della retta è contenuta nella giacitura del piano.

Un teorema sulle applicazioni

Teorema 9. *Sia $\mathbb{K}$ campo, $\overline{V}, \overline{W}$ dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $\mathscr{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di $\overline{V}$ e $\mathscr{C} = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ dei vettori in $\overline{W}$ (possono anche essere tutti nulli o tutti uguali, vettori qualsiasi).*
Allora $\exists! \overline{V} \xrightarrow{f} \overline{W}$ applicazione tale che:

- *f è lineare.*
- *$\forall i_1^n,\ f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$*

Dimostrazione. - Esistenza.
$\forall \underline{v} \in \overline{V}, \exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n$ t.c. $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$. Poniamo

$$f(\underline{v}) \overset{def.}{=} \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_n \underline{w}_n$$

Dimostriamo la linearità di questa f.

- Siano $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n, \underline{z} = \beta_1 \underline{v}_1 + \dots + \beta_n \underline{v}_n \in \overline{V}$. Allora

$$\begin{aligned} f(\underline{v} + \underline{z}) &= f((\alpha_1 + \beta_1)\underline{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)\underline{v}_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)\underline{w}_1 + \dots + (\alpha_1 + \beta_1)\underline{w}_1 \\ &= \alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_n \underline{w}_n + \beta_1 \underline{w}_1 + \dots + \beta_n \underline{w}_n \\ &= f(\underline{v}) + f(\underline{w}) \end{aligned}$$

- Siano $\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \in \overline{V}, \gamma \in \mathbb{K}$. Allora

$$\begin{aligned} f(\gamma \underline{v}) &= f((\gamma\alpha_1)\underline{v}_1 + \dots + (\gamma\alpha_n)\underline{v}_n) \\ &= (\gamma\alpha_1)\underline{w}_1 + \dots + (\gamma\alpha_n)\underline{w}_n \\ &= \gamma(\alpha_1 \underline{w}_1 + \dots + \alpha_n \underline{w}_n) = \gamma f(\underline{v}) \end{aligned}$$

Notiamo inoltre che, con questa definizione, $\forall i_1^n, f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$: visto che le coordinate di $\underline{v}_i$ è una colonna di zeri tranne alla i-esima posizione, dove c'è un 1.

- Unicità.
Poiché $\forall i_1^n, f(\underline{v}_i) = \underline{w}_i$ e l'applicazione è lineare, allora $\forall \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \in \overline{V}$,

$$f(\underline{v}) = f\left(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \underline{v}_i\right) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(\underline{v}_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \underline{w}_i$$

Quindi f è unica perché è univocamente determinata dalla base scelta e dai vettori di arrivo scelti: date le caratteristiche cercate si trova esplicitamente l'applicazione, quindi questa è unica.

12.2 Esercitazione

Esercizio 44. Riprendiamo l'esercizio 40. Brevemente avevamo $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R})$ e abbiamo trovato che $\overline{W} = \{A \in \mathcal{M}(2, 2, \mathbb{R}) \text{ t.c. } AB = BA\} = Span(\{B, I_2\})$. Vogliamo adesso trovare uno spazio vettoriale supplementare a $\overline{W}$, e lo faremo con il completamento a base di $\overline{V}$.

Dimostrazione. Prendiamo l'insieme $\mathscr{C} = \{B, I, \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\}$; $\mathscr{C}$ è chiaramente un insieme di generatori, visto che contiene una base, e chiaramente non sono vettori indipendenti (sono 6 vettori in uno spazio vettoriale di dimensione 4). Estraiamo dunque una base da questi generatori.

- B è indipendente? Si: è un vettore non nullo.

- B, I sono linearmente indipendenti? Si, per tante ragioni, innanzitutto $I \notin Span\left(\{B\}\right)$.

- $B, I, \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ sono linearmente indipendenti?

$$\begin{aligned}\alpha B + \beta I + \gamma \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) &\iff \left(\begin{smallmatrix}\alpha&\alpha\\-\alpha&0\end{smallmatrix}\right) + \begin{pmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{pmatrix} + \left(\begin{smallmatrix}\gamma&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)\\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0\end{aligned}$$

- $B, I, \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ sono linearmente indipendenti? No, infatti possiamo scrivere
$$\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = I - \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$$

- $B, I, \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ sono linearmente indipendenti? Si. (Verifica).

Quindi un supplementare di $\overline{W}$ è $Span\left(\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\}\right)$

Proposizione 34. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, $\overline{V}, \overline{W}$ dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ vettori di $\overline{V}$, $\overline{U} = Span\left(\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}\right)$ sottospazio vettoriale di $\overline{V}$ e $\overline{V} \xrightarrow{f} \overline{W}$ un'applicazione lineare. Allora:*

1. *$f(\underline{v}_1), \ldots, f(\underline{v}_n)$ sono lin. indip. $\iff$ $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ sono lin. indip. e $\overline{U} \cap Ker\left(f\right) = \{0_{\overline{V}}\}$.*
2. *$f(\overline{U}) = Span\left(\{f(\underline{v}_1), \ldots, f(\underline{v}_n)\}\right)$.*
3. *f iniettiva $\implies$ $dim\ f(\overline{U}) = dim\ U$.*

Dimostrazione. 1.

'$\implies$'

$$\begin{aligned}\alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = 0 &\xRightarrow{f\ lin.} \alpha_1 f(\underline{v}_1) + \ldots + \alpha_n f(\underline{v}_n) = 0\\ &\xRightarrow{hyp.} \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0\\ &\implies \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \text{ sono linearmente indipendenti}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{v} \in \overline{U} \cap Ker\left(f\right) &\implies \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \text{ t.c. } \underline{v} = \alpha_1\underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n\\ &\quad\ \text{e } f(\underline{v}) = \alpha_1 f(\underline{v}_1) + \ldots + \alpha_n f(\underline{v}_n) = 0\\ &\implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0 \implies \underline{v} = 0_{\overline{V}}\end{aligned}$$

' $\Longleftarrow$ '

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(\underline{v}_i)=0 &\Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\underline{v}_i\right)=0\\ &\Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\underline{v}_i\right)\in Ker\,(f)\,,\text{ ma }\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\underline{v}_i\in\overline{U}\\ &\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\underline{v}_i=0_{\overline{V}}\xRightarrow{hyp.}\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0\end{aligned}$$

2. $\subseteq$ $\forall\underline{v}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\underline{v}_i\in\overline{U}$

$$f(\underline{v})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(\underline{v}_i)\in Span\,(\{f(\underline{v}_1),\dots,f(\underline{v}_n)\})$$

$\supseteq$ $\forall\underline{w}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(\underline{v}_i)\in Span\,(\{f(\underline{v}_1),\dots,f(\underline{v}_n)\})$, considero

$$\underline{v}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\underline{v}_i\in\overline{U};\ f(\underline{v})=\underline{w}\implies\underline{w}\in f(\overline{U})$$

3. f iniettiva $\Longleftarrow$ $Ker\,(f)=\{0_{\overline{V}}\}$, supponiamo $\{\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_k\}$ base di $\overline{U}$, $f(\overline{U})=Span\,(\{f(\underline{v}_1),\dots,f(\underline{v}_k)\})$, ma $f(\underline{v}_1),\dots,f(\underline{v}_k)$ sono anche linearmente indipendenti $\implies$ $\{f(\underline{v}_1),\dots,f(\underline{v}_k)\}$ è una base di $f(\overline{U})$ $\implies$ $dim\ f(\overline{U})=k$

Esercizio 45. Consideriamo i seguenti polinomi in $\mathbb{R}_3\,[x]$:

$$p_1=x^3+x^2-x-1 \qquad p_2=x^2+x-2$$
$$p_3=x^3+2x^2+x-2 \qquad p_4=x+1$$

Costruire, se esiste, $\mathbb{R}_3\,[x]\xrightarrow{f}\mathbb{R}^2$ tale che:

$$f(p_1)=\left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right)\ f(p_2)=\left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right)$$
$$f(p_3)=\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\ f(p_4)=\left(\begin{smallmatrix}-2\\-1\end{smallmatrix}\right)$$

Dimostrazione. Sappiamo per il Teorema 9 che, se $\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ fosse una base, allora l'applicazione esisterebbe; ma $p_3=p_1+p_2+p_4$, quindi il teorema non ci garantisce nulla. Visto che vogliamo una applicazione lineare dovrebbe valere

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)&=f(p_3)=f(p_1+p_2+p_4)=f(p_1)+f(p_2)+f(p_4)\\&=\left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}-2\\-1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)\end{aligned}$$

Ma questa uguaglianza è falsa, quindi questa applicazione lineare non esiste. Cambiamo quindi il testo dell'esercizio e chiediamo che $f(p_3)=\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)$ (notiamo che questa richiesta è del tutto superflua: conseguirebbe comunque dalle altre tre, quindi possiamo anche non considerarla).
A questo punto dobbiamo dimostrare che p_1,p_2,p_4 sono linearmente indipendenti, completarli a base, ed esplicitare l'applicazione.

- Dimostriamo la lineare indipendenza di p_1, p_2, p_4:

$$\begin{aligned}\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_4 p_4 = \alpha_1 x^3 &+ (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 \\ &+ (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)x + (-\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_4) = 0 \\ &\implies \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0\end{aligned}$$

  Quindi p_1, p_2, p_4 sono linearmente indipendenti.

- Completiamo p_1, p_2, p_4 a base: estraiamo una base dall'insieme di generatori $C = \left\{p_1, p_2, p_4, 1, x, x^2, x^3\right\}$. Vediamo subito che $\mathscr{B} = \{p_1, p_2, p_4, 1\}$ sono una base.

- Posso decidere dove mandare 1, decido quindi di mandarlo in $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$. A questo punto il teorema mi garantisce che esiste unica f, applicazione lineare tale che:

$$\begin{aligned}(p_1) = \left(\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}\right) f(p_2) &\qquad = \left(\begin{smallmatrix}2\\0\end{smallmatrix}\right) \\ f(p_4) = \left(\begin{smallmatrix}-2\\-1\end{smallmatrix}\right) f(1) &\qquad = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{aligned}$$

- L'esercizio ci chiede però di costruire esplicitamente l'applicazione. Consideriamo quindi un generico $\mathbb{R}_3[x] \ni \underline{v} = ax^3 + bx^2 + cx + d$, scriviamolo come combinazione lineare dei vettori della base, dobbiamo quindi trovare

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \underline{v} = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_4 p_4 + \alpha_5 1$$

  Consideriamo allora che abbiamo:

$$\begin{aligned}\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_4 p_4 + \alpha_5 1 = \alpha_1 x^3 &+ (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + (-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4)x \\ &+ (-\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5) = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ &\implies \begin{cases}\alpha_1 = a \\ \alpha_1 + \alpha_2 = b \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = c \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 = d\end{cases} \\ &\implies \begin{cases}\alpha_1 = a \\ \alpha_2 = b - a \\ \alpha_4 = c + 2a - b \\ \alpha_5 = d - 3a + 3b - c\end{cases}\end{aligned}$$

  Quindi possiamo anche scrivere:

$$\begin{aligned}f(ax^3 + bx^2 + cx + d) &= f(ap_1 + (b-a)p_2 + (c+2a-b)p_4 + (d-3a+3b-c)1) \\ &= a\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + (b-a)\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + (c+2a-b)\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} + (d-3a+3b-c)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-4a+4b-2c \\ b-c\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Esercizio 46. Siano

$$\overline{U} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x + y = 0 \right\}$$
$$\overline{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x - y + z = 0 \right\}$$

Ci chiediamo se $\exists \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$ tale che:

- $f(\overline{U}) \subseteq \overline{W}$
- $f(\overline{W}) \subseteq \overline{U}$
- $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $dim\ Ker\,(f) = 1$

Dimostrazione. Scriviamo innanzitutto $\overline{U}, \overline{W}$ in forma parametrica. Oramai sappiamo farlo; quindi sappiamo che:

$$\overline{U} = Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right)$$
$$\overline{W} = Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

Consideriamo adesso la formula di Grassmann:

$$dim\ \overline{U} \cap \overline{W} = \overbrace{dim\ \overline{U}}^{2} + \overbrace{dim\ \overline{U}}^{2} - \overbrace{dim\ \overline{U} + \overline{W}}^{\leq 3}$$

Quindi abbiamo due possibilità: $\overline{U} = \overline{W} \implies dim\ \overline{U} \cap \overline{W} = 2$, oppure $\overline{U} \neq \overline{W} \implies dim\ \overline{U} \cap \overline{W} 1$. In questo caso i due sottospazi vettoriali sono diversi.
L'intersezione è importante perché abbiamo le due regole:

$$f(\overline{U}) \subseteq \overline{W}, f(\overline{W}) \subseteq \overline{U} \implies f(\overline{U} \cap \overline{W}) \subseteq \overline{U} \cap \overline{W}$$

Quindi il nostro modo di procedere sarà: prendere una base di $\overline{U} \cap \overline{W}$, completarla a base di $\overline{W}$ e a base di $\overline{U}$, e poi decidere dove mandare i vettori.

$$\overline{U} \cap \overline{W} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \begin{smallmatrix} x+y=0 \\ x-y+z=0 \end{smallmatrix} \right\}$$
$$= Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

Eseguiamo ora i completamenti a base:

- $\overline{W} = Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right)$
- $\overline{U} = Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right)$

Nella costruzione di f siamo quindi in qualche modo costretti da alcune cose:

-
$$f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \in \overline{U} \cap \overline{W} = Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}\right) \implies f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

-
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \in \overline{W} \implies f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \in \overline{U} \implies f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \gamma\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Questa applicazione ha le prime caratteristiche richieste:

- $f(\overline{U}) \subseteq \overline{W}$
- $f(\overline{W}) \subseteq \overline{U}$
- $f(\overline{U} \cap \overline{W}) \subseteq \overline{U} \cap \overline{W}$

Però non ha ancora tutte le caratteristiche richieste. Ci lavoreremo ancora.