# II Semestre

# Lezione 24

## Teoria

Sia $V$ uno spazio vettoriale (da ora in poi, fino a nuovo ordine, supponiamo: $\mathbb{K}$ campo e $V$ uno spazio vettoriale (se non specificato altrimenti sul campo $\mathbb{K}$ e finitamente generato)); studiando gli endomorfismi di $V$ abbiamo definito le relazioni di equivalenza coniugio e similitudine, abbiamo iniziato a studiarne le classi di equivalenza e siamo riusciti a trovare un sistema (non completo) di invarianti. Abbiamo poi analizzato alcuni endomorfismi particolari (diagonalizzabili e triangolabili). Sebbene dunque abbiamo diverse proposizioni circa similitudine e coniugio, non abbiamo ancora un sistema completo di invarianti, e quindi non possiamo, in generale, dire quando due endomorfismi sono coniugati, se non trovando esplicitamente l'isomorfismo della definizione. Cerchiamo quindi di trovare un sistema completo di invarianti andando alla ricerca di altri invarianti.

### Valutazioni di polinomi particolari

**Definizione 1.** Sia $f \in End(V)$ e $p(t) = a_0 + a_1t^1 + \ldots + a_st^s \in \mathbb{K}[t]$.
Poniamo
$$p(f) = a_0f^0 + a_1f^1 + \ldots + a_sf^s \in End(V)$$
Dove $\forall j \in \mathbb{N},\ f^j = \overbrace{f \circ \ldots \circ f}^{j \text{ volte}}$, e $f^0 = id_V$.
Stessa cosa per le matrici.

**Proposizione 1.** *Siano $f, g \in End(V)$, $h \in GL(V)$ tali che $g = h^{-1} \circ f \circ h$.*

*a)* $\forall p(t) \in \mathbb{K}[t]$, *abbiamo che*
$$p(g) = h^{-1} \circ p(f) \circ h$$
*Quindi abbiamo che* $\forall p(t) \in \mathbb{K}[t],\ f \sim g \Rightarrow p(f) \sim p(g)$.

*b)* $\forall p(t) = \sum_i a_it^i, q(t) = \sum_i b_it^i \in \mathbb{K}[t]$ *abbiamo:*

- $(p + q)(f) = p(f) + q(f)$.
- $(pq)(f) = p(f) \circ q(f)$.

*L'anello dei polinomi è commutativo, quindi questo punto ci dice anche che $p(f) \circ q(f) = q(f) \circ p(f)$. Inoltre da questo vediamo anche che*

*$\mathbb{K}[t] \longrightarrow End(V)$ con la legge vista $p(t) \longrightarrow p(f)$ è un omomorfismo di anelli.*

*c) Sia $B$ base di $V$ e $A = \mathfrak{M}_B(f)$. Allora $p(A) = \mathfrak{M}_B(p(f))$.*

**Dimostrazione.** a) $p(g) = \sum_i a_i g^i = \sum_i a_i (h^{-1} \circ f \circ h)^i = \sum_i a_i h^{-1} \circ f^i \circ h = h^{-1} \circ \sum_i (a_i f^i) \circ h = h^{-1} \circ p(f) \circ h.$

b) - $(p+q)(f) = \sum_i (a_i + b_i) f^i = \sum_i a_i f^i + b_i f^i = \sum_i a_i f^i + \sum_i b_i f^i = p(f) + q(f).$

- $(pq)(f) = \sum_i \sum_{j=0}^{i} a_j \cdot b_{i-j} f^i = p(f) \circ q(f).$

c) $p(A) = \sum_i a_i A^i = \sum_i a_i \left(\mathfrak{M}_B(f)\right)^i = \sum_i a_i \mathfrak{M}_B\left(f^i\right) = \mathfrak{M}_B\left(\sum_i a_i f^i\right) = \mathfrak{M}_B(p(f))$

**Corollario 1.** *Siano $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, allora*

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A \sim B \Rightarrow A^k \sim B^k$$

**Definizione 2** (Ideale di un endomorfismo)**.** Sia $f \in End(V)$. Allora

$$I(f) = \{p \in \mathbb{K}[t] \mid p(f) = 0\}$$

**Proposizione 2.** *1) $\forall f \in End(V)$, $I(f)$ è un ideale di $\mathbb{K}[t]$ (concetto noto dal corso di Aritmetica). Cioè:*

- *$\forall p, q \in I(f),\ p + q \in I(f)$.*
- *$\forall p \in I(f), \forall q \in \mathbb{K}[t]$ abbiamo che $pq \in I(f)$.*

*2) Se $f \sim g$ allora $I(f) = I(g)$. Quindi abbiamo trovato un altro invariante per coniugio.*

*3) Se $A = \mathfrak{M}_B(f)$ allora abbiamo $I(f) = I(A)$.*

**Dimostrazione.** 1) - $(p+q)(f) = p(f) + q(f) = 0 + 0 = 0.$

- $(pq)(f) = p(f) \circ q(f) = 0 \circ q(f) = 0.$

2) Sia $q \in I(f)$. $\forall v \in V$, $q(g)(v) = (h^{-1} \circ q(f) \circ h)(v) = (h^{-1}(0(h(v)))) = h^{-1}(0) = 0.$

3) Segue dalla Proposizione 1.*c*.

*Osservazione* 1. Il concetto di ideale ci ha fornito un altro invariante per coniugio, però questo non sarebbe molto utile se l'ideale fosse sempre $\{0\}$. Vediamo che così non è: $\forall f \in End(V),\ \exists p \in I(f) \mid deg\ p > 1$. Vediamo che è vero:

'$f = 0$' Caso banale. In questo caso $I(f) = \mathbb{K}[t]$.

'$f \neq 0$' Sia $n = dim\ V$. Abbiamo allora che $dim\ End(V) = n^2 \Rightarrow f^0, f^1, \ldots, f^{n^2}$ sono linearmente dipendenti $\Rightarrow \exists a_0, a_1, \ldots, a_{n^2}$ non tutti nulli e tali che $\sum_{i=0}^{n^2} a_i f^i = 0$. Considero allora $p(t) = \sum_{i=0}^{n^2} a_i t^i$; sappiamo per certo che $p(t) \in I(f)$.

Vediamo ora un teorema che ci fornisce un altro elemento interessante di $I(f)$.

**Teorema 1** (di Hamilton-Cayley)**.** *Sia $\mathbb{K}$ campo e $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione $n$.*

$$\forall f \in End(V),\ p_f(t) \in I(f)$$

**Dimostrazione.** Per dimostrare il teorema ipotizziamo che $f$ sia triangolabile, vedremo poi come aggirare questa ipotesi iniziale.
Sia dunque $B$ base di $V$ e sia $\widetilde{A} = \mathfrak{M}_B(f)$. Sappiamo che $p_f = p_{\widetilde{A}}$. Sappiamo inoltre che vale:

$$\mathfrak{M}_B(p_f(f)) = p_f(\widetilde{A}) = p_{\widetilde{A}}(\widetilde{A})$$

Per dimostrare quindi che $p_f \in I(f)$ possiamo verificare che $p_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}) = 0$. Dimostriamolo per induzione su $n$.

$\iota$) Il caso $n = 1$ è ovvio.

$\iota\iota$) $\widetilde{A}$ triangolabile per ipotesi aggiunta, quindi $\exists v_1 \in \mathbb{K}^n$ autovettore per $\widetilde{A}$. Completo $v_1$ a $S$, base di $\mathbb{K}^n$. Sia

$$A = \mathfrak{M}_S\left(\widetilde{A}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)$$

Quindi abbiamo che $\widetilde{A} \sim A$, quindi $p_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}) \sim p_{\widetilde{A}}(A)$; ci basta quindi provare che $p_{\widetilde{A}}(A) = 0$. Ma $p_{\widetilde{A}}(A) = p_A(A)$, infatti matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Posso quindi, senza perdita di generalità, supporre che la matrice considerata fosse sin dall'inizio del tipo di $A$. Continuiamo quindi la dimostrazione con $A$. Vogliamo dimostrare che $p_A(A) = 0$. Facciamo intanto una breve osservazione:

$$A^m = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & A_1 \end{array}\right)^m = \left(\begin{array}{c|c} \lambda^m & * \\ \hline 0 & A_1^m \end{array}\right)$$

(gli asterischi sono sono gli stessi, ma non ci interessa). Quindi abbiamo che:

$$q(A) = \left(\begin{array}{c|c} q(\lambda) & * \\ \hline 0 & q(A_1) \end{array}\right)$$

Visto questo ricordiamoci che $p_A(t) = (\lambda - t)p_{A_1}(t)$, sappiamo inoltre che $A_1$ è triangolabile in quanto se $p_A$ è completamente fattorizzabile lo sarò anche $\frac{p_A(t)}{\lambda - t}$. Possiamo quindi applicare l'ipotesi induttiva: abbiamo una matrice di ordine $n-1$ triangolabile (per ipotesi induttiva allora annullerà il suo polinomio caratteristico). Avremo quindi che:

$$p_{A_1}(A) = \left(\begin{array}{c|c} p_{A_1}(\lambda) & * \\ \hline 0 & p_{A_1}(A_1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} p_{A_1}(\lambda) & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Quindi qualsiasi vettore viene mandato in un vettore appartenente a $Span(\{v_1\})$: $\forall v \in \mathbb{K}^n$, $p_{A_1}(A)(v) \in Span(\{v_1\})$. Quindi $p_A(A)(v) = (\lambda I - A)p_{A_1}(A)(v) = 0$, infatti $v_1 \in Ker(\lambda I - A)$ per ipotesi.

In tutto questo abbiamo però ipotizzato che la matrice fosse triangolabile; e se non lo fosse? Anche se il polinomio caratteristico non fosse completamente fattorizzabile avremmo che $\exists \mathbb{F} \mid \mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$, campo algebricamente chiuso contenente $\mathbb{K}$. In $\mathbb{F}$ il polinomio caratteristico si fattorizza completamente, e quindi $f$ sarebbe triangolabile, quindi, abbiamo dimostrato, $p_f(f) = 0$. Ma se questo è vero in $\mathbb{F}$ sarà vero anche in $\mathbb{K}$, abbiamo infatti un polinomio a coefficienti in $\mathbb{K}$ che si annulla in una matrice a coefficienti in $\mathbb{K}$, questo succede sia che si consideri $\mathbb{K}$ come sottoinsieme di $\mathbb{F}$, sia che lo si consideri a parte. Cioè se $p_A(A) = 0$ in $\mathbb{F}$, allora sarà 0 anche in $\mathbb{K}$.

**Proposizione 3.** *Ogni ideale di $\mathbb{K}[t]$ è principale. Cioè $\forall I$ ideale in $\mathbb{K}[t]$, $\exists g(t) \in I \mid \forall p(t) \in I$, $\exists q(t) \in \mathbb{K}[t] \mid p(t) = g(t)q(t)$. Cioè ogni ideale è generato da un elemento (unico a meno di invertibili), cioè $\exists g(t) \in I$ tale che:*

$$I = \{g(t)q(t) \mid q(t) \in \mathbb{K}[t]\}$$

*Si scrive $I = (g)$.*

**Esercizio 1.** Siano $a, b \in \mathbb{K}[t]$ polinomi non nulli e $I = \{\phi a + \psi b \mid \psi, \phi \in \mathbb{K}[t]\}$. Verificare per esercizio che:

- $I$ è ideale di $\mathbb{K}[t]$.
- Sia $d$ il generatore monico di $I$, allora $d = MCD(a, b)$.

**Corollario 2** (Identità di Bezout)**.** $\forall a, b \in \mathbb{K}[t]$, $\exists \mu, \lambda \in \mathbb{K}[t]$ *tali che*

$$\lambda a + \mu b = MCD(a, b)$$

## Un altro invariante: polinomio minimo

**Definizione 3** (Polinomio minimo)**.** Sia $f \in End(V)$. Si dice polinomio minimo di $f$ (e si indica con $m_f(t)$) il generatore monico di $I(f)$.

**Corollario 3.** *$\forall f \in End(V)$, $m_f(t) \mid p_f(t)$, quindi possiamo dire che se $\lambda$ è radice di $m_f(t)$ allora $\lambda$ è radice di $p_f(t)$. Inoltre $m_f(t)$ è invariante per coniugio.*

**Dimostrazione.** $p_f(t) \in I(f) \Rightarrow m_f(t) \mid p_f(t)$. Inoltre $I(f)$ abbiamo dimostrato essere invariante per coniugio. Quindi anche il suo generatore monico lo sarà.

**Esempio 1.** Vediamo alcuni esempi di polinomio minimo (tralasciamo il $-$ davanti ai vari $p_A$: non è importante).

- Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. $p_A(t) = t^3$. In questo caso abbiamo $m_A(t) = t^3$. Infatti $A^2 \neq 0$.
- Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. $p_A(t) = t^3$ esattamente come prima, in questo caso però $m_A(t) = t^2$.

*Osservazione* 2. Sia $V$ uno spazio vettoriale, $W \subseteq V$ un suo sottospazio vettoriale e $f \in End(V)$. Allora $m_{f|_W}(t) \mid m_f(t)$. Infatti $m_f(t) \in I(f\ |_W)$, poiché se $q(f) = 0$ a maggior ragione avremo $q(f\ |_w) = 0$. Cioè se $q(f)$ è l'applicazione nulla, in particolare anche ristretta a $W$ sarà nulla.

**Proposizione 4.** *Sia $f \in End(V)$. Ricordandoci il Corollario 3; sia $\lambda$ autovalore per $f$. Allora $\forall q(t) = \displaystyle\sum_{i=0}^{s} a_i t^i \in I(f)$ abbiamo che $q(\lambda) = 0$. In particolare $m_f(t) \in I(f)$; quindi questa proposizione ci garantisce che $p_f(t)$ e $m_f(t)$ hanno le stesse radici.*

**Dimostrazione.** Sia $V \ni v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$. Sappiamo, per ipotesi, che $q(f) = 0$, quindi $q(f)(v) = 0$. Ma $q(f)(v) = \left(\displaystyle\sum_{i=0}^{s} a_i f^i\right)(v) = \displaystyle\sum_{i=0}^{s} a_i \lambda^i v = q(\lambda)(v) = 0 \Rightarrow q(\lambda) = 0$

**Corollario 4.** *Sia $f \in End(V)$ triangolabile. Allora*

$$p_f(t) = \pm \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{h_i} \ \textit{con}\ h_i = \mu_a(\lambda_i)$$

$$m_f(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{j_i}$$

*con $1 \leq j_i \leq h_i$, $\forall i_1^k$ e con $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.*

**Esercizio 2.** Sia $N = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$, con $A, B$ minori di $N$. Dimostrare che vale $m_N(t) = mcm(m_A(t), m_B(t))$; dimostrare cioè che valgono:

- $m_A(t) \mid m_N(t)$ e $m_B(t) \mid m_N(t)$.
- Inoltre se $m_A(t) \mid g$ e $m_B(t) \mid g$, allora $m_N(t) \mid g$.

**Esempio 2.** Dimostriamo ora, attraverso un controesempio, che la lista di invarianti aggiornata al polinomio minimo non è una lista completa di invarianti. Siano:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ \hline & & & & & & 0 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ \hline & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ \hline & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

Verificare che queste due matrici hanno in comune la lista conosciuta di invarianti, sebbene non siano simili.

**Proposizione 5.** *Sia $f \in End(V)$. $\forall g(t) \in \mathbb{K}[t]$, $W = Ker\ g(f)$ è sottospazio vettoriale $f$-invariante di $V$.*

**Dimostrazione.** Vogliamo dimostrare che $f(W) \subseteq W$, cioè che, $\forall x \in W$, $g(f)(f(x)) = 0$. Ricordiamoci inoltre che $g(f) \circ f = f \circ g(f)$, infatti $g(t) \cdot t = t \cdot g(t)$. Ma quindi possiamo scrivere (sapendo che $x \in W = Ker\ g(f)$):

$$g(f)(f(x)) = (g(f) \circ f)(x) = (f \circ g(f))(x) = f(0) = 0$$

## Somme dirette di spazi invarianti

**Teorema 2** (di decomposizione primaria)**.** *Sia $f \in End(V)$ e $q \in I(f)$. Supponiamo che $\exists q_1, q_2 \in \mathbb{K}[t]$ tali che $q = q_1 q_2$ e $MCD(q_1, q_2) = 1$. Allora:*

1) *$V = Ker\ q_1(f) \oplus Ker\ q_2(f)$. Cioè ogni fattorizzazione di un polinomio ci fornisce dei sottospazi vettoriali in somma diretta.*

2) *Gli addendi della somma diretta sono $f$-invarianti.*

3) *Se $f \sim g$ allora $\begin{cases} dim\ Ker\ q_1(f) = dim\ Ker\ q_1(g) \\ dim\ Ker\ q_2(f) = dim\ Ker\ q_2(g) \end{cases}$*

**Dimostrazione.** 1) Per Bezout (Corollario 2), $\exists a, b \in \mathbb{K}[t]$ tali che: $1 = aq_1 + bq_2$. Valutando questi polinomi in $f$ avrò:

$$id_V = a(f) \circ q_1(f) + b(f) \circ q_2(f)$$

Quindi $v = (a(f) \circ q_1(f))(v) + (b(f) \circ q_2(f))(v)$. Vediamo adesso che il primo addendo appartiene a $Ker(q_2)(f)$, infatti, $\forall v \in V$:

$$\begin{aligned} q_2(f)((a(f) \circ q_1(f))(v)) &\overset{\text{com.}}{=} (a(f) \circ q_1(f) \circ q_2(f))(v) \\ &= (a(f) \circ (q_1 q_2)(f))(v) \\ &= (a(f) \circ q(f))(v) = 0 \end{aligned}$$

Allo stesso modo si dimostra che il secondo addendo appartiene a $Ker\ q_1(f)$. Ci resta da mostrare che l'intersezione tra i due sottospazi vettoriali è $\{0_V\}$. Sia $z \in Ker(q_1) \cap Ker(q_2)$. Abbiamo allora che

$$z = (a(f) \circ q_1(f))(t) + (b(f) \circ q_2(f))(t) = 0 + 0$$

2) Proposizione 5.

3) Sia $k \in GL(V) \mid g = k^{-1} \circ f \circ k$. Sappiamo che $q_1(g) \sim q_1(f)$; per cui $rk(q_1(g)) = rk(q_1(f))$; da questo possiamo dire che $dim\ Ker\ q_1(g) = dim\ Ker\ q_1(f)$.

**Corollario 5.** *Sia $f \in End(V)$ e $I(f) \ni q = q_1 \cdot \ldots \cdot q_m$, con i termini del prodotto due a due primi tra di loro. Allora*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} Ker\ q_i(f)$$

**Dimostrazione.** Per induzione su $m$.

$\iota$) $m = 2$. Già dimostrata.

$\iota\iota$) Poniamo $\widetilde{q} = q_2 \cdot \ldots \cdot q_m$, abbiamo che $q = q_1\widetilde{q}$ e $MCD(q_1, \widetilde{q}) = 1$. Per il teorema di decomposizione primaria abbiamo: $V = Ker\ q_1(f) \oplus Ker\ \widetilde{q}(f)$. Chiamiamo $W = Ker\ \widetilde{q}(f)$. Sappiamo che $W$ è $f$-invariante e $\widetilde{q} \in I(f\ |_W)$. Siamo nelle condizioni di utilizzare l'ipotesi induttiva e quindi:

$$W = \bigoplus_{i=2}^{m} Ker\ q_i(f\ |_W)$$

Inoltre $\forall j_2^m$ abbiamo che $Ker\ q_j(f\ |_W) = Ker(q_j(f)\ |_W) = Ker\ q_j(f) \cap W$. Sappiamo anche che $Ker\ q_j(f) \subseteq W$, infatti $x \in Ker(q_j(f)) \Rightarrow x \in W = Ker\ \widetilde{q}(f)$, poiché $\widetilde{q}(f)(x) = (q_2 \cdot \ldots \cdot q_m)(f)(x) = (\ldots \cdot q_j)(f)(x) = 0$.

Dunque $W = \bigoplus_{i=2}^{m} Ker\ q_i(f)$; da cui la tesi.

*Riflessione* 1. Vediamo di trovare un'applicazione del teorema e di corollari appena dimostrati.
Sia $f \in End(V)$ un endomorfismo triangolabile, con $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Abbiamo già dimostrato che che

$$p_f(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{h_i}$$
$$m_f(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{s_i}$$

Per quanto appena detto possiamo dire che:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker\,(f - \lambda_j id)^{h_j}$$
$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker\,(f - \lambda_j id)^{s_j}$$

Sapendo che queste sono somme dirette di spazi vettoriali $f$-invarianti.

**Proposizione 6.** *Sia $f \in End(V)$. Allora $f$ diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_f(t)$ è completamente fattorizzabile e non ha radici di molteplicità algebrica superiore alla prima. Cioè se $m_f(t) = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)$ con $i \neq k \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_k$.*

**Dimostrazione.** '$\Rightarrow$' $\exists B$ base di $V$ tale che

$$\mathfrak{M}_{B,f}\ (=) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Allora, per quanto visto nell'Esercizio 1, $m_f(t) = mcm\,((t - \lambda_1), \ldots, (t - \lambda_k)) = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)$.

'$\Leftarrow$' Se $m_f(t) = (t-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(t-\lambda_k)$ allora:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker(f-\lambda_i id) = \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$$

Quindi $f$ è diagonalizzabile.

## Esercitazione

*Osservazione* 3. Sia $f \in End(V)$ e $p = \sum a_i t^i \in \mathbb{K}[t]$. Sappiamo che $p \in I(f) \Leftrightarrow \sum a_i f^i = 0$. Quindi un polinomio dell'ideale ci dà dei coefficienti non nulli per i quali si annullano delle potenze di $f$, inoltre una combinazione nulla a coefficienti non nulli delle potenze di $f$ ci dà un polinomio dell'ideale.
Se sappiamo quindi che $id, f, f^2, \ldots, f^k$ sono linearmente indipendenti, sapremo anche che $deg\ m_f(t) \geq k+1$. Possiamo utilizzare questo metodo per avere una stima del grado del polinomio minimo.

*Riflessione* 2. Sia $f \in End(V)$ e $W_k = Span\left(\{id, f, f^2, \ldots, f^k\}\right) \subseteq End(V)$. Questi spazi vettoriali formano una sequenza crescente: $\forall k,\ W_k \subseteq W_{k+1}$. Visto che la dimensione di $V$ è finita avremo che $\exists k \mid W_{k+1} = W_k$. Vogliamo mostrare che, $\forall m \geq 1,\ W_{k+m} = W_k$.
Vediamo una dimostrazione per induzione:

$\iota$) $m = 1$. Per ipotesi.

$\iota\iota$) Abbiamo $W_{k+m-1} = W_k$ per ipotesi induttiva. Allora $W_{k+m} = W_{k+m-1} + Span\left(\{f^{k+m}\}\right)$. Ci basta mostrare che $f^{k+m} \in W_{k+m-1}$. Ma abbiamo che $\exists a_0, \ldots, a_k \mid f^{k+m-1} = a_0 id_V + \ldots + a_k f^k$. Otteniamo allora che $f^{k+m} = f \circ f^{k+m-1} = a_0 f + \ldots + a_k f^{k+1} \in W_{k+1} \overset{hy.}{=} W_k$

Sia dunque $d = \mid \{k \in \mathbb{N} \mid W_k = W_{k+1}\}$. Abbiamo quindi la successione:

$$W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq W_2 \subsetneq \ldots \subsetneq W_d = W_{d+1} = \ldots$$

Questo significa che $id_V, f, \ldots, f^{d+1}$ sono linearmente dipendenti, quindi $\exists b_0^d \mid f^{d+1} = \sum_{i=0}^{d} b_i f^i$. Quindi possiamo anche dire che $m_f(t) = t^{d+1} - \left(b_d t^d + \ldots + b_0\right)$.

**Esempio 3.** Sia $A \in \mathcal{M}(3,\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} 1&2&1\\0&0&1\\1&1&2 \end{pmatrix}$. Cerchiamo $m_A = m_{L_A}$.

- $I, A$, sono linearmente indipendenti $\Rightarrow deg\ m_A \geq 2$.
- $I, A, A^2$ sono linearmente indipendenti? Sapendo che $A^2 = \begin{pmatrix} 2&3&5\\1&1&2\\3&4&6 \end{pmatrix}$, vediamo se $\exists a, b, c \neq 0 \mid aI + bA + cA^2 = 0$. Vediamo che $\left[A^2\right]_{21}$ contribuisce, da sola, alla somma, quindi $c = 0$, inoltre sappiamo che $I, A$ sono linearmente indipendenti, quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti. Possiamo quindi concludere che $deg\ m_A \geq 3$.
- A questo punto sappiamo che $I, A, A^2, A^3$ sono linearmente dipendenti, infatti sappiamo che $deg\ p_A(t) = 3$ e $p_A(t) \in I(A)$. Quindi esiste almeno un polinomio di grado 3 che si annulla in $A$. Ma cerchiamo questo polinomio; troviamo che $A^3 = \begin{pmatrix} 7&9&10\\3&4&6\\9&12&19 \end{pmatrix}$ e vediamo che $A^3 - 3A^2 - I = 0$.

Quindi $m_A(t) = t^3 - 3t^2 - 1$; sappiamo che è il polinomio minimo perché è un polinomio monico di grado minimo appartenente all'ideale: i polinomi di grado minimo nell'ideale si dividono a vicenda, quindi differiscono per una costante, ma noi abbiamo definito polinomio minimo quello monico, che è unico. Inoltre sappiamo anche che $p_A(t)$ ha grado 3 e si annulla in $A$; però il suo coefficiente direttore è $(-1)^{dim.V} = -1$, sarà quindi $-t^3 + 3t^2 + 1$.

*Riflessione* 3. Sia $f \in End(V)$ tale che $f(f - id)^2 = 0$. Vediamo quello che possiamo dire su questo endomorfismo, senza avere informazioni aggiuntive. Quello che sappiamo di sicuro è che $t(t-1)^2 \in I(f)$, da questo possiamo fare delle ipotesi sul polinomio minimo:

1) $m_f(t) = t$
2) $m_f(t) = t - 1$
3) $m_f(t) = t(t-1)$
4) $m_f(t) = (t-1)^2$
5) $m_f(t) = t(t-1)^2$

Le possibilità sono queste poiché sappiamo che $m_f(t) \mid t(t-1)^2$. Sappiamo anche che $f$ diagonalizzabile $\Leftrightarrow m_f(t)$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{K}[t]$ ed ha solo radici di molteplicità 1; inoltre $Sp(f) = \{$Radici in $\mathbb{K}$ del polinomio caratteristico$\} = \{$Radici in $\mathbb{K}$ del polinomio minimo$\}$. Analizziamo quindi singolarmente i casi:

1) $m_f(t) = t \Leftrightarrow f = 0$; vuol dire infatti che $f$ si annulla in $f$.

2) $m_f(t) = t - 1 \Leftrightarrow f = id_V$; infatti $f - id_V = 0 \Rightarrow f = id_V$.

3) $m_f(t) = t(t-1)$, il polinomio minimo è completamente fattorizzabile e non ha radici con molteplicità maggiore di 1, l'endomorfismo è quindi diagonalizzabile, e, per un'opportuna base $B$ di $V$ avremo (poiché $Sp(f) = \{0, 1\}$):
$$\mathfrak{M}_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & I \end{array}\right)$$

4) $m_f(t) = (t-1)^2$. Questo endomorfismo non è diagonalizzabile, in quanto 1 ha molteplicità 2, però sappiamo che è almeno triangolabile, visto che il polinomio minimo è completamente fattorizzato. Visto che lo spettro è $Sp(f) = \{1\}$, abbiamo che $\exists B$ base di $V$, tale che
$$\mathfrak{M}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

5) Questo caso è un po' più complesso degli altri: riflettiamo sul teorema di decomposizione primaria; sappiamo che $m_f(t) \in I(f)$, sappiamo inoltre che $t$ e $(t-1)^2$ solo polinomi coprimi tra di loro e il loro prodotto è un polinomio appartenente all'ideale. Il teorema ci garantisce quindi che
$$V = Ker\ f \oplus Ker\ (f - id_V)^2$$

e anche che i due termini sono $f$-invarianti. Possiamo quindi scegliere opportunamente una base $B$ di $V$ in modo tale che

$$\mathfrak{M}_B(f) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

Questa riflessione si basa sul fatto che {Radici in $\mathbb{K}$ del polinomio caratteristico} = {Radici in $\mathbb{K}$ del polinomio minimo}; abbiamo già visto questa dimostrazione nella Proposizione 4; vediamo però la cosa da un punto di vista leggermente differente.

'$\supseteq$' Ovvio.

'$\subseteq$' Dobbiamo prima convincerci che, $\forall W$ ssv. di $V$, abbiamo che $m_{f|_W} \mid m_f$; infatti abbiamo che $m_f \in I(f\mid_W)$, visto che $m_{f|_W} = 0$ (si annulla in ogni vettore di $V$, si annullerà quindi anche nei vettori di $W$). Sia quindi $\lambda \in Sp(f)$, abbiamo quindi che $\exists W \neq \{0\}$ autospazio di $\lambda$; quindi $W = Ker(f - \lambda id_V)$ è un sottospazio $f$-invariante, inoltre $f\mid_W = \lambda id_W \Rightarrow m_{f|_W}(t) = t - \lambda \Rightarrow t - \lambda \mid m_f(t) \Rightarrow \lambda$ è radice di $m_f(t)$.

**Esempio 4.** Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; vediamo $p_A(t) = det(A - tI) = -t(t-1)^2 \in I(A)$. Abbiamo analizzato nella Riflessione 3 quali sono i possibili polinomi minimi di una matrice con questo polinomio caratteristico, dobbiamo però considerare che dei 5 polinomi della Riflessione, solo 2 sono effettivamente possibili: devono avere le stesse radici del polinomio caratteristico, quindi devono comparire sia $t$ sia $(t-1)$; quindi $m_A(t) = t(t-1) \vee m_A(t) = t(t-1)^2$. Quindi se la matrice è diagonalizzabile il polinomio minimo sarà il primo (nel quale le radici hanno molteplicità 1), altrimenti il polinomio sarà il secondo. Sappiamo che una matrice è diagonalizzabile solo se $\mu_a(\lambda_i) = \mu_g(\lambda_i)$ per ogni $\lambda_i$ radice del polinomio caratteristico.

- $\mu_a(0) = 1 \Rightarrow \mu_g(0) = 1$ (visto che $\mu_g \leq \mu_a$).
- $\mu_a(1) = 2$, ci sono due possibilità: $\mu_g(1) = 2 \vee \mu_g(1) = 1$, nel primo caso la matrice è diagonalizzabile. Sappiamo anche che $\mu_g(\lambda) = dim\ V - rk(A - \lambda I)$; quindi in questo caso $\mu_g(1) = 3 - rk(A - I) = 1$; quindi la matrice non è diagonalizzabile, il polinomio minimo sarà quindi $t(t-1)^2$.

**Corollario 6.** *Sia $f \in End(V)$ diagonalizzabile, allora $\forall W$ ssv. di $V$ abbiamo che $f\mid_W$ diagonalizzabile.*

**Dimostrazione.** Sappiamo che $m_{f|_W} \mid m_f$, ma $m_f$ è completamente fattorizzabile e ha solo radici di molteplicità 1 (visto che $f$ è diagonalizzabile), quindi anche $m_{f|_W}$ avrà solo radici di molteplicità 1, e quindi $f\mid_W$ è diagonalizzabile.

**Corollario 7.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e $f \in End(V)$ nilpotente. Allora $f^n = 0$.*

**Dimostrazione.** $f$ nilpotente $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \mid f^k = 0 \Rightarrow t^k \in I(f) \Rightarrow m_f(t) \mid t^k \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} \mid m_f(t) = t^s$, con $s \leq k$.
Sappiamo che $p_f(t)$ è un polinomio di grado $n$ completamente fattorizzabile che ha come unica radice 0, quindi $p_f(t) = t^n$. Ma $p_f \in I(f) \Rightarrow f^n = 0$.

**Esercizio 3.** Sia $f \in End(V)$ non invertibile, dimostrare che $\exists g \neq 0 \in End(V) \mid f \circ g = g \circ f = 0$.

# Lezione 25

## Teoria

*Riflessione* 4. L'obiettivo dei ragionamenti delle ultime lezione è avere un metodo per determinare la similitudine tra due matrici; abbiamo visto che polinomio caratteristico, minimo e autospazi sono invarianti ma non sono un sistema completo. Stiamo quindi affinando l'indagine approfondendo la situazione. Se l'endomorfismo $f$ che abbiamo è triangolabile ma non diagonalizzabile vuol dire che la somma dei suoi autospazi non è tutto $V$. Cerchiamo quindi degli autospazi $f$-invarianti la somma dei quali ci dia tutto $V$, questi autospazi ci sono stati dati dal teorema di fattorizzazione primaria.
Questo si può applicare sia a $p_f$ sia a $m_f$.

Sia $f \in End(V)$ triangolabile, $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, $p_f(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{h_i}$, $m_f(t) = (-1)^n \prod_{i=1}^{k}(t-\lambda_i)^{s_i}$. Abbiamo allora:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker(f - \lambda_j id)^{h_j} = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker(f - \lambda_j id)^{s_j}$$

Abbiamo sempre che $h_i \geq s_i$, però è anche vero che i vari $h_i$ sono più facili da trovare, si deve quindi vedere se preferire lavorare con esponenti minori oppure trovare facilmente gli esponenti.

**Lemma 1.** *Sia $\phi \in End(V)$.*

*1) $Ker\ \phi^j \subseteq Ker\ \phi^{j+1}$.*

*2) $\exists m \in \mathbb{N} \mid Ker\ \phi^m = Ker\ \phi^{m+1} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{N},\ Ker\ \phi^m = Ker\ \phi^{m+t}$.*

*3) La successione $\{dim\ Ker\ \phi^j\}$ è un'invariante per coniugio.*

**Dimostrazione.** 1) Ovvio.

2) Dimostrato nell'ultima esercitazione.

3) $\phi \sim \psi \Rightarrow \phi^m \sim \psi^m$.

*Osservazione* 4. Se applichiamo il lemma a $\phi = f - \lambda_j id$ abbiamo che $Ker(f - \lambda_j id) \subseteq \ldots \subseteq Ker(f - \lambda_j id)^{s_j} \subseteq \ldots \subseteq Ker(f - \lambda_j id)^{h_j}$; poiché

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker(f - \lambda_j id)^{h_j} = \bigoplus_{j=1}^{k} Ker(f - \lambda_j id)^{s_j}$$
$$\Rightarrow Ker(f - \lambda_j id)^{s_j} = Ker(f - \lambda_j id)^{h_j}$$

Questa uguaglianza ci dice che la successione crescente dei sottospazi vettoriali deve stazionare almeno da $s_j$.

**Definizione 4** (Autospazio generalizzato)**.** Sia $f \in End(V)$, $\lambda_j \in Sp(f)$. Il sottospazio $f$-invariante

$$V'_{\lambda_j} = Ker(f - \lambda_j id)^{s_j}$$

è detto autospazio generalizzato relativo a $\lambda_j$.

*Osservazione* 5. Se $A = \mathfrak{M}_B(f)$, gli autospazi si possono calcolare riscrivendo il sistema lineare $(A - \lambda_j I)^{h_j} X = 0$. Si ha dunque:

$$V = \bigoplus_{j=1}^{k} (V'_{\lambda_j})$$

Ma cosa diventa la restrizione di $f$ a questi autospazi? Riusciamo a trovare qualcosa di decente?

**Esercizio 4.** Sia $f \in End(V)$ triangolabile, $W$ ssv. $f$-invariante e $Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Allora:

$$W = \bigoplus_{j=1}^{k} \left(W \cap V'_{\lambda_j}\right)$$

Visto che $m_f(t) = \prod_1^k (t - \lambda_i)^{s_i}$ e sappiamo che $m_{f|W} \mid m_f$ (poiché $m_f \in I(f|_W))$ possiamo dire che $m_{f|W}(t) = \prod_1^k (t - \lambda_i)^{r_i}$ con $0 \leq r_i \leq s_i$.

A questo punto, applicando alla fattorizzazione il teorema della fattorizzazione primaria, possiamo scrivere:

$$W = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker\left(f|_W - \lambda_i id\right)^{r_i}$$

Ma $Ker\left(f|_W - \lambda_i id\right)^{r_i} = Ker\left(f - \lambda_i id\right)^{r_i} \cap W \subseteq V'_{\lambda_i} \cap W$ e quindi possiamo concludere che

$$W \subseteq \bigoplus_{j=1}^{k} \left(W \cap V'_{\lambda_j}\right)$$

**Teorema 3.** *Sia $f \in End(V)$ triangolabile.*

*1) $\forall j$, $f|_{V'_{\lambda_j}}$ ha solo l'autovalore $\lambda_j$.*

*2) $f\mid_{V'_{\lambda_j}}$ ha polinomio caratteristico $\pm(t-\lambda_j)^{h_j}$ e polinomio minimo $(t-\lambda_j)^{s_j}$. Con $h_j = dim\ V'_{\lambda_j}$ e $s_j = s_j$ di $f$.*

*3) $dim\ V'_{\lambda_j} = h_j = \mu_a(\lambda_j)$ rispetto a $f$.*

*4) Se poniamo $d_i = dim\ Ker(f-\lambda_j id)^i$ allora*

$$\mu_g(\lambda_j) = d_1 < d_2 < \ldots < d_{s_j}$$

*Sono invarianti di coniugio.*

**Dimostrazione.** 1) Se $f\mid_{V'_{\lambda_j}}$ avesse anche $\mu \neq \lambda_j$ come autovalore, avremmo $V_\mu \cap V'_{\lambda_j} \neq \{0\}$ e dunque $V'_{\lambda_j} \cap V'_\mu \neq \{0\}$; questo è assurdo, visto che sono tutti in somma diretta.

4) Già dimostrato.

2)3) Sia $B_j$ una base di $V'_{\lambda_j}$. Allora $B = B_1 \cup \ldots \cup B_k$ è base di $V$ e $\mathfrak{M}_B(f)$ sarà diagonale a blocchi:

$$\mathfrak{M}_B(f) = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_k \end{pmatrix}$$

Dove $M_j$ è un blocco quadrato di ordine $dim\ V'_{\lambda_j}$; si può utilizzare questa matrice per calcolare polinomio minimo e caratteristico (considerando che $P_{M_j}$ ha come radice solo $\lambda_j$: la restrizione all'autospazio generalizzato ha come autovalore solo $\lambda_j$ e quindi necessariamente $p_{M_j} = p_{f|_{V'_{\lambda_j}}} = \pm(t-\lambda_j)^{h_j}$):

$$p_f = p_{M_1} \cdot \ldots \cdot p_{M_k}$$
$$m_f = mcm(m_{M_1}, \ldots, m_{M_k}) = \prod_{j=1}^{k} m_{M_j}$$

Ma il polinomio minimo di $f$ è fatto dai vari $(f-\lambda_i)^{s_i}$ da questo $m_{f|_{V'_{\lambda_j}}} = (t-\lambda_j)^{s_j}$.

*Riflessione* 5. La nostra intenzione iniziale era quella di studiare $f$, abbiamo però visto che è più facile studiare le riduzioni di $f$ rispetto a dei sottospazi vettoriali particolarmente comodi; quindi cerchiamo di vedere $f$ come l'unione di varie restrizioni; inoltre non studieremo esattamente $f\mid_{V'_\lambda}$ ma $f\mid_{V'_\lambda} -\lambda id$, in modo tale da utilizzare endomorfismi che abbiamo come unico autovalore 0. Questa è la nostra strategia:

1) Separazione di autovalori.

2) Scegliere un autovalore $\lambda$ e analizzare $f\mid_{V'_\lambda} -\lambda id$.

3) Riunire tutto.

Quindi possiamo lasciare indietro l'indice $j$ (per il momento). Ricapitolando possiamo dire (considerando l'autovalore $\lambda$, $W = V'_\lambda$ e $\phi = f\mid_W$):

$$\begin{cases} dim\ W = \mu_a(\lambda) = h \\ p_\phi = \pm\left(t-\lambda\right)^h \\ m_\phi = (t-\lambda)^s \\ d_i = dim\ Ker(\phi - \lambda id)^i \\ [\lambda, s, [d_1 < \ldots < d_s = h]] \text{ è invariante per coniugio.} \end{cases}$$

Possiamo ricondurci al caso nilpotente: se $\psi = \phi - \lambda id$ allora $p_\psi = \pm t^h$, $m_\psi(t) = t^s$. Quindi, per $\psi$ abbiamo la seguente stringa di invarianti (da ora in poi chiameremo stringa di invarianti la stringa che contiene, come la seguente, autovalore, indice di nilpotenza e dimensioni dei $Ker$ delle potenze):

$$[0, s, [d_1 < \ldots < d_s = h]]$$

Dobbiamo studiare gli elementi nilpotenti, cerchiamo una base di $V$ per la quale la matrice associata dovrà obbligatoriamente essere di una ben precisa forma.

**Proposizione 7.** *Sia $\psi \in End(V)$ nilpotente, $dim\ V = h$. Sono fatti equivalenti:*

*1)* $m_\psi = t^h$ *ossia* $m_\psi = \pm p_\psi$.

*2)* $\exists B \mid \mathfrak{M}_B(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

**Dimostrazione.** Vediamo la doppia implicazione:

'1) $\Rightarrow$ 2)' $Ker\ \psi \subseteq Ker\ \psi^2 \subseteq \ldots \subseteq Ker\ \psi^h$. $m_\psi = t^h \Rightarrow \exists v \in V, v \neq 0 \mid \psi^{h-1}(v) \neq 0$. Vediamo che $B = \left\{\psi^{h-1}, \psi^{h-2}(v), \ldots, \psi(v), v\right\}$ è una base (se lo fosse chiaramente la matrice associata a $\psi$ in $B$ è la matrice cercata, basta seguire i vari vettori della base).

Sia $\displaystyle\sum_0^{h-1} a_i\psi^i(v) = 0$, applichiamo ai due termini $\psi^{h-1}$.

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_0^{h-1} a_i\psi^{i+h-1}(v) \\ &= a_0\psi^{h-1}(v) + \sum_1^{h-1} a_i\psi^{i+h-1}(v) \\ &= a_0\psi^{h-1}(v) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo $a_0 = 0$. Si itera il procedimento.

'2) $\Rightarrow$ 1)' Sia $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

Sappiamo che $m_\psi = m_J$, dobbiamo provare che $m_J = t^h$. Ma osserviamo che:

$$\begin{aligned} Ker\ J &= Span\left(\{e_1\}\right) \\ Ker\ J^2 &= Span\left(\{e_1, e_2\}\right) \\ &\vdots \\ Ker\ J^{h-1} &= Span\left(\{e_1, \ldots, e_h\}\right) \\ Ker\ J^h &= \mathbb{K}^h \Rightarrow m_J(t) = t^h \end{aligned}$$

*Osservazione* 6. Se $f \in End(V)$ e $v, f(v), \ldots, f^{k-1}(v)$ sono linearmente indipendenti, allora $deg\ m_f \geq k$.

*Dimostrazione.* Sia per assurdo $deg\ m_f = r < k$ e $m_f(t) = \sum_{j=0}^{r} a_j t^j$. Sappiamo che $m_f(f) = 0$ ma allora esiste una combinazione lineare nulla a coefficienti non nulli di vettori linearmente indipendenti.

**Definizione 5** (Blocco di Jordan)**.** Si dice blocco di Jordan di ordine $r$ relativo a $\lambda$ la matrice (di ordine $r$):

$$J(\lambda, r) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

**Definizione 6** (Matrice di Jordan)**.** Si dice matrice di Jordan ogni matrice diagonale a blocchi in cui ogni blocco è un blocco di Jordan.

**Definizione 7** (Base di Jordan)**.** Sia $f \in End(V)$, si dice base di Jordan per $f$ ogni base $B$ di $V$ tale che $\mathfrak{M}_B(f)$ è una matrice di Jordan.

**Proposizione 8.** *Possiamo riscrivere la Proposizione 7 come:*

$$m_\psi = \pm p_\psi = \pm t^h \Leftrightarrow \exists B \mid \mathfrak{M}_B(\psi) = J(0, h)$$

*La stringa invariante è:* $[0, h, [1, 2, \ldots, h]]$.

**Lemma 2.** *Sia $\psi \in End(V)$ nilpotente con indice di nilpotenza $s$ e $dim\ V = h$. $\forall j,\ 3 \leq j \leq s$ si consideri che:*

$$Ker\ \psi^{j-2} \subsetneq Ker\ \psi^{j-1} \subsetneq Ker\ \psi^j$$

*(Sappiamo che sono inclusioni strette visto che $j \leq s$ e che se ci fosse un'uguaglianza anche tutte le successive lo sarebbero). Sia $W$ un ssv. tale che:*

$$Ker\ \psi^j = Ker\ \psi^{j-1} \oplus W$$

*Quindi $\forall v \in W,\ \psi^j(v) = 0 \wedge \psi^{j-1}(v) \neq 0$. Sia $\{w_1, \ldots, w_k\}$ una base di $W$, allora:*

*1) $\psi(w_1), \ldots, \psi(w_k) \in Ker\ \psi^{j-1}$ e sono linearmente indipendenti.*

*2)* $T = Span\left(\{\psi(w_1), \dots, \psi(w_r)\}\right) \cap Ker\ \psi^{j-2} = \{0\}$

**Dimostrazione.** 1) Il primo fatto è in pratica già stato dimostrato: $\sum_{i=1}^{k} a_i\psi(w_i) = 0 \Rightarrow \psi\left(\sum_{i=1}^{k} a_i w_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \in Ker\ \psi \cap W \subseteq Ker\ \psi^{j-1} \cap W = \{0\}$

2) Sia $T \ni z = \sum_{i=1}^{k} a_i\psi(w_i) = \psi\left(\sum_{i=1}^{k} a_i w_i\right)$. $z \in Ker\ \psi^{j-2} \Rightarrow \psi^{j-1}\left(\sum_{i=1}^{k} a_i w_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} a_i w_i \in Ker\ \psi^{j-1} \cap W = \{0\}$.

# Esercitazione

*Osservazione* 7. Sia $V$ uno spazio vettoriale e $f \in End(V)$ nilpotente. Consideriamo allora la successione:

$$\{0\} \neq Ker\ f \subsetneq Ker\ f^2 \subsetneq \dots \subsetneq Ker\ f^k = Ker\ f^{k+1} = \dots = V$$

Abbiamo già visto che da un certo punto in poi la successione è stazionaria; inoltre $k$ (il minimo valore per cui la successione raggiunge il valore massimo) è detto indice di nilpotenza. Vediamo adesso come costruire ogni $Ker\ f^c$ come somma diretta di sottospazi vettoriali.

$$\begin{aligned}
V = Ker\ f^k &= Ker\ f^{k-1} \oplus L_1 \neq \{0\} \\
Ker\ f^{k-1} &= Ker\ f^{k-2} \oplus f(L_1) \oplus L_2 \\
Ker\ f^{k-2} &= Ker\ f^{k-3} \oplus f^2(L_1) \oplus f(L_2) \oplus L_3 \\
&\vdots \\
Ker\ f &= f^{k-1}(L_1) \oplus f^{k-2}(L_2) \oplus \dots \oplus f(L_{k-1}) \oplus L_k
\end{aligned}$$

Presa una qualsiasi colonna, abbiamo che gli spazi che la costituiscono sono in somma diretta: $L_i \oplus f(L_i) \oplus \dots \oplus f^{k-i}(L_i)$.

**Esercizio 5.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo di trovare la matrice di Jordan simile ad $A$. Calcoliamo il polinomio caratteristico: $p_A(t) = -t^5$. Cerchiamo adesso il polinomio minimo, che sarà $t^k$, dove $k$ è il minimo valore per il quale $A^k = 0$. Ci calcoliamo le potenze di

$A$, che poi saranno utili.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A^3 = 0$$

Abbiamo quindi $\{0\} \subsetneq \overset{dim=2}{Ker\ A} \subsetneq \overset{dim=4}{Ker\ A^2} \subsetneq \overset{dim=5}{Ker\ A^3} = \ldots = \mathbb{R}^5$. Vediamo ora quello che abbiamo visto prima in generale:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^5 = Ker\ A^3 &= Ker\ A^2 \oplus L_1 \\ Ker\ A^2 &= Ker\ A \oplus A(L_1) \oplus L_2 \\ Ker\ A &= Ker\ A \oplus A^2(L_1) \oplus A(L_2) \oplus L_3 \end{aligned}$$

Grazie alla formula delle dimensioni troviamo che $dim\ L_1 = 1$, $dim\ L_2 = 1$, $dim\ L_3 = 0$. Per trovare $L_1$ cerchiamo un supplementare a $Ker\ A^2$. Vediamo che, per esempio $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin Ker\ A^2$, allora possiamo dire $L_1 = Span\left(\{e_3\}\right)$. Troviamo anche $A(L_1) = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$. Per finire la colonna troviamo anche $L_2 = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$. Visto che $Ker\ A^2 = Ker\ A \oplus A(L_1) \oplus L_2$ per trovare $L_2$ possiamo completare a base di $Ker\ A^2$ una base di $Ker\ A \oplus A(L_1)$. $Ker\ A = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \left\{ \begin{smallmatrix} x_3=0 \\ x_4=x_5=x_1+x_2 \end{smallmatrix} \right.\right\} = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$. A questo punto cerchiamo $Ker\ A \oplus A(L_1) = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$. Voglio completare tutto questo a $Ker\ A^2$. Possiamo farlo con $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi prendiamo questo vettore come generatore di $L_2$. E da questo troviamo $A(L_2) = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$. Quindi prendiamo come base: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$. Vista la costruzione di questa base sappiamo per certo che la matrice associata a questa base è una matrice di Jordan.

**Esercizio 6.** Fare lo stesso sulla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Lezione 26

## Teoria

**Teorema 4** (Forma canonica di Jordan per endomorfismi nilpotenti)**.** *Sia $V$ uno spazio di dimensione $h$, $\psi \in End(V)$ un endomorfismo nilpotente e $[0, s, [d_1 < \ldots, d_s = h]]$ la stringa di invarianti. Allora:*

*1) $\exists B$ base di $V$ tale che $\mathfrak{M}_B(\psi)$ è una matrice di Jordan (nella quale chiaramente ogni blocco è relativo all'autovalore $0$).*

*2) La matrice $\mathfrak{M}_B(\psi)$ è unica a meno di permutazioni dei blocchi nella diagonale ed è completamente determinata dalla stringa di invarianti.*

*3) La stringa di invarianti è un sistema completo per coniugio di endomorfismi nilpotenti.*

*Osservazione* 8. Se chiediamo che i blocchi lungo la diagonale siano disposti per ordine crescente avremo allora LA forma di Jordan, unica, e possiamo quindi denotarla $J(\psi)$.

**Dimostrazione.** Per ipotesi $m_\psi(t) = t^s$; quindi $0 \subsetneq Ker\ \psi \subsetneq \ldots \subsetneq Ker\ \psi^s = V$. Siano:

- $d_i = dim\ Ker\ \psi^i$.
- $W_j$ un supplementare di $Ker\ \psi^{j-1}$ dentro $Ker\ \psi^j$, ossia: $Ker\ \psi^j = Ker\ \psi^{j-1} \oplus W_j$.
- $r_j = dim\ W_j = d_j - d_{j-1}$.
- $\{v_{1,s}, \ldots, v_{r_s,s}\}$ una base di $W_s$ (il primo indice dei vettori li identifica nella base, il secondo ricorda che siamo in $W_s$).
- $v_{j,s-i} = \psi^i(v_{j,s})$ con $j_1^{r_s}$.

Per il Lemma 2 i vettori $v_{1,s-1}, \ldots, v_{r_s,s-1}$ appartengono a $Ker\ \psi^{s-1}$ e sono linearmente indipendenti, inoltre possono essere completati a:

$$\left\{v_{1,s-1}, \ldots, v_{r_s,s-1}, v_{r_s+1,s-1}, \ldots, v_{r_{s-1},s-1}\right\}$$

base di un supplementare $W_{s-1}$ di $Ker\ \psi^{s-2}$ in $Ker\ \psi^{s-1}$. Potrebbero infatti essere necessari degli altri vettori.
Iteriamo il procedimento scegliendo dei $W_j$ tali che $Ker\ \psi^j = Ker\ \psi^{j-1} \oplus W_j$. Possiamo vedere il tutto come una tabella:

$$
\begin{array}{cccccccc}
v_{1,s} & \dots & v_{r_s,s} & & & & & \text{base di } W_s \\
\psi\downarrow & & \downarrow\psi & & & & & \\
v_{1,s-1} & \dots & v_{r_s,s-1} & \dots & v_{r_{s-1},s-1} & & & \text{base di } W_{s-1} \\
\psi\downarrow & & \downarrow\psi & & \downarrow\psi & & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
\psi\downarrow & & \downarrow\psi & & \downarrow\psi & & & \\
v_{1,2} & \dots & v_{2,2} & \dots & v_{r_2,2} & & & \text{base di } W_2 \\
\psi\downarrow & & \downarrow\psi & & \downarrow\psi & & & \\
v_{1,1} & \dots & v_{2,1} & \dots & v_{r_2,1} & \dots & v_{r_1,1} & \text{base di } Ker\ \psi
\end{array}
$$

Si ha quindi:

$$
\begin{aligned}
V = Ker\ \psi^s &= Ker\ \psi^{s-1} \oplus W_s \\
&= Ker\ \psi^{s-2} \oplus W_{s-1} \oplus W_s \\
&= Ker\ \psi \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s
\end{aligned}
$$

Per costruzione i vettori presenti nella tabella formano una base di $V$, sono infatti linearmente indipendenti e sono tutti i vettori che vanno a zero con $\psi^s$, cioè tutti i vettori dello spazio vettoriale. Inoltre questa base è particolarmente comoda per calcolare la matrice associata:

$$v_{1,1} = \psi(v_{1,2}) = \psi^2(v_{1,3}) = \dots = \psi^{s-1}(v_1, s)$$

Quindi

$$\{v_{1,1}, \dots, v_{1,s}\} = \left\{\psi^{s-1}(v_{1,2}), \dots, \psi(v_{1,s}), v_{1,s}\right\}$$

Dobbiamo però scegliere un ordine intelligente dei vettori della base, e ci aiuta a farlo la tabella: visto che vogliamo una matrice di Jordan dobbiamo prendere il primo vettore appartenente al nucleo di $\psi$, scegliamo quindi $v_{1,1}$, come secondo vettore prendiamo un vettore che $\psi$ mandi in $v_{1,1}$, visto che vogliamo che la seconda colonna abbia un unico 1: in corrispondenza del primo vettore; il secondo vettore sarà quindi $v_{1,2}$ e così via. L'ordine della base è quindi ottenuto risalendo le varie colonne. Chiaramente ogni colonna di altezza $j$ produce un blocco di Jordan di ordine $j$.

Vediamo come il numero e la dimensione dei blocchi sono completamente dipendenti dalla stringa di valori indipendenti. Vediamo intanto che:

- $s$ = indice di nilpotenza = massimo ordine dei blocchi in $\mathfrak{M}_B(\psi)$.
- $d_1 = dim\ Ker\ \psi$ = numero totale di blocchi (numero di 'basi' delle colonne).

Più precisamente, indicando con $b_j$ il numero di blocchi di ordine $j$ in $\mathfrak{M}_B(\psi)$ abbiamo:

- $b_s = dim\ W_s = r_s$.
- $b_j = dim\ W_j - dim\ W_{j+1} = r_j - r_{j+1}$.
- $b_1 = dim\ Ker\ \psi - dim\ W_2 = r_1 - r_2$.

In generale possiamo dire che

$$b_j = r_j - r_{j+1}$$

Dobbiamo però esprimere $b_j$ in funzione degli invarianti per coniugio se vogliamo dimostrare il teorema. Ci basta però dire che:

$$\begin{aligned} b_j &= r_j - r_{j+1} = dim\ W_j - dim\ W_{j+1} \\ &= \left(dim\ Ker\ \psi^j - \dim\ Ker\ \psi^{j-1}\right) - \left(dim\ Ker\ \psi^{j+1} - \dim\ Ker\ \psi^j\right) \\ &= (d_j - d_{j-1}) - (d_{j+1} - d_j) \\ &= 2d_j - d_{j-1} - d_{j+1} \end{aligned}$$

Possiamo quindi infine dire che, se $\psi_1, \psi_2$ sono endomorfismi nilpotenti di $V$ con la stessa stringa di invarianti, allora $\exists B_1, B_2$ basi di $V$ tali che

$$\mathfrak{M}_{B_1}(\psi_1) = \mathfrak{M}_{B_2}(\psi_2)$$

e quindi i due endomorfismi sono coniugati.

*Osservazione* 9. Dal lemma segue che:

$$dim\ W_j \leq dim\ W_{j-1} \Rightarrow r_j \leq r_{j-1}$$

Ossia la successione $\{d_j - d_{j-1}\}$ è decrescente.

Diamo ora la forma generale del teorema:

**Teorema 5** (forma canonica di Jordan per endomorfismi triangolabili)**.** *Sia $f \in End(V)$ triangolabile. Allora:*

*1) Esiste una base $B$ di $V$ tale che $\mathfrak{M}_B(f)$ è una matrice di Jordan ($B$ si dice base di Jordan per $f$).*

*2) La matrice $\mathfrak{M}_B(f)$ è unica a meno di permutazione dei blocchi sulla diagonale ed è determinata dalle stringhe di invarianti:*

$$s(\lambda_i) = [\lambda_i, s_i, [d_1(\lambda_1) < \ldots < d_{s_i}(\lambda_i)]]$$

*associate ai vari autovalori di $f$.*

*3) Due endomorfismi triangolabili di $V$ sono coniugati $\Leftrightarrow$ hanno la stessa forma canonica di Jordan (che è quindi un invariante completo di coniugio).*

**Corollario 8.** *Ogni matrice triangolabile è simile alla sua trasposta.*

**Dimostrazione.** $J(A)$ dipende solo dalle dimensioni dei $Ker(a - \lambda I)^j$ e dunque da $rk(A - \lambda I)^j$. Poiché $\forall j \in \mathbb{N},\ rk\left({}^{\tau}A - \lambda I\right)^j = rk\left(A - \lambda I\right)^j$ allora abbiamo che $J\left({}^{\tau}A\right) = J(A)$.

## Esercitazione

Riprendiamo quanto detto ormai da tempo:

*Riflessione* 6. Sia $V$ uno spazio vettoriale e $f \in End(V)$ endomorfismo nilpotente con indice di nilpotenza $k$ (cioè $m_f(t) = t^k$). Allora abbiamo:

$$\{0\} \neq Ker\ f \subsetneq \ldots \subsetneq Ker\ f^k = \ldots = V$$

Sappiamo ormai che possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} V = Ker\ f^k &= Ker\ f^{k-1} \oplus L_1 \\ Ker\ f^{k-1} &= Ker\ f^{k-2} \oplus f(L_1) \oplus L_2 \\ &\vdots \\ Ker\ fi &= f^{k-1}(L_1) \oplus \ldots \oplus f(L_{k-1}) \oplus L_k \end{aligned}$$

Abbiamo la famosa disposizione a colonna dei vettori di quella che sarà poi la base di Jordan del nostro endomorfismo. Notiamo che $Ker\ f^i$ è lo Span dei vettori delle prime $i$ colonne.

- $\mu_g(0) = dim\ Ker\ f =$ numeri di blocchi di Jordan nella matrice di Jordan associata.
- $\mu_a(0) m_f = k$. $k$ è la dimensione del blocco di dimensione massima (ci sono $dim\ L_1$ blocchi di dimensione massima).

In generale (per un generico endomorfismo triangolabile) avremo:

- $p_f(t) = \prod_{j=1}^{h} (\lambda_j - t)^{r_j}$.
- $m_f(t) = \prod_{j=1}^{h} (\lambda_j - t)^{s_j}$.

Sapendo questo possiamo utilizzare la decomposizione primaria su entrambi i polinomi:

$$\begin{aligned} V &= \bigoplus_{j=1}^{h} Ker(f - \lambda_j id)^{s_j} \\ &= \bigoplus_{j=1}^{h} Ker(f - \lambda_j id)^{r_j} \\ &= \bigoplus_{j=1}^{h} V'_{\lambda_j} \end{aligned}$$

I membri di queste somme dirette sono chiaramente uguali membro a membro. Sappiamo che $\forall i,\ f\ |_{V'_{\lambda_i}}$ è triangolabile e ha come unico autovalore $\lambda_i$ utilizziamo quindi $g_i = (f - \lambda_i id)\ |_{V'_{\lambda_i}}$ (che sarà nilpotente) per poter studiare al meglio l'endomorfismo. Ma $Ker\ g_i = Ker(f - \lambda_i id) \subseteq V'_{\lambda_i}$. Non è quindi necessaria la restrizione.

**Esempio 5.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Per prima cosa, come al solito, troviamo il polinomio caratteristico della matrice: $p_A(t) = (1-t)^3(-1-t)^2$; questo ci dice che $Sp(A) = \{1, -1\}$. Dobbiamo esaminare autonomamente l'autospazio generalizzato relativo a 1 e quello relativo a $-1$.

- Consideriamo prima la matrice $A - I$ relativa all'autovalore 1. Sappiamo che $\{0\} \neq Ker(A-I) \subsetneq Ker(A-I)^2 \subseteq Ker(A-I)^3$. Vogliamo sapere come cresce il $Ker$ nella successione. Quindi studiamo il nucleo delle varie potenze di $(A - I)$.

  $$A{-}I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad (A{-}I)^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad (A{-}I)^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -8 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -8 & 12 \\ -8 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

  Dobbiamo studiare i $Ker$ delle matrici:

  - $rk(A-I) = 3$. $Ker(A-I) = \left\{ \begin{smallmatrix} x_4 = x_2 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \end{smallmatrix} \right.$.
  - $rk(A-I)^2 = 2$. $Ker(A-I)^2 = \left\{ \begin{smallmatrix} x_4 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \end{smallmatrix} \right.$.
  - $rk(A-I)^3 = 2$. $Ker(A-I)^3 = \left\{ \begin{smallmatrix} x_4 = 0 \\ x_1 + x_5 = 0 \end{smallmatrix} \right.$.

  Abbiamo quindi:

  $$\{0\} \neq Ker(A-I) \subsetneq Ker(A-I)^2 = Ker(A-I)^3 = V_1'$$

  Sappiamo anche che $Ker(A-I)^2 = Ker(A-I) \oplus L_1$ con $L_1$ ssv. di dimensione 1. Il vettore di cui $L_1$ è Span deve quindi appartenere a $Ker(A-I)^2$ ma non a $Ker(A-I)$. Dalle equazioni dei $Ker$ si vede che $e_2$ rispetta le nostre richieste. Quindi diciamo $L_1 = Span(\{e_2\})$, dobbiamo trovare ora il vettore nel quale è mandato $e_3$ da $(A - I)$ infatti poi completeremo questo a base di $Ker(A - I)$. $(A - I)(e_2) = (e_1 - e_5)$. Completandolo a base del $Ker(A - I)$ troviamo: $Ker(A - I) = Span(\{e_1 - e_5, e_3\})$. Prendiamo come primi vettori della base: $\{e_1 - e_5, e_2, e_3\} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Riassumendo la situazione abbiamo:

  $$\begin{tikzcd} v_2 \arrow[d, "\text{(A-I)}"'] & \\ v_1 & v_3 \end{tikzcd}$$

  Inoltre avremo:

  $$\mathfrak{M}_B(A) = \begin{pmatrix} \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ \hline \end{array} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{matrix} \end{pmatrix}$$

- Consideriamo adesso la matrice $A + I$ e le sue potenze; sappiamo che possiamo non interessarci delle potenze oltre la seconda. Abbiamo quindi:

$$A+I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (A+I)^2 \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Studiamo ora i $Ker$ delle matrici:

- $rk(A+I) = 4$. $Ker(A+I) = \begin{cases} x_1 = x_3 = x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$.
- $rk(A+I)^2 = 3$. $Ker(A+I)^2 = \begin{cases} x_1 = x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$.

Quindi abbiamo che $Ker(A+I) \subsetneq Ker(A+I)^2$, sottospazi vettoriali di dimensione $1,\ 2$ rispettivamente; prendiamo $e_5 = v_5$ come generatore di $L_1$, visto che $e_5 \notin Ker(A+I) \wedge e_5 \in Ker(A+I)^2$. Troviamo poi come base di $Ker\ A+I$ il vettore $(A+I)(e_5) = e_2 + e_4 = v_4$. Riassumendo abbiamo:

$$\begin{tikzcd} v_5 \arrow[d, "\text{(A-I)}"'] \\ v_4 \end{tikzcd}$$

Inoltre con questi due vettori abbiamo una base completa di $\mathbb{R}^5$. Possiamo quindi vedere che la matrice associata ad $A$ nella base scelta è proprio nella forma di Jordan:

$$\mathfrak{M}_B(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Proposizione 9.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$, $f \in End(V)$ tale che $p_f(t) = (\lambda - t)^n$ e $m_f(t) = (t-\lambda)^n$. Allora $\forall i_1^n$, $\exists! W \subseteq V$ ssv. $f$-invariante tale che dim $W = i$.*

**Dimostrazione.** Dalla Proposizione 7 possiamo dire che $\exists B$ basse di $V$ tale che:

$$\mathfrak{M}_{B,f} (=) \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Vista la particolarità della matrice abbiamo:

$$\begin{aligned} Ker(f - \lambda\ id) &= Span\left(\{v_1\}\right) \\ Ker(f - \lambda\ id)^2 &= Span\left(\{v_1, v_2\}\right) \\ &\vdots \\ Ker(f - \lambda\ id)^n &= Span\left(\{v_1, \dots, v_n\}\right) \end{aligned}$$

Questo dimostra l'esistenza di sottospazi di dimensione $i$. Dimostriamo ora l'unicità.
Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale $f$-invariante di dimensione $i$. Consideriamo $f\mid_W$ e la sua forma di Jordan. Avremo che $m_{f|W} | (t-\lambda)^n \Rightarrow m_{f|W}(t) = (t-\lambda)^s$ con $1 \leq s \leq n$. Ma $\mu_g(\lambda, f\mid_W) = 1 \Rightarrow$ c'è solo un autovettore, quindi abbiamo esattamente un blocco nella matrice di Jordan associata a $f\mid_W$.
Se consideriamo inoltre che $W \subseteq Ker(f - \lambda\ id)^i$, poiché $m_{f|W}(t) = (t-\lambda)^k$, abbiamo che $W \subseteq Ker(f - \lambda\ id)^i$, inclusione di spazi vettoriali della stessa dimensione.

*Osservazione* 10. Sia $f \in End(V)$ tale che $0 \in Sp(f)$, e sia $k = \mu_a(0)$. Allora

$$\begin{aligned} \{0\} \neq Ker\ f \subsetneq \dots \subsetneq Ker\ f^k = Ker\ f^{k+1} = \dots \\ V \supsetneq Imm\ f \supsetneq \dots \supsetneq Imm\ f^k = Imm\ f^{k+1} = \dots \end{aligned}$$

Questo si può vedere facilmente considerando che $Imm\ f^{k+1} \subseteq Imm\ f^k$ e poi ragionando sulla formula delle dimensioni.

**Esercizio 7.** Sia $f \in End(\mathbb{R}^6)$ triangolabile tale che $Sp(f) = \{2, 1, -1\}$ e $\mu_g(2) = \mu_g(1) = \mu_g(-1) = 1$. Sapendo che

$$Imm(f^2 - id)^2 \subseteq Ker(f - 2\ id)^2$$

determinare la matrice di Jordan associata all'applicazione.

**Svolgimento.** Le informazioni circa lo spetto e la molteplicità geometrica ci dicono che la matrice presenta solamente tre blocchi di Jordan (relativi ciascuno a un autovalore diverso). Ma non possiamo dire nulla sulla dimensione dei vari blocchi: potremmo infatti avere un blocco di ordine 4 e due di ordine $1, \dots$. Considerando però che $Imm(f^2 - id)^2 \subseteq Ker(f - 2\ id)^2$ vediamo che $Ker(f - 2\ id)^2(f^2 - id)^2 = 0 \Rightarrow (x-2)^2(x^2-1)^2 \in I(f)$ (ricordiamoci che vale la commutativa). Sappiamo però che $m_f$ genera $I(f)$ e quindi $m_f(x) \mid (x-2)^2(x^2-1)^2$. Da questo possiamo dire che il blocco di ordine maggiore ha ordine 2, infatti se ci fossero blocchi di ordine più grande avremmo radici del polinomio minimo di molteplicità algebrica maggiore a 2. Avremo quindi:

$$J(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

# Lezione 27

## Teoria

Abbiamo visto che per ogni endomorfismo triangolabile esiste una base di Jordan in cui la matrice associata è una matrice di Jordan. la forma di Jordan è determinata univocamente dalla stringa di invarianti, che quindi è l'invariante completo per similitudine di endomorfismi triangolabili che tanto abbiamo cercato.

*Osservazione* 11. Sia $dim\ V = n$ e $f \in End(V)$ nilpotente con indice di nilpotenza $n$. Allora $\exists! W$ ssv. di $V$, $f$-invariante di dimensione $n-1$.

*Dimostrazione.* Per ipotesi $Ker\ f \subsetneq Ker\ f^2 \subsetneq \ldots \subsetneq Ker\ f^n = V$, sappiamo quindi che $\forall j_1^n dim\ Ker\ f^j = j$. Quindi abbiamo che $Ker\ f^{n-1}$ rispetta le condizioni che volevamo, in quanto ha dimensione $n-1$ ed è $f$-invariante. Dobbiamo provare l'unicità.
Sia $W$ ssv. di $V$ che sia $f$-invariante di dimensione $n-1$. Sappiamo che $m_{f|_W} | m_f$ e che $deg\ m_{f|_W} \leq n-1$. Siamo quindi nella situazione che $m_{f|_W}(t) | t^{n-1}$ ossia $W \subseteq Ker\ f^{n-1}$. Abbiamo un'inclusione di due sottospazi vettoriali della stessa dimensione, ci è sufficiente per affermare l'uguaglianza.

**Esercizio 8.** Sia $A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vediamo subito che $p_A(t) = t^2 + 1$. Quindi $A$ non è triangolabile in $\mathbb{R}$. Ma sappiamo che ogni polinomio in $\mathbb{C}$ è completamente fattorizzabile, quindi in $\mathbb{C}$ tutte le matrici sono triangolabili, in particolare $A$. Possiamo dire infatti che $p_A(t) = (t+\iota)(t-\iota)$. Abbiamo quindi la matrice di Jordan associata:

$$J_{\mathbb{C}}(A) = \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & -\iota \end{pmatrix}$$

Cerchiamo gli autovettori di questa applicazione.

$$A - \iota I = \begin{pmatrix} 1-\iota & -2 \\ 1 & -1-\iota \end{pmatrix} \Rightarrow z_1 = \begin{pmatrix} 1+\iota \\ 1 \end{pmatrix} \in V_\iota$$

Vediamo cosa succede moltiplicando $A$ per $\overline{z_1} = \left(\begin{smallmatrix} 1-\iota \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$; otteniamo $A\overline{z_1} = \left(\begin{smallmatrix} -\iota-1 \\ -\iota \end{smallmatrix}\right) = -\iota\overline{z_1} \Rightarrow \overline{z_1} \in V_{-\iota}$.
Proviamo a fare una cosa diversa: scriviamo $z_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \iota\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = x_1 + \iota y_1$. Questi

due vettori sono una base di $\mathbb{R}^2$, sono vettori linearmente indipendenti. Proviamo a vedere quanto vale $\mathfrak{M}_{\{x_1,y_1\}}(A) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{Re}\ \iota & \mathfrak{Im}\ \iota \\ -\mathfrak{Im}\ \iota & \mathfrak{Re}\ \iota \end{smallmatrix}\right)$.
Partendo da una matrice reale, non triangolabile, abbiamo trovato una base nella quale la matrice associata è molto legata all'autovalore interessato.

## Forma di Jordan reale

Per ora, date $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ non sappiamo, in generale, decidere se $A \sim B$. Sappiamo che:

$$A \underset{\mathbb{R}}{\sim} B \Rightarrow A \underset{\mathbb{C}}{\sim} B \Leftrightarrow J_{\mathbb{C}}(A) = J_{\mathbb{C}}(B)$$

Quindi $J_{\mathbb{C}}(A) \neq J_{\mathbb{C}}(B) \Rightarrow A \not\sim B$. Non possiamo per ora dire se vale il contrario. Inoltre non sappiamo nemmeno trovare una forma efficiente per una generica matrice non tiangolabile, corremmo cioè trovare il rappresentante più comodo della classe di equivalenza $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})/_{\sim}$.

**Esercizio 9.** Dimostrare che $A \underset{\mathbb{C}}{\sim} B \Rightarrow A \underset{\mathbb{R}}{\sim} B$

*Riflessione* 7. Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.

1. Consideriamo $P_A(t) \in \mathbb{R}[t]$; gli autovalori di $A$ saranno del tipo:

$$\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}_{\in\mathbb{R}}, \underbrace{\mu_1, \ldots, \mu_r, \overline{\mu_1}, \ldots, \overline{\mu_r}}_{\in\mathbb{C}}$$

2. Pensando $A$ come endomorfismo di $\mathbb{C}^n$ abbiamo:

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_1^k V'_{\lambda_i} \bigoplus_1^r \left( V'_{\lambda_{\mu_j}} \oplus V'_{\lambda_{\overline{\mu_j}}} \right)$$

3. Sia $\lambda$ un autovalore reale di $A$; una base di Jordan di $V'_\lambda \subseteq \mathbb{C}^n$ si trova prendendo vettori opportuni nella successione di sottospazi $Ker(A - \lambda I) \subseteq Ker(A - \lambda I)^2 \subseteq \ldots$. In particolare possiamo prendere anche una base reale di questi $Ker$, infatti $\forall j\ Ker(A - \lambda I)^j$ ha la stessa dimensione come sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbb{C}^n$.

4. Sia $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ un autovalore complesso di $A$ e $\{z_1, \ldots, z_t\}$ una base di Jordan di $V'_\mu$. Allora $\{\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_t}\}$ è una base di Jordan di $V'_{\overline{\mu}}$

   *Dimostrazione.* Abbiamo che $\overline{Ker(A - \mu I)^j} = Ker(\overline{A} - \overline{\mu} I)^j = Ker(A - \overline{\mu} I)^j$. Vediamo quindi che le due successioni dei $Ker$ delle potenze degli autospazi di $\mu$ e $\overline{\mu}$ sono molto simili: sono una coniugata dell'altra. Abbiamo quindi visto che $\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_t} \in V'_{\overline{\mu}} = \bigcup Ker(A - \overline{\mu} I)^j$. Questa unione è a infiniti termini, infatti non sappiamo a priori l'indice di stazionamento della successione.
   Inoltre i vettori sono linearmente indipendenti:

$$\sum_1^t a_i \overline{z_i} = 0 \Rightarrow \sum_1^t \overline{a_i} z_i = 0 \Rightarrow \forall i_1^n \overline{a_i} = 0$$

Sappiamo per finire che $dim\ V'_{\overline{\mu}} = \mu_a(\overline{\mu}) = \mu_a(\mu) = t$. Possiamo quindi dire che i vettori coniugati della base di $V'_\mu$ sono una base di $V'_{\overline{\mu}}$. Dobbiamo adesso mostrare che sono una base di Jordan. Per ipotesi abbiamo $Az_j = \mu z_j$ oppure $Az_j = \mu z_j + z_{j-1}$. Esaminiamo entrambi i casi:

- $Az_j = \mu z_j \Rightarrow A\overline{z_j} = \overline{Az_j} = \overline{\mu z_j} = \overline{\mu}\ \overline{z_j}$.
- $Az_j = \mu z_j + z_{j-1} \Rightarrow A\overline{z_j} = \overline{Az_j} = \overline{\mu}\ \overline{z_j} + \overline{z_{j-1}}$.

*Osservazione* 12. Abbiamo provato che, se $J_{\mathbb{C}}(A)$ ci sono $b$ blocchi relativi all'autovalore $\mu$ di ordine $m$, allora in $J_{\mathbb{C}}(A)$ ci sono $b$ blocchi di ordine $m$ relativi a $\overline{\mu}$.

5 Sia $\mu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ autovalore di $A$. Esiste una base di $V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}$ fatta di vettori reali.

*Dimostrazione.* Sia $\{z_1, \ldots, z_t\}$ una base di Jordan per $V'_\mu$. Per la 4 sappiamo che $\{\overline{z_1}, \ldots, \overline{z_t}\}$ è una base di Jordan di $V'_{\overline{\mu}}$. Quindi $dim(V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}) = 2t$. Poniamo $\forall j_1^n$:

- $x_j = \mathfrak{Re}\ z_j = \frac{z_j + \overline{z_j}}{2}$
- $y_j = \mathfrak{Im}\ z_j = \frac{z_j - \overline{z_j}}{2\iota}$

Abbiamo allora: $B = \{x_1, y_1, \ldots, x_t, y_t\} \subseteq V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}$. Inoltre i vettori della base precedente si possono scrivere come combinazione lineare di questi vettori, quindi i vettori appena trovati sono generatori. Inoltre sono esattamente $2t$, quindi devono essere linearmente indipendenti.
Cerchiamo ora di individuare la matrice associata a $\phi = A\ |_{V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}}$ rispetto alla base $B$. Avremo due possibili situazioni:

'$Az_y = \mu z_j$'
- $Ax_j = A\frac{z_j + \overline{z_j}}{2} = \frac{\mu z_j + \overline{\mu}\ \overline{z_j}}{2} = \mathfrak{Re}\ (\mu z_j) = x_j(\mathfrak{Re}\ \mu) - y_j(\mathfrak{Im}\ \mu)$.
- $Ay_j = A\frac{z_j - \overline{z_j}}{2\iota} = \frac{\mu z_j - \overline{\mu}\ \overline{z_j}}{2\iota} = \mathfrak{Im}\ (\mu z_j) = x_j(\mathfrak{Re}\ \mu) + y_j(\mathfrak{Im}\ \mu)$.

'$Az_y = \mu z_j + z_{j-1}$'
- $Ax_j = A\frac{z_j + \overline{z_j}}{2} = A\frac{\mu z_j + \overline{\mu}\ \overline{z_j} + z_{j-1} + \overline{\mu}\ \overline{z_{j-1}}}{2} = \mathfrak{Re}\ (\mu z_j) + \mathfrak{Re}\ z_{j-1} = x_j \mathfrak{Re}\ \mu - y_1 \mathfrak{Im}\ \mu + x_{j-1}$.
- $Ay_j = x_j \mathfrak{Im}\ \mu + y_j \mathfrak{Re}\ \mu + y_{j-1}$.

Se la matrice associata ad $A\ |_{V'_\mu}$ rispetto a $\{z_1, \ldots, z_t\} = S$ era del tipo:

$$\mathfrak{M}_S\left(A\ |_{V'_\mu}\right) = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$$

con $J_i$ blocco di Jordan di ordine $m_i$ relativo a $\mu$, allora:

$$\mathfrak{M}_B\left(A\ |_{V'_\mu \oplus V'_{\overline{\mu}}}\right) = \begin{pmatrix} \widetilde{J_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \widetilde{J_r} \end{pmatrix}$$

In cui ordine $\widetilde{J}_i = 2m_i$.

$$\widetilde{J}_i = \begin{pmatrix} H_\mu & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & H_\mu \end{pmatrix}$$

Dove $H_\mu = \left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{Re}\ \mu & \mathfrak{Im}\ \mu \\ -\mathfrak{Im}\ \mu & \mathfrak{Re}\ \mu \end{smallmatrix}\right)$; $I = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

*Riflessione* 8. Riassumendo possiamo dire che unendo le basi reali di tutti $V'_{\lambda_i}$ (con $\lambda_i$ autovalore reale) e le basi reali dei vari $V'_{\mu_i} \oplus V'_{\overline{\mu_i}}$ (trovata con il metodo appena visto) si ottiene una base $B$ tale che $\mathfrak{M}_B(A) = J_{\mathbb{R}}(A)$, matrice individuata univocamente da $J_{\mathbb{C}}(A)$ con la seguente costruzione:

1) Si lasciano invariati i blocchi di $J_{\mathbb{C}}(A)$ relativi agli autovalori reali.

2) Per ogni coppia di autovalori complessi coniugati $\mu$ e $\overline{\mu}$ si sostituisce ogni coppia di blocchi $J(\mu, m)$ e $J(\overline{\mu}, m)$ con un blocco di ordine $2m$ del tipo

$$\begin{pmatrix} H_\mu & I & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & H_\mu \end{pmatrix}$$

Se avessimo invertito la coppia di autovalori $\mu$ e $\overline{\mu}$ (sono comunque uno coniugato dell'altro) avremmo avuto $\left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{Re}\ \mu & -\mathfrak{Im}\ \mu \\ \mathfrak{Im}\ \mu & \mathfrak{Re}\ \mu \end{smallmatrix}\right)$ anzi che $\left(\begin{smallmatrix} \mathfrak{Re}\ \mu & \mathfrak{Im}\ \mu \\ -\mathfrak{Im}\ \mu & \mathfrak{Re}\ \mu \end{smallmatrix}\right)$. Per convenzione prendiamo quindi $\mathfrak{Im}\ \mu > 0$.
A questo punto la forma di Jordan reale è unica e ottenuta univocamente da $J_{\mathbb{C}}(A)$.

*Osservazione* 13. Sia $J = J(\lambda, n)$ un blocco di Jordan rispetto all'autovalore complesso $\lambda$ di ordine $n$; allora

1) $p_j = m_J = (t - \lambda)^n$, a meno del segno.

2) $\{e_n, Je_n, \ldots, J^n e_n\}$ è una base di $\mathbb{C}^n$ (da dimostrare).

Inoltre vale 2) $\Rightarrow$ 1). Infatti, come detto all'inizio dell'Esercitazione della lezione 24, $e_n, Je_n, \ldots, J^n e_n$ linearmente indipendenti $\Rightarrow$ *deg* $m_J \geq n$.

*Osservazione* 14. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & * \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & \vdots \\ & & & 1 & * \end{pmatrix}$$

In questa data matrice abbiamo che $e_2 = Ae_1$, $e_3 = Ae_2 = A^2 e_1$, in generale $e_n = A^{n-1} e_1$. Da cui $\mathfrak{C} = \{e_1, Ae_1, \ldots, A^{n-1} e_1\}$ viene detta base ciclica $\Rightarrow$ *deg* $m_A \geq n$. Inoltre, visto che *deg* $m_A = n$ e $m_A | p_A$ abbiamo $p_A = m_A$.

### Basi cicliche

**Definizione 8** (Base ciclica)**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e $f \in End(V)$. Una base $B$ di $V$ si dice ciclica per $f$ se $\exists v \in V$ *t.c.* $B = \{v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\}$.

**Definizione 9** (Polinomio minimo (vettori))**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale, $f \in End(V)$ e $v \in V$. Si dice polinomio minimo di $v$ il generatore monico dell'ideale $I(f,v) = \{q \in \mathbb{K}[t] \mid q(f)(v) = 0\}$. Il polinomio minimo si indica con $m_v(t)$.

*Osservazione* 15. Abbiamo che $I(f) \subseteq I(f,v) \Rightarrow m_v \mid m_f$.

**Lemma 3.** *Sia $f \in End(V)$. $\exists v \in V,$ t.c. $m_v = m_f$.*

**Dimostrazione.** $\forall v \in V,\ m_v \mid m_f$. Allora, visto che esiste un numero finito di divisori di un qualsiasi polinomio, abbiamo che $\{m_v \mid v \in V\}$ è un insieme finito, possiamo quindi dire che coincide con $\{m_{v_1}, \dots, m_{v_p}\}$ per certi $v_i \in V$. $\forall i_1^p$ considero quindi i sottospazi $W_j = Ker\ m_{v_j}(f) = \{z \in V \mid m_{v_j}(f)(z) = 0\}$. $\forall z \in V,\ \exists j$ *t.c.* $m_z = m_{v_j}$. Abbiamo quindi $m_{v_j}(f)(z) = m_z(f)(z) = 0$ cioè $z \in W_j$. Ma abbiamo che $V = W_1 \cup \dots \cup W_p$ e questo ci dice (Esercizio del Foglio 2) che $\exists i_0$ *t.c.* $W_{i_0} = V$. Ossia $Ker\ m_{v_{i_0}}(f) = V$, quindi $m_{v_{i_0}} \in I(f) \Rightarrow m_{v_{i_0}}(f) = m_f$.

**Teorema 6.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e $f \in End(V)$. Sono fatti equivalenti:*

*a) Esiste una base ciclica di $V$ per $f$.*

*b) $m_f = p_f$*

**Dimostrazione.** Per dimostrare l'equivalenza si mostra la coimplicazione:

'$a) \Rightarrow b)$' $a) \Rightarrow deg\ m_f \geq n \Rightarrow deg\ m_f = n \wedge m_f \mid p_f \Rightarrow m_f = p_f$.

'$b) \Rightarrow a)$' Per il lemma precedente $\exists v \in V$ *t.c.* $m_v = m_f$. Allora, per ipotesi $deg\ m_v = n$. Ne segue che $v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)$ sono linearmente indipendenti (infatti se esistesse una combinazione lineare a coefficienti non nulli di polinomi di grado $\leq n$, il polinomio minimo sarebbe il polinomio corrispondente a questa combinazione, e avrebbe quindi grado $n$). Quelli indicati sono quindi $n$ vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale di dimensione $n$: sono generatori.

## Esercitazione

*Riflessione* 9. Sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione $n$, $f \in End(V)$ e $p \in \mathbb{R}[t]$ irriducibile.

$$p \mid p_f(t) \Leftrightarrow p \mid m_f(t)$$

*Dimostrazione.* '$\Leftarrow$' Ovvio.

'$\Rightarrow$' Possiamo ipotizzare, wlog, che $p$ sia monico. Sappiamo che, su $\mathbb{R}[t]$, gli irriducibili sono:

a) $p = t - \lambda$. b) $p = (t-z)(t-\overline{z})$ con $z \in \mathbb{C}$.

Vediamo la situazione nei due casi:

a) $p = t - \lambda \Rightarrow \lambda \in Sp(f) \Rightarrow (t-\lambda) \mid m_f$.
b) Sia $B$ base di $V$, $A = \mathfrak{M}_B(f) \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$. Possiamo quindi considerare $A$ sia come matrice a coefficienti complessi sia come matrice a coefficienti reali. Sappiamo sicuramente che $m_{A,\mathbb{C}} \mid m_{A,\mathbb{R}}$. Vediamo che vale anche la divisione opposta, abbiamo infatti due autovalori per $m_{A,\mathbb{C}}$: $z$ e $\overline{z}$. Quindi $(t-z)(t-\overline{z}) \mid m_{A,\mathbb{C}} \mid m_{A,\mathbb{R}}$. Tesi.

**Proposizione 10.** *Sia $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(n,\mathbb{C})$. Allora vale:*

$$m_{A,\mathbb{C}} = m_{A,\mathbb{R}}$$

**Dimostrazione.** Scriviamo $m_{A,\mathbb{C}} = p(t) + \iota q(t)$ con $p, q \in \mathbb{R}[t]$. Ragionando sui gradi e sul fatto che $m_{A,\mathbb{C}}$ è monico possiamo dire:

- $p$ è monico e $deg\ p = deg\ m_{A,\mathbb{R}}$.
- $deg\ q < deg\ m_{A,\mathbb{R}}$, infatti $m_{A,\mathbb{C}}$ è monico.

Allora $m_{A,\mathbb{C}}(A) = 0 = p(A) + \iota q(A)$ con $p(A), q(A) \in \mathcal{M}(n,\mathbb{R})$. Quindi $p(A) = q(A) = 0$. Ma non è possibile che $q$ sia diverso dal polinomio nullo: infatti appartiene all'ideale di $A$ ma ha grado strettamente minore di un suo generatore, quindi è il polinomio nullo.
Quindi $m_{A,\mathbb{C}} = p \in \mathbb{R}[t]$ e quindi, visto che si annulla in $A$, è il polinomio minimo della matrice considerata in $\mathbb{R}$.

*Osservazione* 16. Proviamo a generalizzare quanto appena visto.
Sia $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{F}$ un'estensione di campi e $A \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}(n,\mathbb{F})$. Allora:

$$m_{A,\mathbb{K}} = m_{A,\mathbb{F}}$$

*Dimostrazione.* Abbiamo infatti che $m_{A,\mathbb{K}}(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + t^k \Leftrightarrow I, A, \ldots, A^{k-1}$ sono linearmente indipendenti e $A^k = -(a_0 I + a_1 A + \ldots + a_{k-1}A^{k-1})$. Questa scrittura inoltre è unica.
Chiamiamo $S_d$ il sistema lineare $x_0 I + x_1 A + \ldots + x_d A^d = A^{d+1}$, questo sistema ha $n^2$ equazioni e $d$ incognite. Quanto appena detto equivale a dire che $\forall d_1^{k-2}$, $S_d$ non ha soluzioni e $S_{d-1}$ ha una soluzione. Ma la presenza di soluzioni dipende dal rango, che è indipendente dal campo in cui stiamo lavorando. Quindi, anche in $\mathbb{F}$, abbiamo che $A^k$ si scrive in modo unico come combinazione lineare delle potenze di $A$ da 0 a $k-1$. Ma abbiamo già una scrittura di $A^k$ e, visto che è unica, sarà proprio quella trovata.

**Esercizio 10.** Sia $A \in \mathcal{M}(6,\mathbb{R})$. $p_{A,\mathbb{R}}(t) = (t^2+1)^2(t^2-2t+5)$, $p_{A,\mathbb{C}} = (t-\iota)^2(t+\iota)^2(t-(1+2\iota))(t+(1+2\iota))$. I polinomi possibili quindi sono:

- $m_A(t) = p_A(t)$.
- $(t^2+1)(t^2-2t+5)$.

# Lezione 28

## Teoria

Da ora in poi, se non specificato altrimenti, il campo $\mathbb{K}$ avrà caratteristica diversa da 2.

**Definizione 10** (Forma bilineare)**.** Sia $V$ un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale. $V \times V \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}$ è detta applicazione (o forma) bilineare se:

1) $\forall x, y, z \in V,\ \phi(x + y, z) = \phi(x, z) + \phi(y, z)$.

2) $\forall x, y, z \in V,\ \phi(x, y + z) = \phi(x, y) + \phi(x, z)$.

3) $\forall x, y \in V, \forall \alpha \in \mathbb{K},\ \phi(\alpha x, y) = \alpha\phi(x, y) = \phi(x, \alpha y)$.

In generale $V \times \ldots \times V \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}$ si dice multilineare se è lineare per ciascuna variabile.

**Esercizio 11.** Mostrare che le seguenti applicazioni sono bilineari:

a) $\phi = 0$.

b) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$ tale che $\phi(x, y) = {}^\tau xy$.
Questa applicazione è un caso particolare di una famiglia più ampia di applicazioni che andremo a studiare, infatti questa può essere vista come ${}^\tau xIy$, più in generale avremo:

c) Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$ tale che $\phi(x, y) = {}^\tau xAy$.
Questo tipo di applicazioni bilineari sono molto importanti: vedremo che tutte le applicazioni bilineari possono essere indotte in questo modo da una matrice.

d) $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \times \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}$ con la legge $\phi(A, B) = tr\,({}^\tau AB)$.

e) $\mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \times \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}$ con la legge $\phi(A, B) = tr\,(AB)$.

f) Siano $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{K}$. Verificare che la seguente applicazione è bilineare:
$\mathbb{K}_n[x] \times \mathbb{K}_n[x] \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}$ con la legge: $\phi\,(p(x), q(x)) = \sum_{1}^{r} p(a_i)q(a_i)$.

g) $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$ con la legge $\phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$.

**Dimostrazione.** Non è necessario dimostrare ogni volta le tre proprietà della definizione: possiamo anche solo fissare una delle due variabili e dimostrare la linearità della funzione che ne risulta.

a) Bilineare poiché $0 + 0 = 0 \cdot 0 = 0$.

b) Abbiamo che $\phi(x, y) = \sum_{1}^{n} x_i y_i$. Tesi per le proprietà della sommatoria.

c) Vero per la proprietà distributiva del prodotto tra matrici (Lezione 5).

d) Fissiamo $B$. La trasposizione è un'applicazione lineare, come il prodotto tra matrici, come la traccia, la composizione di applicazioni lineari è ancora lineare. La stessa cosa vale fissando $A$.

e) Fissiamo $B$. Il prodotto tra matrici, come la traccia, sono applicazioni lineari, quindi anche la loro composizione.

f) Fissando $q$ avremo: $\phi(p+s, q) = \sum_{1}^{r}(p(a_i)+s(a_i))q(a_i) = \sum_{1}^{r} p(a_i)q(a_i)+ q(a_i)s(a_i) = \phi(s, q) + \phi(p, q)$. Ugualmente per fissando $p$ o con il prodotto per scalari.

g) Caso particolare del punto precedente.

**Definizione 11** (Prodotto scalare)**.** Sia $\phi$ una forma bilineare su $V$. $\phi$ si dice prodotto scalare se è simmetrica: se $\forall v, w \in V,\ \phi(v, w) = \phi(w, v)$.

**Definizione 12** (Prodotto scalare standard)**.** L'applicazione $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$ tale che $< x, y >= \phi(x, y) = {}^{\tau}xy$ è detta prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$.

**Definizione 13** (Ortogonale)**.** Sia $\phi$ un prodotto scalare su $V$. Due vettori $v, w \in V$ si dicono ortogonali rispetto a $\phi$ se $\phi(v, w) = 0$.

**Esercizio 12.** Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$ con la legge $\phi(x, y) = {}^{\tau}xAy$. Dimostrare che $\phi$ è prodotto scalare se e solo se $A = {}^{\tau}A$.

**Dimostrazione.** Consideriamo che ${}^{\tau}xAy \in \mathbb{K}$, quindi ${}^{\tau}({}^{\tau}xAy) = {}^{\tau}xAy$. Possiamo quindi scrivere:

$$\begin{aligned} {}^{\tau}xAy &= {}^{\tau}({}^{\tau}xAy) = {}^{\tau}(Ay)\,{}^{\tau}({}^{\tau}x) \\ &= {}^{\tau}y\,{}^{\tau}Ax \end{aligned}$$

**Definizione 14** (Forma quadratica indotta)**.** Sia $V \times V \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}$ una forma bilineare. Si dice forma quadratica indotta da $\phi$ l'applicazione $V \xrightarrow{q_\phi} \mathbb{K}$ con la legge:

$$\forall v \in V,\ q_\phi(v) = \phi(v, v)$$

**Esercizio 13.** Consideriamo la forma bilineare $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}$ con la legge $\phi(x, y) = {}^{\tau}xy$, questa forma induce la forma quadratica: $q_\phi(X) = {}^{\tau}XX = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$. Questa viene detta forma quadratica standard.

**Definizione 15** (Forma quadratica)**.** Un'applicazione $V \xrightarrow{q} \mathbb{K}$ si dice forma quadratica se esiste $V \times V \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}$ forma bilineare che la induce.

*Osservazione* 17. Sia $V \xrightarrow{q} \mathbb{K}$ una forma quadratica, la forma bilineare che la induce potrebbe non essere unica. Vediamone un esempio. La forma quadratica nulla $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{q} \mathbb{R}$ che manda ogni vettore in zero. Questa è indotta da:

- $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$, applicazione bilineare nulla.
- $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{R}$ con la legge: $\phi\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1y_2 - x_2y_1$ (si verifica facilmente).

**Proposizione 11.** *Sia $V \xrightarrow{q} \mathbb{K}$ una forma quadratica. Allora $\exists! \phi$ prodotto scalare che induce $q$.*

**Dimostrazione.** Per ipotesi esiste una forma bilineare $\psi$ che induce $q$. Allora vediamo che funziona il prodotto scalare $\phi(u,v) = \frac{\psi(u,v)+\psi(v,u)}{2}$, cioè è un prodotto scalare (in quanto bilineare e chiaramente simmetrico) e inoltre si vede immediatamente che induce anch'esso $q$.
Dimostriamo ora che un prodotto scalare è univocamente determinato dalla forma quadratica che induce. Infatti, chiamando $\xi$ un prodotto scalare che induce $q$ abbiamo:

$$\begin{aligned} q(u+v) - q(v) - q(u) &= \xi(u+v, u+v) - \xi(u,u) - \xi(v,v) \\ &= \xi(u,u) + \xi(v,v) + \xi(u,v) + \xi(v,u) - \xi(u,u) - \xi(v,v) \\ &= \xi(u,v) + \xi(v,u) = 2\xi(u,v) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo quella che viene detta formula di polarizzazione:

$$\xi(u,v) = \frac{q(u+v) - q(v) - q(u)}{2}$$

**Definizione 16** (Operazioni sulle forme bilineari)**.** Siano $\phi, \psi$ forme lineari su $V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

- $\forall v, w \in V,\ (\psi + \phi)(v,w) \overset{def}{=} \phi(v,w) + \psi(v,w)$.
- $\forall v, w \in V,\ (\alpha\phi)(v,w) \overset{def}{=} \alpha\phi(v,w)$.

**Esercizio 14.** Dimostrare che i seguenti insiemi sono spazi (o sottospazi) vettoriali;

a) $Bil(V) = \left\{ V \times V \xrightarrow{q} \mathbb{K} \,\middle|\, \phi \text{ } bilineare \right\}$.

b) $PS(V) = \{\text{Prodotti scalari}\}$.

c) $Q(V) = \{\text{Forme quadratiche}\}$.

**Dimostrazione.** Vediamo innanzitutto che 0 appartiene a tutti gli insiemi considerati. Abbiamo inoltre dimostrato precedentemente che $V \times V$ è uno spazio vettoriale, quindi le forme bilineari sono, fissata una variabile, applicazioni lineari indotte da una matrice. Quindi verifichiamo che, fissando una variabile, gli insiemi sono sottospazi vettoriali delle applicazioni lineari.

a) Quello in pratica che dobbiamo mostrare è che, date due applicazioni lineari su una variabile, la loro somma è sempre un'applicazione lineare su una variabile. Questo chiaramente è vero. Quindi prendendo due forme bilineari possiamo fissarne una variabile, a questo punto abbiamo un'applicazione lineare sulla prima variabile, quindi, per quanto riguarda la prima variabile, l'applicazione somma si rivela essere lineare. Fissiamo poi la seconda variabile e facciamo la stessa cosa. Alla fine possiamo dire che l'applicazione somma è lineare sia sulla prima che sulla seconda variabile, quindi è bilineare per definizione.
Stessa cosa per il prodotto.

b) - $(\phi+\psi)(u,v) = \phi(u,v) + \psi(u,v) = \phi(v,u) + \psi(v,u) = (\phi+\psi)(v,u)$.
   - $(\alpha\phi)(v,w) = \alpha(\phi(v,w)) = \alpha(\phi(w,v)) = (\alpha\phi)(w,v)$.

c) Dimostrato nell'esercizio successivo.

**Esercizio 15.** Verificare che l'applicazione $PS(V) \xrightarrow{f} Q(V)$ che associa ad ogni prodotto scalare la forma quadratica che esso induce, è un isomorfismo.

**Dimostrazione.** Abbiamo dimostrato nella Proposizione 11 che $f$ è una bigezione, quindi ci basta dimostrare la linearità. Siano $\phi, \psi$ due prodotti scalari definiti su $V$.

- $\forall v \in V,\ f(\phi+\psi)(v) = \phi(v,v) + \psi(v,v) = (f(\phi) + f(\psi))(v)$.
- $\forall v \in V, \alpha \in \mathbb{K},\ f(\alpha\phi)(v) = \alpha\phi(v,v) = (\alpha f(\phi))(v)$.

**Definizione 17** (Isometria)**.** Siano $V, W$ dei $\mathbb{K}$ spazi vettoriali, sia definito su $V$ un prodotto scalare $\phi$ e su $W$ un prodotto scalare $\psi$. Allora $V \xrightarrow{f} W$ si dice isometria se:

- $f$ è isomorfismo di spazi vettoriali.
- $\forall x, y \in V,\ \phi(x,y) = \psi(f(x), f(y))$.

**Definizione 18.** Gli spazi vettoriali $(V,\phi)$ e $(W,\psi)$ si dicono isometrici se esiste un'isometria tra di essi.

*Osservazione* 18. L'isometria è una relazione di equivalenza.

*Osservazione* 19. Affinché sia possibile che due spazi vettoriali $(V,\phi)$ e $(W,\psi)$ siano isometrici è necessario che $V, W$ siano innanzitutto isomorfi. Sia quindi $V \xrightarrow{g} (W,\psi)$ un isomorfismo. Consideriamo ora l'applicazione $V \times V \xrightarrow{g^*\psi} \mathbb{K}$ con la legge $g^*\psi(x,y) = \psi(g(x), g(y))$; questa è un prodotto scalare su $V$, inoltre $(V, g^*\psi)$ e $(W,\psi)$ sono isometrici (tramite $g$).
Una immediata conseguenza di quanto appena detto è che $(V,\phi)$ e $(W,\psi)$ sono isometrici $\Leftrightarrow$ $(V,\phi)$ e $(V, g^*\psi)$ sono isometrici. Quindi in pratica possiamo sempre ricondurre il problema del determinare l'isometria tra due spazi esaminando unicamente il prodotto scalare che è definito su di essi.

# Esercitazione

*Riflessione* 10. Riprendiamo quanto detto sulla forma di Jordan reale.
Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \subset \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$, sappiamo che, in $\mathbb{C}$, $A$ ha almeno un autovalore, chiamiamolo $\lambda$(ipotizziamo $\lambda \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$); A questo punto sappiamo: $\lambda \in Sp(A)$, $p_A(\lambda) = 0$, ma sappiamo anche che $\mu_a(\lambda) = \mu_a(\overline{\lambda})$. Quindi $p_A(t)$ sarà nella forma:

$$p_A(t) = \overbrace{(\xi_1 - t)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (\xi_r - t)^{k_r}}^{\xi_i \in \mathbb{R}} \overbrace{((z_1 - t)(\overline{z_1} - t))^{h_1} \cdot \ldots \cdot ((z_s - t)(\overline{z_s} - t))^{h_s}}^{z_i \in \mathbb{C} - \mathbb{R}}$$

Il polinomio minimo avrà gli stessi coefficienti, anche se con molteplicità algebriche diverse.
Abbiamo anche visto che $\overline{Ker(A - \lambda I)^k} = Ker(A - \overline{\lambda} I)^k$, inoltre sappiamo che il coniugio è isomorfismo, quindi i due oggetti hanno la stessa dimensione.
Riassumendo possiamo dire:

- I numeri e le taglie dei blocchi di Jordan sono uguali per $\lambda$ e $\overline{\lambda}$.

- Se $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^n$ danno un blocco di Jordan per $\lambda$, allora $\overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}$ danno un vlocco di Jordan per $\overline{\lambda}$.

- Per ogni vettore $v_i$ consideriamo i vettori:

  $\mathfrak{Re}\ v_i = \frac{v_i + \overline{v_i}}{2}$ $\qquad$ $\mathfrak{Im}\ v_i = \frac{v_i - \overline{v_i}}{2\iota}$

  Entrambi questi vettori appartengono a $\mathbb{R}^n$.

- Dicendo $B = \{v_1, \ldots, v_k, \overline{v_1}, \ldots, \overline{v_k}\}$, $S = \{\mathfrak{Re}\ v_1, \mathfrak{Im}\ v_1, \ldots, \mathfrak{Re}\ v_k, \mathfrak{Im}\ v_k\}$, avremo le seguenti basi associate:

$$\mathfrak{M}_B(A) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} \overline{\lambda} & 1 & \\ & \ddots & 1 \\ & & \overline{\lambda} \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$\mathfrak{M}_S(A) = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} \mathfrak{Re}\ \lambda & \mathfrak{Im}\ \lambda \\ -\mathfrak{Im}\ \lambda & \mathfrak{Re}\ \lambda \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix} \\ & & & \begin{smallmatrix} \mathfrak{Re}\ \lambda & \mathfrak{Im}\ \lambda \\ -\mathfrak{Im}\ \lambda & \mathfrak{Re}\ \lambda \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

**Esempio 6.** Vediamo di trovare una base di Jordan reale per la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Per prima cosa cerchiamo il polinomio caratteristico, che verrà: $p_A(t) = (t^2 + 1)^2(t^2 - 2t + 5) = (t + \iota)^2(t - \iota)^2(t - (1 + 2\iota))(t - (1 - 2\iota))$. Abbiamo quindi che $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \varnothing$, $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\iota, -\iota, 1 + 2\iota, 1 - 2\iota\}$. Abbiamo visto che possiamo studiare solo gli autovalori $\iota$ e $1 + 2\iota$.
Comunque possiamo già sapere quali sono le possibili forme di $J(A)$: a questo punto dipendono unicamente dal polinomio minimo che potrebbe essere:

- Uguale al polinomio caratteristico.
- $(t^2 + 1)(t^2 - 2t + 5)$.

Nel secondo caso avremmo una matrice di Jordan complessa diagonale, nella cui diagonale vi sarebbero le varie radici del polinomio caratteristico. Se invece il polinomio minimo fosse uguale al polinomio caratteristico avremmo una matrice di Jordan complessa con due blocchi di ordine due, uno relativo a $-\iota$, una a $\iota$. Ricordandoci la fine della Riflessione appena conclusa possiamo anche dedurre la forma di Jordan reale corrispondente a questi due casi.
Per vedere in che caso ci troviamo dobbiamo trovare $\mu_g(\iota)$, per farlo troviamo $W = Ker(A - \iota I)$:

$$W = Ker \begin{pmatrix} 3-\iota & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1-\iota & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\iota & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & -\iota & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & -2-\iota & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\iota \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 = R_4 - \iota R_3]{R_4 = R_4 + R_5} \begin{pmatrix} 3-\iota & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1-\iota & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\iota & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & -2-\iota & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\iota \end{pmatrix}$$

Questo ci dice che $e_6 \subseteq Ker(A - \iota I)$, inoltre ci permette di annullare l'ultima colonna. Avremo quindi, con banali operazioni:

$$W = Ker \begin{pmatrix} 3-\iota & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1-\iota & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\iota & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 & 0 & -2-\iota & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^6 \;\middle|\; \left\{ \begin{smallmatrix} x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0 \\ x_4 = \iota x_3 \end{smallmatrix} \right. \right\}$$

Quindi $\mu_g(\iota) = 1$ e la matrice in $\mathbb{C}$ è diagonalizzabile, sappiamo inoltre che $Ker(A - \iota I) = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\\iota\\0\\0 \end{pmatrix}\right\}\right)$. Cerchiamo adesso una base di Jordan complessa (solo per l'autospazio generalizzato relativo a $\iota$, per $-\iota$ prenderemo poi i coniugati), cercando $W' = Ker(A - \iota I)^2$.

$$W' = Ker\begin{pmatrix} -6\iota & 4-4\iota & 0 & 0 & 4-4\iota & 0 \\ -6+2\iota & -4-2\iota & 0 & 0 & -2-2\iota & 2\iota \\ 0 & 0 & -2 & -2\iota & -2\iota & 2 \\ -6\iota & 4-4\iota & 2\iota & -2 & 2-4\iota & -2\iota \\ -2+6\iota & -4+4\iota & 0 & 0 & -6+4\iota & -2\iota \\ 2\iota & 0 & 0 & 0 & 2\iota & -2 \end{pmatrix}$$

Con un po di conti e operazioni di Gauss troviamo che $v_2 = \begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\0\\1\\\iota \end{pmatrix} \in W' \wedge v_2 \notin W$. Scegliamo quindi come primo vettore della base $v_1 = (A - \iota I)(v_2) = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\\iota\\0\\0 \end{pmatrix}$.

A questo punto scegliamo: $v_3 = \overline{v_1}$ e $v_4 = \overline{v_2}$. Questi sono i vettori della base dell'autospazio (generalizzato) relativo a $\iota$ e $-\iota$. Dobbiamo fare le stesse operazioni per trovare l'autospazio relativo a $1 + 2\iota$. Troviamo che:

$$V_{1+2\iota} = Span\left(\{v_5\}\right) = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1\\\iota\\0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

$$V_{1-2\iota} = Span\left(\{v_6\}\right) = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1\\-\iota\\0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

La base così trovata è una base di Jordan complessa per $A$, rispetto alla quale la matrice $A$ diventa una matrice diagonale. Ma vogliamo trovare la base per la matrice di Jordan reale associata.
Avremo quindi:

$$\begin{aligned} S &= \{\mathfrak{Re}\ v_1, \mathfrak{Im}\ v_1, \mathfrak{Re}\ v_2, \mathfrak{Im}\ v_2, \mathfrak{Re}\ v_5, \mathfrak{Im}\ v_5\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\-1\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\-1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}\right\} \end{aligned}$$

base di Jordan reale.

**Esercizio 16.** Sia $M \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ una matrice non diagonalizzabile, trovare la forma canonica di Jordan reale di:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} M & M \\ \hline 0 & M \end{array}\right)$$

# Lezione 29

## Teoria

Abbiamo parlato la scorsa lezione di isometria, e abbiamo visto che per capire se due spazi vettoriali dotati di prodotti scalati sono isometrici è possibile ricondursi ad esaminare l'isometria dello stesso spazio vettoriale considerato con due prodotti scalari differenti.

**Esempio 7.** Consideriamo $\mathbb{R}^2$, le rotazioni che hanno centro nell'origine sono isometrie lineari con il prodotto scalare ordinario.

**Esercizio 17.** Verificare che:

- $p$ è isometria.

- $p^2 = id$.

- $Fix(p) = H$

Quindi in pratica vediamo che $H$ sarebbe l'autospazio relativo ad 1. Quindi $p$ ha un autospazio di dimensione $n-1$ e un vettore relativo a $-1$, quindi questa applicazione è diagonalizzabile (come tutte le involuzioni).

**Definizione 19** (Gruppo ortogonale)**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale e $\phi \in PS(V)$. Consideriamo $O(V,\phi) = \left\{(V,\phi) \xrightarrow{f} (V,\phi) \in GL(V) \mid f \text{ isometria}\right\}$. Cioè $f \in O(V,\phi) \Leftrightarrow \forall x,y \in V \phi(x,y) = \phi(f(x),f(y))$.
$(O(V,\phi),\circ)$ è un gruppo, detto gruppo ortogonale di $(V,\phi)$.

**Dimostrazione.** (dimostrare che è un gruppo).

*Osservazione* 20. Gli elementi di questo gruppo sono isomorfismi che conservano il prodotto scalare, se quindi due vettori sono ortogonali rispetto a $\phi$ lo sono anche le loro immagini rispetto a $f$: vettori ortogonali vengono mandati in vettori ortogonali. Cerchiamo adesso di associare delle matrici ai vari prodotti scalari, come avevamo fatto per gli endomorfismi in generale, avevamo infatti visto che ogni endomorfismo (scelta una base) è indotto da una matrice, vediamo se è possibile, attraverso una scelta delle basi, fare la stessa cosa per i prodotti scalari.

## Passaggio in coordinate

**Definizione 20** (Matrice associata, bilineari)**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$ e $\phi \in Bil(V)$. Si dice matrice associata a $\phi$ rispetto alla base $B$ la matrice: $\mathfrak{M}_B(\phi) \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ definita da:

$$[\mathfrak{M}_B(\phi)]_{ij} = \phi(v_i, v_j)$$

Vediamo come questa matrice è legata al prodotto scalare $\phi$, cosa ci dice su di esso e se serve a qualcosa.

**Proposizione 12.** *Date le condizioni della definizione, sia $A = \mathfrak{M}_B(\phi)$. Allora $\forall v, w \in V$, $\phi(v, w) = {}^{\tau}[v]_B A [w]_B$.*

**Dimostrazione.** Siano $X = [v]_B$, $Y = [w]_B$.

$$\phi(v, w) = \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \sum_{i=j}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \phi(v_i, v_j) = {}^{\tau}XAY$$

**Proposizione 13.** *Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione $n$ e $B$ base di $V$. L'applicazione $Bil(V) \xrightarrow{\mathfrak{M}_B} \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, che associa ad ogni applicazione bilineare $\phi$ la matrice $\mathfrak{M}_B(\phi)$, è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

**Dimostrazione.** Verifichiamo innanzitutto la linearità:

$$\begin{aligned}[\mathfrak{M}_B(\phi + \psi)]_{ij} &= (\phi + \psi)(v_i, v_j) = \phi(v_i, v_j) + \psi(v_i, v_j) \\ &= [\mathfrak{M}_B(\phi)]_{ij} + [\mathfrak{M}_B(\psi)]_{ij}\end{aligned}$$

Ugualmente si verifica il prodotto per scalari.
Vediamo ora l'iniettività: sappiamo che l'applicazione è lineare, quindi ci basta dimostrare che $Ker\ \mathfrak{M}_B = \{0\}$. Ma se la matrice associata all'applicazione $\phi$ è la matrice nulla, questo vuol dire che comunque si faccia il prodotto tra $v$ e $w$ dobbiamo moltiplicare le varie componenti per il coefficiente zero. Più semplicemente possiamo vedere che $\forall v, w \in V$, ${}^{\tau}v0w = 0$.
La surgettività funziona per costruzione: supponiamo di avere la matrice $A$, sappiamo a questo punto quanto fa, $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $\phi(v_i, v_j)$. Da questi possiamo estendere il prodotto a tutti gli altri vettori. Esattamente come avevamo fatto con le matrici per gli endomorfismi: avevamo una matrice che ci indicava il comportamento dell'applicazione su alcuni vettori e abbiamo poi esteso questo comportamento a tutti gli altri vettori. La stessa cosa possiamo fare qui, utilizziamo la formula della proposizione precedente per estendere la bilinearità a tutto lo spazio. Cioè data la matrice $A$ possiamo passo passo costruirci $\phi$, ci creiamo quindi una $\phi$ che, per costruzione, avrà come matrice associata proprio $A$, non sappiamo a priori quale sarà $\phi$, la costruiamo a partire da $A$ di modo tale che funzioni per quello che vogliamo fare. Data la matrice, $\forall v, w$ c'è una sola possibilità per $\phi(v, w)$. Abbiamo quindi solamente passaggi obbligati, e otteniamo quindi una forma bilineare, come volevamo.

**Corollario 9.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$. $dim\ Bil(V) = n^2$.*

*Osservazione* 21. Sia $\phi \in Bil(V)$, $B$ una base di $V$.
$\phi$ è prodotto scalare $\Leftrightarrow \mathfrak{M}_B(\phi)$ è simmetrica.

*Dimostrazione.* Equivalente all'Esercizio 12.

**Corollario 10.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$. L'applicazione $PS(V) \xrightarrow{\mathfrak{M}_B|_{PS(V)}} S_n$ è un isomorfismo (restrizione di un isomorfismo e delle sue immagini). Quindi dim $PS(V) = \frac{n(n+1)}{2} =$ dim $Q(V)$ (l'ultima uguaglianza è vera, abbiamo dimostrato infatti che $Q(V)$ e $PS(V)$ sono isomorfi).*

*Osservazione* 22. Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $B$ base di $V$, $\phi \in PS(V)$ e $A = \mathfrak{M}_B(\phi)$.
Consideriamo l'applicazione $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{\psi_A} \mathbb{K}$ tale che $\forall X, Y \in \mathbb{K}^n,\ \phi(X,Y) = {}^\tau XAY$. Fissare una base su $V$ vuol dire quindi (come abbiamo visto nel primo semestre) stabilire un isomorfismo tra $V$ e $\mathbb{K}^n$, che ad ogni vettore associa le sue coordinate. Consideriamo quindi l'isomorfismo di passaggio a coordinate:

$$(V, \phi) \xrightarrow{[\ ]_B} (\mathbb{K}^n, \psi_A)$$

Questo isomorfismo è anche, per costruzione, un' isometria: abbiamo infatti costruito $\psi_A$ affinché funzionasse come prodotto scalare isometrico a $\phi$. Quindi, trovata la matrice $A$, possiamo interessarci unicamente delle coordinate dei vari vettori, possiamo spostare i nostri problemi su matrici, solitamente più comode.

*Dimostrazione.*

$$\forall v, w \in V,\ \phi(v,w) = {}^\tau[v]_B A [w]_B = \psi_A([v]_B, [w]_B)$$

**Proposizione 14.** *Siano $V, W$ spazi vettoriali, $(V,\phi) \xrightarrow{f} (W,\psi)$ isomorfismo, $B, S$ basi rispettivamente di $V$ e $W$. Chiamiamo $M = \mathfrak{M}_B(\phi)$, $N = \mathfrak{M}_S(\psi)$, $A = \mathfrak{M}_{B,S}(f)$. Abbiamo allora che:*

$$f \text{ è isometria} \Leftrightarrow M = {}^\tau ANA$$

**Dimostrazione.** $\forall v, w$ diciamo $X = [v]_B$, $Y = [w]_B$. Abbiamo visto che $\phi(v,w) = {}^\tau XMY$, vogliamo vedere in quali casi questo è uguale a $\psi(f(v), f(w))$.

$$\psi(f(v), f(w)) = {}^\tau[f(v)]_S N [f(w)]_S = {}^\tau(AX)NAY = {}^\tau X\,{}^\tau ANAY$$

Abbiamo che $\forall X, Y \in \mathbb{K}^n,\ {}^\tau X\,{}^\tau ANAY = {}^\tau XMY \Leftrightarrow {}^\tau ANA = M$. Infatti visto che questo deve valere $\forall X, Y \in \mathbb{K}^n$ possiamo scegliere in particolare i vari $e_i, e_j$, abbiamo che $[e_i]_B M [e_j]_= [B]_{ij}$, quindi dobbiamo avere l'uguaglianza elemento a elemento delle due matrici, in pratica utilizziamo il fatto che l'uguaglianza deve valere per tutti i vettori per vedere che le due matrici devono coincidere.

**Corollario 11.** $(V,\phi) \xrightarrow{f} (V,\phi)$ *è isometria di* $(V,\phi) \Leftrightarrow {}^\tau AMA = M$.

## Cambiamenti di base

*Riflessione* 11. Sia $V$ uno spazio vettoriale, $\phi \in Bil(V)$, $B, B'$ basi di $V$, $A = \mathfrak{M}_B(\phi)$, $A' = \mathfrak{M}_{B'}(\phi)$. Che relazioni possiamo trovare tra $A$ e $A'$? Sia $M$ la matrice di cambiamento di base da $B'$ a $B$, abbiamo quindi: $\forall v \in V,\ [v]_B = M[v]_{B'}$. Allora:

$$\phi(u,v) = {}^\tau[u]_B A [v]_B = {}^\tau[u]_{B'}\,{}^\tau MAM\,[v]_{B'}$$

Ma anche:

$$\phi(u,v) = {}^\tau[u]_{B'} A' [v]_B$$

Abbiamo quindi che, $\forall u, v \in V$, ${}^\tau[u]_{B'} A' [v]_{B'} = {}^\tau[u]_{B'} {}^\tau MAM [v]_{B'}$. Per lo stesso ragionamento della dimostrazione dell'ultima proposizione (visto che questa uguaglianza vale per ogni vettore in particolare vale per quelli della base) possiamo dire che:

$$A' = {}^\tau MAM$$

**Esercizio 18.** Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica.
Allora $\forall M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, ${}^\tau MAM \in \mathcal{S}_n$.

**Dimostrazione.**

$${}^\tau({}^\tau MAM) = {}^\tau M\, {}^\tau A\, {}^{\tau\tau} M = {}^\tau MAM$$

**Definizione 21** (Congruenza)**.** Siano $A, B \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. $A, B$ si dicono congruenti se $\exists M \in GL(n, \mathbb{K})$ $t.c.$ $B = {}^\tau MAM$.

**Esercizio 19.** La congruenza è una relazione di equivalenza.

**Dimostrazione.** - Riflessività: $\forall A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $A = {}^\tau IAI$.

- Simmetria: $B = {}^\tau MAM \Rightarrow A = {}^\tau M^{-1} B M^{-1}$.

- Transitività: $A = {}^\tau MBM$, $B = {}^\tau NCN \Rightarrow A = {}^\tau NMCNM$.

*Osservazione* 23. Certamente il rango è un invariante di congruenza. Abbiamo quindi visto che possiamo prendere un prodotto scalare su $V$ e, attraverso una base $B$ di $V$, associare ad esso una matrice. Cambiando la base troviamo matrici associate che sono congrue tra di loro; abbiamo visto che il rango è un invariante per congruenza. Quindi è ben definita la seguente definizione:

**Definizione 22** (Rango (forme bilineari))**.** Sia $\phi \in Bil(V)$ e $B$ una base di $V$. Si definisce rango di $\phi$, $rnk(\phi) = rnk\left(\mathfrak{M}_B(\phi)\right)$.

*Riflessione* 12. Siano $\phi, \psi \in PS(V)$. Abbiamo detto che una matrice invertibile poteva essere interpretata come isomorfismo o come matrice di cambiamento di base. Arrivammo a dare la definizione di due applicazioni lineari coniugate: applicazioni che possono essere rappresentate dalla stessa matrice associata, a meno di cambiamenti di base. Possiamo fare qui un ragionamento simile.

**Proposizione 15.** *Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\phi, \psi \in PS(V)$ e $B, B'$ basi di $V$. Sono fatti equivalenti:*

1. *$(V, \phi)$ e $(V, \psi)$ sono isometrici.*

2. *$\forall B$ base di $V$, $\mathfrak{M}_B(\phi)$ e $\mathfrak{M}_B(\psi)$ sono congruenti.*

3. *$\exists B, B'$ basi di $V$ tali che $\mathfrak{M}_B(\phi) = \mathfrak{M}_{B'}(\psi)$.*

**Dimostrazione.** Analoga a quella fatta per gli endomorfismi.

*Osservazione* 24. Quindi in particolare gli invarianti rispetto all'isometria in $PS(V)$ corrispondono agli invarianti di congruenza in $\mathcal{S}_n$. Quindi quando due matrici sono congruenti? La risposta passa, come al solito, dalla ricerca di invarianti. Possiamo vedere se il determinante è un invariante, ma ci accorgiamo che così non è, abbiamo infatti:

$$B = {}^{\tau}MAM \Rightarrow det(B) = det(A) \cdot (det(M))^2$$

Ma visto che $(det(M))^2 > 0$ almeno il segno del determinante si conserva (se le matrici sono a coefficienti reali), per quanto possa sembrare poco.

**Definizione 23** (Radicale)**.** Sia $\phi \in PS(V)$.

$$Rad(\phi) = \{v \in V \,|\, \forall w \in V,\ \phi(v,w) = 0\}$$

$Rad(\phi)$ viene detto radicale di $\phi$.

**Proposizione 16.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e $\phi \in PS(V)$. $Rad(\phi)$ è sottospazio vettoriale di $V$ e $dim\ Rad(\phi) = dim\ V - rnk(\phi)$.*

**Dimostrazione.** Sia $B$ una base di $V$ e $A = \mathfrak{M}_B(\phi)$.

$$\begin{aligned} v \in Rad(\phi) &\Leftrightarrow \forall w \in V,\ \phi(v,w) = 0 \Leftrightarrow \forall Y \in \mathbb{K}^n,\ {}^{\tau}[v]_B AY = 0 \\ &\Leftrightarrow {}^{\tau}[v]_B A = 0 \Leftrightarrow A\,[v]_B = 0 \end{aligned}$$

Quindi tramite $[\ ]_B$ l'immagine di $Rad(\phi)$ è $Ker\ A$. Quindi $dim\ Rad(\phi) = dim\ Ker\ A = n - rnk(A) = n - rnk(\phi)$.

*Osservazione* 25. Abbiamo inoltre (data una base $B$) un metodo per calcolare il radicale: $[Rad(\phi)]_B = Ker\ \mathfrak{M}_B(\phi)$

**Definizione 24** (Prodotto scalare degenere)**.** Sia $\phi \in PS(V)$. Diciamo che $\phi$ è degenere se $Rad(\phi) \neq \{0\}$.
$\phi$ si dice non degenere se $Rad(\phi) = \{0\}$, quindi se $\forall w \in V,\ \phi(v,w) = 0 \Rightarrow v = 0$.

**Corollario 12.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$. $\phi \in PS(V)$ è non degenere $\Leftrightarrow dim\ rnk(\phi) = n \Leftrightarrow \forall B$ base di $V$, $det\,(\mathfrak{M}_B(\phi)) \neq 0$.*

**Esempio 8.** Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $B$ la base canonica. Si dice spazio di Minkowski $(V, \psi_A)$, in cui $A = \mathfrak{M}_B(\psi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Possiamo vedere dal rango di $A$ che $\psi_A$ è non degenere, inoltre i vari $e_i$ sono ortogonali a tutti i vettori della base, tranne se stessi.

**Notazione.** Sia $\phi \in PS(V)$ e $W$ ssv. di $V$. Si scrive $\psi\,|_W$ la restrizione di $\psi$ a $W \times W$.

**Esempio 9.** Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ prodotto scalare su $\mathbb{K}^2$; questo prodotto scalare è non degenere, ma se osserviamo $\mathfrak{M}_{\{e_1\}}\left(\psi_A\,|_{Span(\{e_1\})}\right) = (\,0\,)$. Quindi la restrizione di un prodotto scalare non degenere può essere degenere (anche 'molto' degenere: nulla).

**Proposizione 17.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$, $\phi \in PS(V)$ e $p = dim\ Rad(\phi)$.*

*a) Sia $U$ t.c. $V = U \oplus Rad(\phi)$, allora $\phi\,|_U$ è non degenere.*

*b) Siano $U_1, U_2$ t.c. $V = U_1 \oplus Rad(\phi) = U_2 \oplus Rad(\phi)$. Abbiamo allora che $U_1$ e $U_2$ sono canonicamente isometrici.*

**Dimostrazione.** a) Sia $B_1 = \{v_1, \ldots, v_p\}$ una base di $Rad(\phi)$ e $B_2 = \{v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ una base di $U$. Allora avremo che $B = B_1 \cup B_2$. Allora avremo:

$$A = \mathfrak{M}_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A' \end{array}\right)$$

con $A' = \mathfrak{M}_{B_2}((\phi|_V))$. Avremo anche $rnk(A) = rnk(A')$ visto che da $A$ sono state tolte solo righe nulle. Ma sappiamo che $rnk(A) = n - p \Rightarrow rnk(A') = n - p$; ma $A'$ ha esattamente $n - p$ righe e colonne, quindi è invertibile, quindi il prodotto scalare che rappresenta (restrizione di quello originale) non è degenere.

b) $\forall u \in U_1,\ \exists! z_u \in Rad(\phi),\ u' \in U_2$ *t.c.* $u = z_u + u'$. Consideriamo l'applicazione $U_1 \xrightarrow{L} U_2$ con la legge $\forall u \in U_1,\ L(u) = u'$ (in pratica una proiezione su $U_2$ con il dominio ristretto a $U_1$). Dobbiamo dimostrare che $L$ è isometria.

- La proiezione è lineare.
- Visto che $dim\ U_1 = dim\ U_2$, ci basta dimostrare l'iniettività. Sia $u \in Ker(L) \Rightarrow u = z_u + 0$, con $z_u \in Rad(\phi) \Rightarrow u \in Rad(\phi) \cap U_1$, ma sappiamo che $Rad(\phi) \cap U_1 = \{0\}$.
- $\forall u = z_u + u', w = z_w + w',\ \phi(u, w) = \phi(z_u, z_w) + \phi(z_u, w') + \phi(u', z_w) + \phi(u', w') = \phi(u', w')$. Dove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che $z_w, z_u \in Rad(\phi)$.

**Definizione 25** (Ortogonale)**.** Sia $\phi \in PS(V)$ e $S$ un sottoinsieme di $V$. Si definisce ortogonale di $S$:

$$S^\perp = \{v \in V \mid \forall s \in S,\ \phi(v, s) = 0\}$$

Siano $U, W$ sottospazi vettoriali di $V$, si dice che $U$ è ortogonale a $W$ ($U \perp W$) se e solo se $U \subseteq W^\perp$ (e quindi anche $W \subseteq U^\perp$).

**Esercizio 20.** Dimostrare che:

a) $\forall S \subseteq V,\ S^\perp$ è ssv. di $V$.

b) $S \subseteq T \Rightarrow T^\perp \subseteq S^\perp$.

c) $S^\perp = (Span(S))^\perp$.

d) $S \subseteq S^{\perp\perp}$.

*Osservazione* 26. - Se $W$ è sottospazio vettoriale di $V$, allora $W \cap W^\perp = Rad(\phi|_W)$.

- Consideriamo il caso in cui $V = \mathbb{R}^2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $W = Span(\{e_1\})$. Abbiamo che $W^\perp = \mathbb{R}^2$.

- Nel caso in cui $V = \mathbb{R}^2$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ e $W = Span(\{e_1\})$. In questo caso abbiamo invece $W^\perp = W$.

**Proposizione 18.** *Sia $\phi \in PS(V)$ e $W$ ssv. di $V$ tale che $W \cap Rad(\phi) = \{0\}$. Allora $dim\ W^\perp = dim\ V - dim\ W$.*

**Dimostrazione.** Sia $k = dim\ W$, $h = dim\ Rad(\phi)$. Possiamo scegliere $B$ base di $V$ di modo tale che i primi $k$ vettori appartengano a $W$ e gli ultimi $h$ appartengano a $Rad(\phi)$; abbiamo quindi

$$B = \{\overbrace{w_1, \dots, w_k}^{\in W}, w_{k+1}, \dots, w_{n-h}, \overbrace{w_{n-h+1}, \dots, w_n}^{\in Rad(\phi)}\}$$

Vediamo adesso la matrice associata a $\phi$ nella base $B$ (che, per ipotesi, ha rango $n-h$).

$$A = \mathfrak{M}_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|c|c} M_1 & M_2 & 0 \\ \hline {}^\tau M_2 & M_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Non è facile trovare, seguendo la definizione,

$$W^\perp = \{v \in V \mid \phi(v, w) = 0 \forall w \in W\}$$

Notiamo però che possiamo equivalentemente cercare

$$W^\perp = \{v \in V \mid \phi(w_1, v) = \dots = \phi(w_k, v) = 0\}$$

Riflettiamo su cosa questo voglia dire: $\phi(w_i, v) = {}^\tau e_i A [v]_B$, quindi (imponendo questa uguaglianza $\forall i_1^k$) i vettori di $W^\perp$ corrispondono alle soluzioni del sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \end{array}\right) AX = 0 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c|c|c} M_1 & M_2 & 0 \end{array}\right) X = 0$$

Ma quanto è la dimensione delle soluzioni (e quindi dell'ortogonale)? Sappiamo che $rnk(A) = n - h$, quindi la matrice $\left(\begin{smallmatrix} M_1 & M_2 \\ {}^\tau M_2 & M_3 \end{smallmatrix}\right)$ è invertibile, poiché ha esattamente $n-h$ righe. Quindi tutte le sue righe sono linearmente indipendenti, e in particolare lo sono le prime $k$. Abbiamo quindi appurato che $rnk\begin{pmatrix} M_1 & M_2 & 0 \end{pmatrix} = k$. Il sottospazio delle soluzioni del sistema esaminato ha quindi dimensione $n-k$. Ma visto che questo sottospazio era esattamente $\left[W^\perp\right]_B$ abbiamo che $dim\ W^\perp = n - k$.

# Esercitazione

**Esempio 10.** Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$, consideriamo il prodotto scalare $V \times V \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}$ con la legge: $\forall p, q \in \mathbb{R}_3[x]$, $\phi(p, q) = p(0)q(0) - p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$.
Adesso che abbiamo un prodotto scalare cerchiamo di capire tutto quello che ci è possibile (partendo dal verificare che si tratta di un prodotto scalare).

- Vediamo che $\phi \in PS(V)$.

- Verifichiamo la simmetria:

$$\begin{aligned}\phi(p,q) &= p(0)q(0) - p(1)q(1) + p(-1)q(-1)\\ &= q(0)p(0) - q(1)p(1) + q(-1)p(-1)\\ &= \phi(q,p)\end{aligned}$$

- Vista la simmetria è sufficiente verificare la linearità sul primo termine.

$\iota)$

$$\begin{aligned}(\lambda p,q) &= (\lambda p)(0)q(0) - (\lambda p)(1)q(1) + (\lambda p)(-1)q(-1)\\ &= \lambda p(0)q(0) - \lambda p(1)q(1) + \lambda p(-1)q(-1)\\ &= \lambda(p(0)q(0) - p(1)q(1) + p(-1)q(-1))\end{aligned}$$

$\iota\iota)$

$$\begin{aligned}\phi(p_1+p_2,q) &= (p_1+p_2)(0)q(0) - (p_1+p_2)(1)q(1) + (p_1+p_2)(-1)q(-1)\\ &= (p_1(0)+p_2(0))q(0) - (p_1(1)+p_2(1))q(1) + (p_1(-1)+p_2(-1))q(-1)\\ &= \phi(p_1,q) + \phi(p_2,q)\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere dicendo che $\phi$ è prodotto scalare per simmetria.

- Osservando il comportamento di $\phi$, osserviamo che $\phi(x,x) = 0$, i vettori con questa proprietà (che il prodotto scalare di essi su se stessi fa 0) sono detto vettori isotropi.
  L'insieme $C_\phi = \{v \in V \mid \phi(v,v) = 0\}$ dei vettori isotropi è un cono: $\forall v \in V,\ v \in C_\phi \Rightarrow Span(\{v\}) \subseteq C_\phi$. Chiaramente vale l'inclusione $C_\phi \subseteq Rad(\phi)$.

- Cerchiamo adesso il radicale di $\phi$. $p = ax^3 + bx^2 + cx + d \in Rad(\phi) \Rightarrow \forall q \in V,\ p(0)q(0) - p(1)q(1) + p(-1)q(-1) = 0$; vediamo cosa succede per determinati $q$:

  - $q = x^2 - 1 \Rightarrow p(0) = 0 \Rightarrow d = 0$.
  - $q = x(x-1) \Rightarrow -2p(-1) = 0 \Rightarrow -a + b - c = 0$.
  - $q = x(x+1) \Rightarrow 2p(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$.

  Da queste imposizioni possiamo vedere che $Rad(\phi) \subseteq Span\left(\left\{x^3 - x\right\}\right)$.

# Lezione 30

## Teoria

**Corollario 13.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$, $W$ un suo sottospazio vettoriale e $\phi \in PS(V)$. Allora:*

① $dim\ W^{\perp} = dim\ V - dim\ W + dim(W \cap Rad(\phi))$.

② *Se $\phi$ è non degenere, allora* $dim\ W^{\perp} = dim\ V - dim\ W$.

③ $\phi\mid_W$ *è non degenere* $\Leftrightarrow V = W \overset{\perp}{\oplus} W^{\perp}$.

*Cerchiamo innanzitutto di capire il significato del terzo punto: esso non ci dà nessuna informazione su $\phi$: il fatto che la restrizione sia o non sia degenere non ci dice assolutamente nulla sul prodotto scalare in generale. L'implicazione $'\Rightarrow'$, essa non è solo un'uguaglianza di dimensioni ma di spazi vettoriali; non è il primo caso in cui possiamo dire che $dim\ W^{\perp} = dim\ V - dim\ W$; ma in questo caso abbiamo nelle ipotesi che l'intersezione tra $W$ e $W^{\perp}$ è $\{0\}$ e questo ci permette di dire che la loro somma diretta faccia tutto $V$. Non così negli altri casi.*
*Il primo punto per esempio ci dà garanzie riguardo alle dimensioni ma non ci garantisce nulla sulla somma (avremmo potuto ipotizzare, anche in questo caso, una somma diretta, ma non è assolutamente vera). Quindi l'ipotesi che $\phi\mid_W$ è essenziale: in pratica i punti ① e ② ci danno informazioni sulle dimensioni ma non possiamo dire nulla sulla loro somma e nemmeno se sono in somma diretta, mentre il terzo punto ci dà informazioni anche sugli spazi vettoriali.*

**Dimostrazione.** ① Sia $W_1$ *t.c.* $W = (W \cap Rad(\phi)) \oplus W_1$. $W_1$ verifica le ipotesi della Proposizione 18. Ma abbiamo anche che $W^{\perp} = W_1^{\perp}$, visto che la parte di $Rad(\phi)$ contenuta in $W$ ha come ortogonale tutto $V$, e se un vettore è ortogonale a tutto $W$ deve in particolare essere ortogonale a $W_1$ (quello che stiamo dicendo è che limitare l'ortogonalità a $W_1$ non è limitante, in quanto tutte le componenti lungo $Rad(\phi)$ vanno a zero per definizione). Per la Proposizione già citata abbiamo quindi: $dim\ W^{\perp} = dim\ W_1^{\perp} = dim\ V - dim\ W_1 = dim\ V - (dim\ W - dim(W \cap Rad\ \phi))$.

② Deriva dal punto 1.

③ Sappiamo che $\phi\mid_W$ è non degenere $\Leftrightarrow W \cap W^{\perp} = Rad\,(\phi\mid_W) = \{0\}$. Sappiamo inoltre che $dim\ W \overset{\perp}{\oplus} W^{\perp} = dim\ W + dim\ W^{\perp} \geq V$ (e chiaramente non può essere un $>$). Questo ci è sufficiente per concludere.

**Esercizio 21.** A cosa corrispondono $(A+B)^{\perp}$ e $(A \cap B)^{\perp}$?

**Definizione 26** (Cono)**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale $S \subseteq V$ si dice cono se, $v \in S \Rightarrow Span\left(\{v\}\right) \subseteq S$.

**Definizione 27** (Isotropo)**.** Sia $\phi \in SP(V)$. $v \in V$ è un vettore isotropo se $\phi(v,v) = 0$. Denotiamo con $\mathcal{I}\left(\phi\right) = \{v \in V \mid \phi(v,v) = 0\}$.
$\mathcal{I}\left(\phi\right)$ è un cono.

**Esempio 11.** 1) Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ e $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\phi} \mathbb{R} \in PS(\mathbb{R}^2)$ con la legge $\phi(X,Y) = {}^{\tau}XAY$. Vediamo che

$$\mathcal{I}\left(\phi\right) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 - y^2 = 0\right\}$$

che sul piano cartesiano è dato dall'unione di due rette (che sappiamo non essere uno spazio vettoriale).

2) Consideriamo lo spazio di Minkowski. Abbiamo che

$$\mathcal{I}\left(\phi\right) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 - z^2 = 0\right\}$$

è un cono (cono isotropo).

*Osservazione* 27. Sia $\phi \in PS(V)$ *t.c.* $\forall v \in V,\ \phi(v,v) = 0$. Allora $\phi = 0$; per la formula di polarizzazione.

*Riflessione* 13. Sia $\phi \in PS(V)$ e $v \in V$ un vettore non isotropo; sappiamo che $V = Span\left(\{v\}\right) \overset{\perp}{\oplus} Span\left(\{v\}\right)^{\perp}$. Ma come si spezza un generico vettore nelle componenti date da questa somma diretta?
$\forall w \in V,\ \exists! w_1 \in Span\left(\{v\}\right),\ w_2 \in Span\left(\{v\}\right)^{\perp}$ *t.c.* $w = w_1 + w_2$. Visto che $w_1 \in Span\left(\{v\}\right)$ possiamo scrivere $w_1 = cv,\ w_2 = w - cv$. Ci possiamo dunque chiedere per quale $c \in \mathbb{K}$ abbiamo $w - cv \in Span\left(\{v\}\right)^{\perp}$. Calcoliamo quindi $\phi(w_2, v) = \phi(w - cv, v) = \phi(w,v) - c\phi(v,v)$.

$$c = \frac{\phi(v,w)}{\phi(v,v)}$$

Viene detto coefficiente di Fourier di $w$ rispetto a $v$. Dunque:

$$w = \frac{\phi(v,w)}{\phi(v,v)}v + \left(w - \frac{\phi(v,w)}{\phi(v,v)}v\right)$$

Quindi $\pi_{Span(\{v\})}(v) = \frac{\phi(v,w)}{\phi(v,v)}v$.

*Riflessione* 14. Fino ad ora abbiamo visto che i prodotti scalari possono essere rappresentati, data una base, da una matrice simmetrica. Ma possiamo trovare un modo migliore per rappresentarli? Possiamo ottenere di più e arrivare ad avere, magari, qualcosa di canonico? Magari in cui la matrice che rappresenta il prodotto è diagonale.

# Esercitazione

*Osservazione* 28. Sia $V$ uno spazio vettoriale, $T$ un suo sottoinsieme, $W$ un suo sottospazio vettoriale e $\phi \in PS(V)$. Vale che:

a) $T^\perp = Span(T)^\perp$.

b) $T' \subseteq T \Rightarrow T'^\perp \supseteq T^\perp$.

c) $dim\ W^\perp = dim\ V - dim\ W + dim(W \cap Rad(\phi))$.

d) $V^\perp = Rad(\phi)$.

e) $Rad(\phi)^\perp = V$.

f) $W \subseteq W^{\perp^\perp}$.

**Esempio 12.** Continuiamo l'Esempio 10. Avevamo: $V = \mathbb{R}_3[x]$, su cui era definito il prodotto scalare $V \times V \xrightarrow{\phi} \mathbb{K}$ con la legge: $\forall p, q \in \mathbb{R}_3[x],\ \phi(p,q) = p(0)q(0) - p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$.

- Vediamo adesso di associare una matrice a $\phi$. Calcoliamoci quindi $A = \mathfrak{M}_B(\phi)$ prendendo come base $B = \{1, x, x^2, x^3\}$; per il calcolo utilizziamo la definizione: $[A]_{ij} = \phi(x_{i-1}, x^{j-1})$. Avremo quindi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

  Come ci aspettavamo (il prodotto scalare è simmetrico) abbiamo trovato una matrice simmetrica. Possiamo quindi calcolare velocemente il prodotto scalare tra due vettori a piacere; per esempio $\phi(x^2 + x, 1 + x^3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4$.

- La lezione scorsa abbiamo trovato che $Rad(\phi) \subseteq Span\left(\{x^3 - x\}\right)$. Vediamo se riusciamo a fare di più; sappiamo che $[Rad(\phi)]_B = Ker\ A$ e anche che $Rad(b) = \{0\} \Leftrightarrow A$ invertibile $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$. Andiamo ora a calcolare $Ker\ A$; con i soliti conti otteniamo:

$$Ker\ A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \left\{ \begin{smallmatrix} x=z=0 \\ y=-t \end{smallmatrix} \right. \right\} = Span\left( \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right)$$
$$\Rightarrow Rad(\phi) = Span\left(\{x^3 - x\}\right)$$

- Cerchiamo adesso le matrici associate ad alcuni sottospazi: chiaramente se i sottospazi sono *Span* di vettori della base $B$ la matrice associata sarà un minore di $A$.
  - Prendiamo il caso di $W = Span\left(\{1, x, x^2\}\right)$; chiamiamo $B' = \{1, x, x^2\}$. Avremo:
  $$A' = \mathfrak{M}_{B'}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
  Vediamo che $det\ A' = -4 \neq 0$, quindi $Rad(\phi) = \{0\}$.

- Prendiamo il caso di $W = Span\left(\left\{x, x^3\right\}\right)$; chiamiamo $B' = \left\{x, x^3\right\}$. Abbiamo:

$$A' = \mathfrak{M}_{B'}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Questi due esempi ci fanno capire che il comportamento delle restrizioni di un prodotto scalare può essere molto vario.

- Cerchiamo una base in cui la matrice associata sia comoda, scegliamo a questo scopo (non a caso) la base $S = \left\{x(x+1), x(x-1), x^2-1, x^3-x\right\}$. Questa base è stata scelta appositamente: la matrice associata sarà:

$$\mathfrak{M}_S(\phi) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matrice molto pratica.

- Cerchiamo adesso alcuni ortogonali (abbiamo chiaramente sempre $Rad(\phi) \subseteq T^{\perp}$ per ogni sottoinsieme $T$):

  - $\{1\}^{\perp} = \{q \in \mathbb{R}_3[x] \mid b(1,q) = 0\}$. Scriviamo $q = ax^3 + bx^2 + cx + d$ e imponiamo il risultato nullo al prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \{1\}^{\perp} &= \left\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}^4 \mid 2a + 2c - d = 0\right\} \\ &= Span\left(\left\{x^2, x^3 + 2, x + 2\right\}\right) \end{aligned}$$

  In questo caso abbiamo $\{1\}^{\perp} \oplus Span(\{1\}) = V$ (visto che $\phi\mid_{Span(\{1\})}$ è non degenere).

  - $\{x\}^{\perp} = \{q \in \mathbb{R}_3[x] \mid b(x,q) = 0\}$. Come prima possiamo imporre il risultato:

$$\begin{aligned} \{x\}^{\perp} &= \left\{ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x] \mid -(a+b+c+d) - (-a+b-c+d) = 0\right\} \\ &= \left\{ax^3 + bx^2 + cx + d \mid b = -d\right\} = Span\left(\left\{x^3, x, x^2 - 1\right\}\right) \end{aligned}$$

- Abbiamo parlato del cono isotropo: $\mathcal{I}(\phi) = \{p \in \mathbb{R}_3[x] \mid \phi(p,p) = 0\}$. Cerchiamo esplicitamente questo cono imponendo il risultato al prodotto scalare.

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{I}(\phi) \Leftrightarrow \phi(p,p) = 0 &\Leftrightarrow d^2 - 4ab - 4ad - 4bc - 4cd = 0 \\ &\Leftrightarrow d = 0 \vee a = -c \vee b = -d \end{aligned}$$

*Osservazione* 29. Sia $\phi \in PS(V)$ e $W$ ssv. di $V$. Abbiamo, per definizione.

$$W^{\perp^{\perp}} = \{v \in V \mid \forall w \in W,\ \phi(v,w) = 0\}$$

Cerchiamo la dimensione di questo sottospazio vettoriale.

$$\begin{aligned} dim\ W^{\perp^{\perp}} &= dim\ V - dim\ W^{\perp} + dim\ Rad(\phi) = dim\ V - (dim\ V - dim\ W + dim(W \cap Rad(\phi)))??? \\ &= -dim(W \cap Rad(\phi)) + dim\ W + dim\ Rad(\phi) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo (per la formula delle dimensioni) $W = W^{\perp^{\perp}} \Leftrightarrow Rad(\phi) \subseteq W$.

**Esercizio 22.** Sia $V$ uno spazio vettoriale, $U, W$ suoi sottospazi vettoriali e $\phi \in SP(V)$ un prodotto scalare. Allora valgono:

a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

b) $(U \cap W)^\perp \supseteq U^\perp \cap W^\perp$.

# Lezione 31

## Teoria

### Congruenze di matrici diagonali

*Osservazione* 30. Abbiamo visto che cercare vettori non isotropi può essere utile: se ne troviamo uno abbiamo un teorema che ci fornisce lo spezzamento dello spazio vettoriale in due sottospazi vettoriali ortogonali tra loro e in somma diretta; stessa cosa possiamo dire, in generale, se abbiamo un sottospazio nel quale la restrizione del prodotto scalare non degenere. Quindi possiamo esaminare più facilmente il prodotto scalare dividendo lo spazio vettoriale in sottospazi ortogonali tra di loro e in somma diretta.

**Definizione 28** (Base ortogonale)**.** Sia $\phi \in PS(V)$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$. $B$ si dice ortogonale se

$$\forall i_1^n, j_1^n, \ i \neq j \Rightarrow \phi(v_i, v_j) = 0$$

Quindi solo se la matrice associata nella base $B$ al prodotto scalare ($\mathfrak{M}_B(\phi)$) è diagonale.

**Teorema 7.** *Sia $\phi \in PS(V)$, allora esiste $B$ base di $V$ ortogonale per $\phi$.*

**Dimostrazione.** Per induzione su $n = dim\ V$.

$\iota$ ) $n = 1$. Ovvio.

$\iota\iota$ ) Dobbiamo distinguere due casi:

a) $\forall v \in V, \ \phi(v, v) = 0 \Rightarrow \phi = 0 \Rightarrow$ ogni base è una base ortogonale.

b) $\exists v_1 \ t.c. \ \phi(v_1, v_1) \neq 0 \Rightarrow V = Span(\{v_1\}) \overset{\perp}{\oplus} Span(\{v_1\})^{\perp}$. Per ipotesi induttiva esiste $\{v_2, \ldots, v_n\}$ base di $Span(\{v_1\})^{\perp}$ ortogonale per la restrizione di $\phi$. Allora $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ è una base di $V$ ortogonale per $\phi$.

**Dimostrazione** (Algoritmo di Lagrange)**.** Facciamo un'altra dimostrazione (costruttiva) del teorema appena enunciato.
Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$; e sia $A = \mathfrak{M}_B(\phi)$. Il procedimento che utilizzeremo sarà quello di modificare il primo vettore per renderlo ortogonale rispetto agli altri, e iterare il procedimento nel sottospazio generato dagli altri vettori; quindi cerchiamo un modo per modificare la base di $V$.

- Supponiamo $[A]_{11} = \phi(v_1, v_1) \neq 0$ ($v_1$ non isotropo). Poniamo allora:

$$\begin{aligned} v_1' &= v_1 \\ v_2' &= v_2 - \frac{\phi(v_2, v_1')}{\phi(v_1', v_1')} v_1' \\ &\vdots \\ v_n' &= v_n - \frac{\phi(v_n, v_1')}{\phi(v_1', v_1')} v_1' \end{aligned}$$

Allora abbiamo che:

a) $\forall j_2^n,\ \phi(v_j', v_1') = 0$.

b) $B' = \{v_1', \dots, v_n'\}$ è una base di $V$.

Il punto *a)* è chiaro, vediamo il punto *b)*. Come possiamo controllare se sono una base? Vediamo se sono linearmente indipendenti; lo sono solamente se sono indipendenti le loro coordinate rispetto alla base $B$. Ma vediamo che:

$$[v_1']_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [v_2']_B = \begin{pmatrix} * \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [v_n']_B = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice che induce i cambiamenti di vettori visti è rappresentata dalla matrice:

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

Vediamo facilmente che il determinante della matrice è 1, quindi la matrice è invertibile, quindi manda basi in basi e in particolare abbiamo dimostrato che manda la nostra base $B$ in un'altra base: $B'$.
A questo punto iteriamo il procedimento sul $Span(\{v_2', \dots, v_n'\})$.

- Cosa facciamo se $[A]_{11} \neq 0$? Vediamo se $\exists i_1^n$ *t.c.*$\phi(v_i, v_i) \neq 0$ (*t.c.* $[A]_{ii} \neq 0$) e si fa la stessa cosa, cambiando l'ordine dei vettori della base.

- Se la diagonale della matrice è nulla ($\forall i_1^n,\ \phi(v_i, v_i) = 0$) possiamo essere di fronte a due casi:

  a) $\phi$ è totalmente nulla (quindi in forma diagonale per ogni base scelta).

  b) $\exists i \neq j$ *t.c.* $\phi(v_i, v_j) \neq 0$ $\left([A]_{ij} = [A]_{ji} \neq 0\right)$. In questo caso prendiamo come primo vettore $v_i + v_i$, abbiamo infatti che $\phi(v_i + v_j, v_i + v_j) = 2\phi(v_i, v_j) \neq 0$; e poi iteriamo il procedimento.

**Corollario 14.** *Ogni matrice simmetrica è congruente a una matrice diagonale.*

*Osservazione* 31. Sia $\phi \in PS(V)$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortogonale di $V$ e $V \ni v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n$. Se $v_1$ è un vettore non isotropo abbiamo:

$$\phi(v, v_1) = a_1 \phi(v_1, v_1) \Rightarrow a_1 = \frac{\phi(v, v_1)}{\phi(v_1, v_1)}$$

*Osservazione* 32. Sia $\phi \in PS(V)$ un prodotto scalare non degenere e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortogonale di $V$. Allora $det(\mathfrak{M}_B(\phi)) \neq 0 \Rightarrow$ i vettori della base sono tutti anisotropi, quindi, $\forall v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\phi(v, v_i)}{\phi(v_i, v_i)} v_i$$

*Osservazione* 33. Sia $\phi \in PS(V)$ un prodotto scalare non degenere, $W$ sottospazio vettoriale di $V$, $k = dim\ W$, $\phi\,|_W$ non degenere e $B = \{w_1, \ldots, w_k\}$ una base ortogonale di $W$. Allora $w_1, \ldots, w_k$ sono non isotropi. Quindi, $\forall v \in V$,

$$v = \sum_{i=1}^{k} \left( \frac{\phi(w_i, v)}{\phi(w_i, w_i)} w_i \right) + z,\ \ z \in W^{\perp}$$

Questo ci fornisce una proiezione di $V$ su $W$.

## Minori principali

**Definizione 29** (Minore principale)**.** Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K},)$ una matrice simmetrica. $\forall i_1^n$ si dice $i$- esimo minore principale di $A$ il minore $M_i(A)$ formato dalle prime $i$ righe e $i$ colonne.

*Riflessione* 15. Sia $\phi \in PS(V)$, $B$ una qualsiasi base di $V$ e $A = \mathfrak{M}_B(\phi)$. Supponiamo $[A]_{11} \neq 0$; abbiamo visto che possiamo prendere come base $B'$ nella quale

$$v'_j = v_j - \frac{\phi(v_j, v'_1)}{\phi(v'_1, v'_1)} v'_1$$

Abbiamo visto che la matrice $M = \mathfrak{M}_{B',B}(id_V)$ del cambiamento di base da $B$ a $B'$ aveva determinante 1. Se diciamo $A' = \mathfrak{M}_{B'}(\phi)$ allora abbiamo: $A' = {}^{\tau}MAM$. Questa particolare matrice (ottenuta cambiando la base in questo particolare modo) ha determinante 1, quindi $det\ A = det\ A'$.
Più precisamente quindi, sia $W_k = Span(\{v_1, \ldots, v_k\})$ abbiamo:

a) $W_k = Span(\{v'_1, \ldots, v'_k\})$; infatti se pensiamo a come agisce la trasformazione di base, vediamo che i nuovi vettori che otteniamo sono combinazione lineare dei vettori di prima. Quindi

$$Span(\{v'_1, \ldots, v'_k\}) \subseteq W_k$$

e abbiamo l'uguaglianza delle dimensioni.

b) Detto $A_k$ il $k$-esimo minore principale di $A$ abbiamo:

$$A_k = \mathfrak{M}_{Span(\{v_1, \ldots, v_k\})}(\phi\,|_{W_k})$$

Cioè i minori principali sono matrici associate a restrizioni di $\phi$ rispetto a sottospazi generati dai primi elementi.

c) Detto $M_k$ il $k$-esimo minore principale della matrice $M$ del cambiamento di base, allora questo indica le coordinate dei nuovi vettori rispetto alla vecchia base $B$. Ci indica cioè le coordinate dei vettori $v'_1, \dots, v'_k$ rispetto ai vecchi vettori $v_1, \dots, v_k$.

d) Per quanto detto fino ad ora non dovrebbe sorprendere sapere che:

$$A'_k = {}^{\tau}M_k A_k M_k$$

Inoltre, come prima, agendo con una trasformazione di base (l'esatta operazione che abbiamo indicato) si conserva il determinate di $A$ e di tutti i minori principale. L'algoritmo di Lagrange è quindi comodo per questo: conserva il determinante.

**Teorema 8** (di Jacobi)**.** *Sia $\phi \in PS(V)$, $r = rnk(\phi)$, $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base di $V$ e $A = \mathfrak{M}_B(\phi)$. Diciamo $A_i$ l'i-esimo minore principale di $A$ e $D_i = det(A_i)$. Sappiamo per certo che $\forall i > r,\ D_i = 0$. Se $D_1, \dots, D_r \neq 0$. Allora $\exists S$ base di $V$ t.c.*

$$\mathfrak{M}_S(\phi) = \begin{pmatrix} D_1 & & & & & & \\ & \frac{D_2}{D_1} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \frac{D_r}{D_{r-1}} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

**Dimostrazione.** $D_1 = [A]_{11}$. Per ipotesi sappiamo $D_1 \neq 0$, quindi $v_1$ è non isotropo; posso quindi, con la trasformazione di base di Lagrange, modificare $B$ ed ottenere un'altra base $B'$ per la quale restano immutati $D_1, D_2, \dots, D_r$. Con la nuova trasformazione avremo:

$$M = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Vediamo quanto possiamo dire della sottomatrice $C$; noi sappiamo che $[C]_{11} \neq 0$, infatti avevamo $[A]_{22} \neq 0$. Ma cosa ci sta nel posto $[C]_{11}$? Pensiamo al fatto che la trasformazione delle basi ha lasciato invariato il determinante dei minori principali, quindi $D_2$ è rimasto costante. Ma sappiamo anche che $D_2 = [A]_{11}[C]_{11}$, infatti il minore principale di ordine 2 è diagonale. Quindi al posto $[C]_{11}$ abbiamo $D_1^C = \frac{D_2}{D_1}$.
A questo punto iteriamo il procedimento fino ad arrivare a $i = r$.

Il teorema visto adesso vale in generale, vediamo cosa succede in $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$.

## Due campi particolari: caso complesso e caso reale

### Caso complesso

*Riflessione* 16. Sia $V$ un $\mathbb{C}$ spazio vettoriale di dimensione $n$ e $\phi$ un prodotto scalare su $V$ di rango $r$. Allora $\exists S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ tale che:

$$A = \mathfrak{M}_S(\phi) = \begin{pmatrix} [A]_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & [A]_{rr} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad con\ [A]_{ii} \neq 0,\ \forall i_1^r$$

Sia $B = \left\{ \frac{v_1}{\sqrt{\phi(v_1,v_1)}}, \ldots, \frac{v_r}{\sqrt{\phi(v_r,vr1)}}, v_{r+1}, \ldots, v_n \right\}$. $B$ è detta base ortogonale normalizzata. Avremo quindi:

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Questo ci permette di fare una considerazione importante sulla classe di equivalenza delle isometrie in uno spazio vettoriale complesso.

**Teorema 9** (Teorema di Sylvester complesso)**.** *Sia $V$ un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale e $\phi, \psi \in PS(V)$. Allora $(V, \phi)$ e $(V, \psi)$ sono isometrici $\Leftrightarrow rnk(\phi) = rnk(\psi)$.*
*Cioè il rango è un sistema completo di invarianti se lo spazio vettoriale è uno spazio vettoriale complesso.*

**Corollario 15.** *Tutti i prodotti scalari non degeneri su uno spazio vettoriale complesso sono isometrici.*

**Corollario 16.** *Ogni matrice simmetrica di rango $r$ a coefficienti complessi è congrua a:*

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

### Caso reale

*Riflessione* 17. Sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\phi \in PS(V)$ di rango $r$ e $S$ una base di $V$ tale che:

$$A = \mathfrak{M}_S(\phi) = \begin{pmatrix} [A]_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & [A]_{rr} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che, $\forall i_1^p,\ [A]_{ii} > 0; \forall j_{p+1}^r,\ [A]_{jj} < 0$. Consideriamo allora

$$B = \left\{ \frac{v_1}{\sqrt{[A]_{11}}}, \dots, \frac{v_p}{\sqrt{[A]_{pp}}}, \frac{v_{p+1}}{\sqrt{-[A]_{p+1,p+1}}}, \dots, \frac{v_r}{\sqrt{[A]_{rr}}}, v_{r+1}, \dots, v_n \right\}$$

$B$ viene detta base ortogonale normalizzata e abbiamo che:

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline & -I_q & \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$$

**Definizione 30.** Sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $\phi \in PS(V)$.

- $\phi$ si dice definito positivo (risp. negativo) se $\forall v \neq 0,\ \phi(v, v) > 0$.
- $\phi$ si dice definito se è definito positivo o definito negativo.
- $\phi$ si dice semidefinito positivo (risp. negativo) se $\forall v \neq 0,\ \phi(v, v) \geq 0$.

*Osservazione* 34. Sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $\phi \in PS(V)$.

1) $\phi$ definito positivo $\Rightarrow$ $\phi$ non degenere.
2) La proprietà di un prodotto scalare di essere definito passa alle sue restrizioni. Quindi se $\phi$ è definito positivo (risp. negativo) e $W$ è ssv. di $V$ allora $\phi\,|_W$ è definito positivo (risp. negativo).

**Definizione 31** (Indici)**.** Sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $\phi \in PS(V)$. Si definisce:

- $i_+(\phi) = max\,\{dim\ W \mid W$ ssv. di $V$ $t.c.$ $\phi\,|_W$ è definito positivo$\}$, si dice indice di positività.
- $i_-(\phi) = max\,\{dim\ W \mid W$ ssv. di $V$ $t.c.$ $\phi\,|_W$ è definito negativo$\}$, si dice indice di negatività.
- $i_0(\phi) = dim\ Rad(\phi) = n - rnk(\phi)$, si dice indice di nullità.

*Osservazione* 35. Gli indici sono invarianti per isometria, infatti $\phi(v, v) = \phi'(f(v), f(v))$. Quindi un sottospazio in cui $\phi$ è definito positivo continua a essere definito positivo.

**Definizione 32** (Segnatura)**.** Sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $\phi \in PS(V)$. Si definisce segnatura di $\phi$ la terna $\sigma(\phi) = (i_+(\phi), i_-(\phi), i_0(\phi))$.

*Osservazione* 36. $\phi$ è definito positivo se e solo se $\sigma(\phi) = (n, 0, 0)$.

**Teorema 10** (di Sylvester reale)**.** *Sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $n = dim\ V$ e $\phi \in PS(V)$. Sia inoltre $B$ una base ortogonale normalizzata di $\phi$ per la quale quindi:*

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_p & & \\ \hline & -I_q & \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$$

*Allora $p = i_+(\phi)$ e $q = i_-(\phi)$.*
*Cioè quello che vogliamo dimostrare è che $q$ e $p$ dipendono unicamente da $i_+(\phi)$ e $i_-(\phi)$ i quali, per definizione, non dipendono da una base. Questo ci consente di dire che la forma normale della matrice dipende dal prodotto scalare ed è invariante per isometria.*

**Dimostrazione.** Sia $B = \{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{p+q}, \dots v_n\}$ la base ortogonale normalizzata. Possiamo dire quindi:

- La restrizione di $\phi$ a $Span(\{v_1, \dots, v_p\})$ è definita positiva, quindi $i_+(\phi) \geq p$.

- Sia $W$ un ssv. di $V$ tale che: $dim\ W = i_+(\phi)$ e $\phi\mid_W$ sia definito positivo (esiste perché l'indice di positività è un massimo).
  Sia $Z = Span(\{v_{p+1}, \dots, v_n\})$. Abbiamo a questo punto che:

  a) $\forall z \in Z,\ z = \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i v_i$ abbiamo che $\phi(z,z) = -\sum_{i=p+1}^{p+q} \alpha_i^2 \leq 0$. Quindi $\phi\mid_Z$ è definito negativo.

  b) Vediamo che $W \cap V = \{0\}$. Se infatti $v \in W \cap V$ abbiamo:
     1) $\phi(v,v) \geq 0 \Leftarrow v \in W$;
     2) $\phi(v,v) \leq 0 \Leftarrow v \in Z$.

     Ma $\phi\mid_W$ è definito positivo $\Rightarrow v = 0$.
     Allora sappiamo che $\exists U = W \oplus Z$ sottospazio vettoriale di $V$ t.c. $dim\ U \leq dim\ V = n$. Ma $dim\ U = dim\ W + dim\ Z = i_+(\phi) + n - p \leq n$. Quindi $i_+(p) \leq p$.

  Visto che abbiamo entrambe le disuguaglianze abbiamo la tesi.

- Poiché $p + q = rnk(\phi)$ abbiamo che:

$$i_+(\phi) + i_-(\phi) = rnk(\phi) \Rightarrow q = i_-(\phi)$$

**Corollario 17.** *Sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $\phi, \psi \in PS(V)$. Allora $(V,\phi)$ e $(V,\psi)$ sono isometrici $\Leftrightarrow \sigma(\phi) = \sigma(\psi)$.*
*Cioè la segnatura è un invariante completo di isometria.*

**Corollario 18.** *Due matrici simmetriche a coefficienti reali sono congruenti se e solo se hanno la stessa segnatura.*

**Definizione 33** (Base ortonormale)**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale, $\phi \in PS(V)$ e $B$ base di $V$. $B$ si dice ortonormale per $\phi$ se $\mathfrak{M}_B(\phi) = I$.

*Osservazione* 37. Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e $\phi, \psi \in PS(V)$.

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\exists B$ base ortonormale $\Leftrightarrow \phi$ è non degenere.

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\exists B$ base ortonormale $\Leftrightarrow \sigma(\phi) = (n, 0, 0)$.

**Definizione 34.** Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica. $A$ si dice definita positiva se

$$\forall X \in \mathbb{R}^n,\ X \neq 0, \quad {}^\tau X A X > 0$$

*Osservazione* 38. Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ una matrice simmetrica. $A$ è definita positiva $\Leftrightarrow A$ congruente a $I \Leftrightarrow \exists M \in GL(n, \mathbb{R})$ *t.c.* $A = {}^{\tau}MM$

*Riflessione* 18. Supponiamo $A$ simmetrica definita positiva, allora le restrizioni della matrice continuano ad essere definite positive, quindi le varie sottomatrici principali sono definite positive. Quindi $\forall A$ definita positiva i suoi vari minori principali sono definiti positivi. Abbiamo quindi un criterio di positività per le matrici simmetriche reali. Detto $D_i$ il determinante dell'$i$-esimo minore principale abbiamo:

$$A \text{ definita positiva} \Leftrightarrow \forall i_1^n,\ D_i > 0$$

'$\Rightarrow$' Già dimostrato.

'$\Leftarrow$' Per Jacobi $A$ è congrua a:

$$A \equiv \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{D_n}{D_{n-1}} \end{pmatrix}$$

E quindi la sua segnatura è: $\sigma(\phi) = (n, 0, 0)$. Infatti la segnatura dipende dai segni dei vari $D_i$. Per i prodotti scalari definiti negativi i segni determinanti devono essere invertiti: $sgn(D_i) = -sgn(D_{i+1})$.

# Esercitazione

Sia $V$ uno spazio vettoriale e $\phi \in PS(V)$; possiamo trovare una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di $V$ per la quale la matrice associata a $\phi$ nella base $B$ sia molto bella. In particolare $B$ si dice ortogonale se $i \neq j \Rightarrow \phi(v_i, v_j) = 0$ (cioè se la matrice associata è diagonale). Abbiamo visto che per ogni prodotto scalare esistono basi ortogonali.

*Osservazione* 39. Sia $B$ una base ortogonale, allora avremo:

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_k & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi che i vettori $v_{k+1}, \ldots, v_n$ sono vettori ortogonali a tutto lo spazio (sono ortogonali a un supplementare del loro *Span* e sono anche isotropi) e quindi stanno nel radicale. In particolare abbiamo che $dim\ Rad(\phi) = n - k$ (visto il rango della matrice) e abbiamo esattamente $n - k$ vettori linearmente indipendenti che vi appartengono; quindi possiamo dire che $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ è una base del radicale. Gli altri vettori della base non sono isotropi, quindi è vero che, nella nostra base $B$ ortogonale (detto $k$ il rango della matrice), abbiamo:

$$B = \{\text{Base del radicale}\} \cup \{k \text{ vettori non isotropi ortogonali tra loro}\}$$

Se non conosciamo una base ortogonale possiamo usare il fatto che, se un vettore $v$ è non isotropo allora fornisce una decomposizione dello spazio vettoriale nello *Span* del vettore isotropo e nel suo ortogonale. Possiamo iterare lo stesso ragionamento fino ad ottenere:

$$V = Span\left(\{v_1\}\right) \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} Span\left(\{v_i\}\right) \overset{\perp}{\oplus} Span\left(\{v_1, \dots, v_i\}\right)^{\perp}$$

Continuando in questo modo troviamo una base ortogonale. Il radicale è contenuto sempre nel termine ortogonale della somma diretta, quindi si continua a portarlo avanti fino all'ultimo passaggio. Cosa succede se ci troviamo nella situazione in cui tutti i vettori della base sono isotropi (e il prodotto scalare non è nullo)? Se $A_i^j \neq 0$ prendiamo il vettore $v_i + v_j$, che di certo non sarà isotropo.

**Esercizio 23.** Sia $\phi \in PS(\mathbb{R}^4)$.

$$\phi(X,Y) = {}^{\tau}XAY, \ con \ \ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

- Cerchiamo intanto $Ker\ A$, quindi il radicale del prodotto scalare, per riducrci il lavoro e sapere se il prodotto scalare è o non è degenere. Vediamo intanto che $rnk(A) = 3 \Rightarrow dim\ Rad\ \phi = 1 \Rightarrow$ cerchiamo 3 vettori non isotropi.

  Troviamo facilmente anche: $Ker\ A = Rad(\phi) = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}\right)$.

- Prendiamo $v_1 = e_1$, come primo vettore della base, infatti questo vettore è non isotropo. Cerchiamo una base del suo ortogonale; visto che $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ abbiamo che i vettori ortogonali a $v_1$ sono i vettori che annullano il vettore appena trovato. Quindi:

$$\begin{aligned} W_1 = Span\left(\{v_1\}\right)^{\perp} &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \middle| \ \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, v_1\right) = 0\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \middle| \ x + 2y - z - 2t = 0\right\} \\ &= Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right) = Span(C) \end{aligned}$$

- Quello che vogliamo fare è iterare il procedimento e trovare un altro vettore di $W_1$ non isotropo. Abbiamo che:

  $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Inoltre abbiamo:

  - $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$. Non possiamo quindi prendere questo vettore: è isotropo.
  - $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = 3$.

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -3.$

$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Inoltre abbiamo:

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 9;$

- $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -6.$

E quindi (facendo l'ultimo conto per l'ultimo vettore) troviamo che:

$$\mathfrak{M}_C\left(\phi\mid_{W_1}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 9 & -6 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi trovato un altro vettore non isotropo: $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dobbiamo trovare ora il terzo e ultimo vettore, non isotropo e appartenente a $Span\left(\{v_1, v_2\}\right)^{\perp}$. Sapendo che $Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ possiamo scrivere:

$$W_2 = Span\left(\{v_1, v_2\}\right)^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{cases} x + 2y - z - 2t = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \right\} = Span\left(\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}\right)$$

Cerchiamo dentro questo sottospazio vettoriale un vettore non isotropo; vediamo facilmente che il vettore $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non è isotropo; lo prendiamo quindi come terzo vettore.
Avendo tre vettori non isotropi ortogonali tra di loro sappiamo per certo che:

$$Rad(\phi) = Span\left(\{v_1, v_2, v_3\}\right)^{\perp}$$

Quindi a questo punto basta prendere un vettore del radicale e otterremo:

$$\mathfrak{M}_{\left\{v_1, v_2, v_3, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La base ufficiale (normalizzata) quindi sarà: $B = \left\{ v_1, \frac{v_2}{3}, \frac{v_3}{3}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Avremo quindi:

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 24.** Sia $\phi \in PS(\mathbb{R}^3)$, tale che, $\forall X, Y \in \mathbb{R}^3$, $\phi(X, Y) = {}^{\tau}XBY$, con:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo $rnk(B) = 2$, una base di $Ker\ B = Rad(\phi)$ è data da $\left\{ \left( \begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right\} = \{v_3\}$. A questo punto dobbiamo cercare dei vettori non isotropo, nella base canonica non ce ne sono, ma $[B]_{13}$ è diverso da zero, quindi prendiamo come vettore non isotropo $v_1 = e_1 + e_3$. Dobbiamo ripetere il procedimento dell'esercizio precedente:

$$\begin{aligned} Span\left(\{v_1\}\right)^{\perp} &= \left\{ \left( \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left( \begin{smallmatrix} x & y & z \end{smallmatrix} \right) B \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = 0 \right\} = \left\{ \left( \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + 2y + z = 0 \right\} \\ &= Span\left( \left\{ \left( \begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\} \right) \end{aligned}$$

Vediamo anche che il vettore $v_2 = \left( \begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ è non isotropo, lo prendiamo quindi come secondo vettore e per completare la base vi aggiungiamo $v_3$. Abbiamo quindi:

$$\mathfrak{M}_{\{v_1, v_2, v_3\}}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per normalizzare la base è sufficiente dividere i primi due vettori per $\sqrt{2}$.

# Lezione 32

## Teoria

Abbiamo provato che ogni prodotto scalare ammette una base ortogonale e studiato i casi complesso e reale con il teorema di Sylvester e trovato che due prodotti vettoriali sono isometrici se hanno la stessa segnatura (in $\mathbb{R}$) o lo stesso rango (in $\mathbb{C}$).

### Piani iperbolici

**Definizione 35** (Piano iperbolico)**.** Sia $P$ uno spazio vettoriale di dimensione 2 e $\psi$ un prodotto scalare su $P$ non degenere. Se esiste $0 \neq v \in P$ vettore isotropo, allora $(P, \psi)$ si dice piano iperbolico.

**Proposizione 19.** *Sia $(P, \psi)$ un piano iperbolico e $0 \neq v \in P$ un vettore isotropo, allora $\exists w \in P$ t.c. $B = \{v, w\}$ è una base e tale che:*

$$\mathfrak{M}_B(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*$B$ viene detta base iperbolica.*

**Dimostrazione.** Sia $S = \{v, z\}$ un qualsiasi completamento a base di $v$. Allora abbiamo:

$$\mathfrak{M}_B(\psi) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$$

Sappiamo che $a \neq 0$, infatti il prodotto scalare è non degenere (ha quindi rango 2). Cerco quindi $\lambda, \mu$ tali che, se $w = \lambda v + \mu z$,

1. $B = \{v, w\}$ sia base per $P$.
2. $\mathfrak{M}_B(\psi) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Ma vediamo facilmente che:

- 1 $\Leftrightarrow \mu \neq 0$.
- Osserviamo che:

$$\psi(v, w) = \psi(v, \lambda v + \mu z) = \mu a;$$
$$\psi(w, w) = \psi(\lambda v + \mu z, \lambda v + \mu z) = 2\lambda\mu a + \mu^2 b.$$

Abbiamo quindi: ② $\Leftrightarrow \begin{cases} \mu a = 1 \\ 2\lambda\mu a + \mu^2 b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = a^{-1} \\ \lambda = -b(2a^2)^{-1} \end{cases}$

*Osservazione* 40. Se $\phi \in PS(V)$ è non degenere ed esiste $v \neq 0$ isotropo, allora $V$ contiene un piano iperbolico.
Comunque trovare il caso $\phi$ non degenere non è particolarmente difficile: la restrizione di $\phi$ a un supplementare del radicale è sempre non degenere; quindi questa condizione non è particolarmente limitante.

*Dimostrazione.* $\phi$ non degenere $\Rightarrow Rad(\phi) = \{0\} \Rightarrow v \notin Rad(\phi) \Rightarrow \exists w \in V$ *t.c.* $\phi(v,w) \neq 0$. Allora $w \neq 0$ e $v, w$ sono linearmente dipendenti (se $w \in Span(\{v\})$ avremmo che $\phi(v,w) = 0$, visto che $v$ è isotropo). Allora consideriamo $P = Span(\{v,w\})$: è ssv. di $V$ di dimensione 2 e con un vettore isotropo. Vediamo che $\phi|_P$ è non degenere per dimostrare che è un piano iperbolico. Ma per farlo basta considerare $\mathfrak{M}_{\{v,w\}}(\phi|_P) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$ con $a \neq 0$, quindi possiamo dire che il rango di $A$ è due, e quindi la matrice è non degenere e $P$ è piano iperbolico.

*Osservazione* 41. In particolare è vero anche che:

$$V = P \overset{\perp}{\oplus} P^{\perp}$$

e $\phi|_P$ è non degenere.

*Riflessione* 19. Cosa possiamo dire della situazione di $P^{\perp}$? Chiaramente o ci sono vettori isotropi in $P^{\perp}$ o non ce ne sono. Se ce ne sono possiamo iterare il ragionamento e ottenere un'ulteriore somma diretta: spezzare il sottospazio vettoriale che abbiamo in un piano iperbolico e un altro sottospazio vettoriale a lui ortogonale. Alla fine avremo:

$$V = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} P_h \overset{\perp}{\oplus} A$$

In cui $P_i$ è un piano iperbolico e $A$ è un sottospazio senza vettori isotropi, ortogonale alla somma diretta dei piani iperbolici.
Ma questa somma diretta, per il procedimento che abbiamo usato non è per nulla unica: abbiamo casualmente preso vettori isotropi e cercato altri vettori per il completamento a base. Quindi in teoria non sappiamo ancora se il numero di piani iperbolici è fisso.

## Spazi anisotropi

**Definizione 36** (Spazio anisotropo)**.** Sia $\phi \in PS(V)$. $(V,\phi)$ si dice anisotropo se $\nexists v \in V,\ v \neq 0$ *t.c.* $\phi(v,v) = 0$.

**Proposizione 20.** *Sia $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, $\phi \in PS(V)$ non degenere.*

1) *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ abbiamo che $(V,\phi)$ è anisotropo $\Leftrightarrow$ dim $V = 1$.*

2) *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ abbiamo che $(V,\phi)$ è anisotropo $\Leftrightarrow \phi$ è definito.*

**Dimostrazione.** 1) Se $V$ è un $\mathbb{C}$-spazio vettoriale possiamo dire:

'$\Leftarrow$' Ovvio (chiaramente $\phi$ non deve essere il prodotto scalare nullo).

'⇒' Sia per assurdo $dim\ V \geq 2$ e $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$ tale che: $\mathfrak{M}_B(\phi) = I_n$ (esiste per il teorema di Sylvester). Allora $\phi(v_1 + \iota v_2, v_1 + \iota v_2) = 1 - 1 = 0$. Abbiamo quindi trovato un vettore diverso da zero isotropo. Assurdo.

2) Se $V$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale possiamo dire:

'⇐' Per definizione.

'⇒' Ipotizziamo per assurdo che $\phi$ non sia definito. Allora $\exists B = \{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ base di $V$ tale che:

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-p} \end{array}\right)$$

Possiamo vedere facilmente che $\phi(v_1 + v_{p+1}, v_1 + v_{p+1}) = 1 - 1 = 0$

## Forma normale di Witt

*Riflessione* 20. Il teorema di Sylvester ci ha permesso di trovare una forma canonica per i prodotti scalari. La forma normale di Witt è una diversa forma canonica, che ci può tornare utile.

① Sia $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Possiamo individuare due casi:

'$dim\ V = 2m$' Sappiamo che $\exists B = \{v_1, w_1, \ldots, v_m, w_m\}$ base di $V$ tale che $\mathfrak{M}_B(\phi) = I_{2m}$. Sappiamo inoltre che, $\forall i_1^m$,

$$\mathfrak{M}_{\{v_i, w_i\}}\left(\phi\mid_{Span(\{v_i, w_i\})}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inoltre, per le considerazioni fatte prima, possiamo dire che, $\forall i_1^m$, $v_i + \iota w_i$ è isotropo. Quindi $P_j = Span(\{v_j, w_j\})$ è un piano iperbolico, $\forall i_1^m$. La decomposizione di Witt è dunque:

$$V = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} P_m$$

Esiste inoltre una base $S$ di $V$ per la quale

$$\mathfrak{M}_S(\phi) = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \end{pmatrix}$$

Che è detta forma normale di Witt.

'$2 \nmid dim\ V$' Possiamo dire che $\exists B = \{v_1, w_1, \ldots, v_m, w_m, z\}$ base di $V$ tale che $\mathfrak{M}_B(\phi) = I$. Possiamo allora scrivere:

$$V = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} P_m \overset{\perp}{\oplus} Span(\{z\})$$

Ripetendo il ragionamento del punto precedente possiamo dire che $\exists S$ base di $V$ per la quale

$$\mathfrak{M}_S(\phi) = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Chiamiamo questa la forma normale di Witt di un prodotto scalare in uno spazio vettoriale complesso di dimensione dispari.

(2) Vediamo ora il caso in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Possiamo supporre $p = i_+(\phi) \leq i_-(\phi) = n - p$. Allora $\exists B = \{v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{n-p}\}$ tale che:

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-p} \end{array}\right)$$

Definiamo allora $\forall j_1^p,\ P_j = Span\left(\{v_j, w_j\}\right)$ e $A = Span\left(\{w_{p+1}, \ldots, w_{n-p}\}\right)$. Abbiamo allora:

1) $\forall j_1^p,\ P_j$ è un piano iperbolico.
2) $\phi\,|_A$ è definito (negativo).
3) $V = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} P_p \overset{\perp}{\oplus} A$
4) $\exists S$ base di $V$ tale che:

$$\mathfrak{M}_S(\phi) = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} & \\ & & & -I_{n-2p} \end{pmatrix}$$

Questa si dice forma normale di Witt.

**Definizione 37** (Decomposizione di Witt)**.** Se $\phi \in PS(V)$ è non degenere, si chiama decomposizione di Witt di $(V, \phi)$ una decomposizione del tipo:

$$V = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} P_h \overset{\perp}{\oplus} A$$

Nella quale:

- $\forall j_1^h,\ P_j$ è piano iperbolico.
- $(A, \phi)$ è anisotropo.

**Teorema 11.** *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\phi$ è non degenere, $(V, \phi)$ ammette una decomposizione di Witt*

$$V = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} P_m \overset{\perp}{\oplus} A$$

*tale che:*

*1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $dim\ V = 2m$, $\sharp$ piani iperbolici $= m$ e $A = \{0\}$.*

*2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $dim\ V = 2m + 1$, $\sharp$ piani iperbolici $= m$ e $dim\ A = 1$.*

*3) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\sharp$ piani iperbolici $= m = min(i_+(\phi), i_-(\phi))$ e $\phi\ |_A$ è definito.*

Quelle che abbiamo trovato sono delle decomposizioni di Witt, ma chi ci dice che sono uniche? Possiamo dire che il numero dei piani iperbolici è invariante per isometria?

**Definizione 38** (Indice di Witt)**.** Sia $\phi \in PS(V)$ non degenere. Si dice indice di $Witt$ di $(V, \phi)$ il numero naturale:

$$w(\phi) = max\{dim\ W \mid W \text{ è ssv. di } V\ t.c.\ \phi\ |_W = 0\}$$

*Osservazione* 42.

$$w(\phi) = 0 \Leftrightarrow V \text{ è anisotropo}$$

*Osservazione* 43. $w(\phi)$ è invariante per isometria; infatti la restrizione a un trasformato di un sottospazio nel quale la restrizione è nulla, è nulla.

**Proposizione 21.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale reale e $\phi \in PS(V)$ non degenere. Allora:*

$$w(\phi) \leq \frac{dim\ V}{2}$$

**Dimostrazione.** Sia $W$ un ssv. di $V$ tale che $dim\ W = w(\phi)$ e $\phi\ |_W = 0$. Allora $\exists B$ base di $V$ tale che,

$$M = \mathfrak{M}_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline B & C \end{array}\right)$$

Con $C \in \mathcal{M}(n - w(\phi), \mathbb{R})$. Come possiamo vedere $rnk\ M \leq rnk\ A + rnk\ B$, sappiamo però che il prodotto scalare è non degenere, quindi:

$$n = rnk\ M \leq (n - w(\phi)) + (n - w(\phi)) \Rightarrow n \geq 2w(\phi)$$

*Osservazione* 44. Se $V = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} P_h \overset{\perp}{\oplus} A$ è una decomposizione di Witt allora

$$h = \sharp\{\text{Piani iperbolici}\} \leq w(\phi)$$

*Dimostrazione.* Se $\{v_j, w_j\}$ è una base iperbolica di $P_j$ allora $Z = Span(\{v_1, \dots, v_h\})$ è un sottospazio vettoriale tale che:

- $dim\ Z = h$;

- $\phi\mid_Z \equiv 0$.

**Teorema 12.** *Sia $\phi \in PS(V)$ non degenere, $n = dim\ V$. Allora,*

1) *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ allora $w(\phi) = \left[\frac{n}{2}\right]$;*
2) *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ allora $w(\phi) = min\{i_+(\phi), i_-(\phi)\}$.*

**Dimostrazione.** Si tratta di riprendere quanto detto fino a ora:

1) Abbiamo visto che possiamo scrivere:

$$V = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} P_{\left[\frac{n}{2}\right]} \overset{\perp}{\oplus} A$$

Con $dim\ A \leq 1$. Quindi abbiamo:

$$\left[\frac{n}{2}\right] \overset{oss.44}{\leq} w(\phi) \overset{prop.21}{\leq} \frac{n}{2}$$

2) Dimostriamo che, per una qualsiasi decomposizione di Witt di $V$, il numero di piani iperbolici non è variabile. Sia:

$$V = P_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} P_m \overset{\perp}{\oplus} A$$

Una decomposizione di Witt di $V$. Abbiamo, per l'Osservazione 44, che $m \leq w(\phi)$. Supponiamo per assurdo che valga $w(\phi) > m$. Visto che $w(\phi)$ è un massimo, prendiamo $Z$ ssv. di $V$ di dimensione $w(\phi)$ tale che $\phi\mid_Z \equiv 0$.
Sappiamo che $A$ è anisotropo $\Rightarrow \phi\mid_A$ è definito (WLOG è definito negativo). Allora $\exists W$ ssv. di $V$ di dimensione $n - m$ e nel quale $\phi\mid_W$ è definito negativo. Come facciamo a creare questo sottospazio vettoriale?

$$W = A \overset{\perp}{\oplus} N_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} N_m$$

Nel quale ogni $N_i$ è il sottospazio vettoriale di $P_i$ per il quale $\phi\mid_{P_i}$ è definita negativa; questo $N_i$ esiste, infatti $\forall i_1^m$, $\sigma(\phi\mid_{P_i}) = (1, 1, 0)$. Abbiamo quindi che la restrizione di $\phi$ a $W_i$ è definita negativa e ha dimensione $n - m$.
Ma a questo punto abbiamo:

$$dim\ W + dim\ Z = w(\phi) + n - m > n$$

Abbiamo quindi due sottospazi vettoriali che si intersecano, ma questo è assurdo; sia infatti $v \in W \cap Z$ abbiamo allora:

- $\phi(v, v) = 0 \Leftarrow v \in Z$;
- $\phi(v, v) < 0 \Leftarrow v \in W$.

Quindi tutte le decomposizioni di Witt hanno lo stesso numero di piani iperbolici (e noi sappiamo come trovarne una).

**Corollario 19.** *L'indice di Witt da solo non è una lista completa di invarianti, ma ci si avvicina molto; ci basta infatti sapere se $\phi\mid_A$ è definito positivo o negativo.*

# Esercitazione

**Esempio 13.** Sia $\phi \in PS(\mathbb{R}^3)$ il prodotto scalare indotto dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

- Se consideriamo $W = Span(\{e_3\})$ vediamo che $\phi|_W$ è definito negativo $\Rightarrow i_-(\phi) \geq 1$.
- Se consideriamo $Z = Span(\{e_1, e_2\})$ vediamo che $\phi|_Z$ è definito positivo $\Rightarrow i_+(\phi) \geq 2$.
- Da questo possiamo dire che $\sigma(\phi) = (2, 1, 0)$.

*Riflessione* 21. Sia $V = W \oplus W^\perp$ (questo ci dice che $\phi|_W$ è non degenere) e siano $B$ base di $W$ e $C$ base di $W^\perp$. Prendiamo $D = (B, C)$ la base ottenuta dalla concatenazione delle due basi; abbiamo quindi:

$$\mathfrak{M}_D(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{M}_B(\phi|_W) & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{M}_C(\phi|_{W^\perp}) \end{array}\right)$$

Quindi se $B$ e $C$ sono ortogonali lo è anche $D$. Vale quindi anche:

$$\sigma(\phi) = (i_+(\phi|_W) + i_+(\phi|_{W^\perp}), i_-(\phi|_W) + i_-(\phi|_{W^\perp}), i_0(\phi|_W) + i_0(\phi|_{W^\perp}))$$

Cioè:

$$\sigma(\phi) = \sigma(\phi|_W) + \sigma(\phi|_{W^\perp})$$

**Esempio 14.** Prendiamo il solito caso di un prodotto scalare indotto da una matrice. Osserviamo alcuni casi particolari:

1) $A \in \mathcal{M}(1, \mathbb{R})$. Non ci sono molte opzioni possibili:
   - $A \equiv (1)$. E chiaramente $\sigma(\phi) = (1, 0, 0)$.
   - $A \equiv (-1)$. E chiaramente $\sigma(\phi) = (0, 1, 0)$.
   - $A \equiv (0)$. E chiaramente $\sigma(\phi) = (0, 0, 1)$.
2) $A \in \mathcal{M}(1, \mathbb{C})$. Le possibilità sono ancora meno:
   - $A \equiv (1)$.
   - $A \equiv (0)$.
3) $A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{C})$. Abbiamo 3 diversi casi:
   - $A \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Abbiamo comunque dei vettori isotropi: $\left(\begin{smallmatrix} -\iota \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \iota \end{smallmatrix}\right)$; quindi il nostro cono isotropo è:

$$CI(\phi) = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} -\iota \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right) \cup Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \iota \end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$$

- $A \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Il cono isotropo coincide con il radicale.
- $A \equiv \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Tutti i vettori sono isotropi.

Scegliendo quindi opportunamente la base avremo (in ciascuno di questi casi):

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \ \lambda = 0 \Leftrightarrow A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

4) $A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$. Iniziano ad esserci più casi:

   a) Se il rango di $A$ è 2 abbiamo 3 casi:
      - $A \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. In questo caso $\sigma(\phi) = (2, 0, 0)$. Non ci sono vettori isotropi.
      - $A \equiv \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. In questo caso $\sigma(\phi) = (0, 2, 0)$. Non ci sono vettori isotropi.
      - $A \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. In questo caso $\sigma(\phi) = (1, 1, 0)$. Unico caso in cui ci sono vettori isotropi; quindi in $\mathbb{R}^2$ se il rango è 2 ci sono vettori isotropi solamente se $det(A) < 0$.

   b) Se il rango di $A$ è 1 abbiamo 2 casi:
      - $A \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
      - $A \equiv \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

      In entrambi i casi il cono isotropo coincide con il radicale.

c) $A \equiv \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

**Proposizione 22.** *Sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, $\phi \in PS(V)$.*

$$\phi \ semidefinito \Leftrightarrow cono \ isotropo = Rad(\phi)$$

**Dimostrazione.** '$\Rightarrow$' Se il prodotto scalare è semidefinito allora $\exists B$ base di $V$ tale che:

$$A = \mathfrak{M}_B(\phi) = \left(\begin{array}{c|c} \pm I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Abbiamo quindi due casi: $\sigma(\phi) = (k, 0, n-k)$ oppure $\sigma(\phi) = (0, k, n-k)$. In entrambi i casi $Rad(\phi) = Span(\{v_{k+1}, \ldots, v_n\})$. Prendiamo adesso un generico vettore $v \in V$ appartenente al cono isotropo; $[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
Sappiamo, visto che il vettore è isotropo, che $\phi(v, v) = {}^{\tau}[v]_B A [v]_B = 0$ quindi, esplicitando il conto, otteniamo:

$$\pm(x_1^2 + \ldots + x_k^2) = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots = x_k = 0$$

Quindi le prime $k$-componenti del vettore sono sulle e quindi appartiene al radicale.

'$\Leftarrow$' Supponiamo per assurdo che $\phi$ non sia semidefinito, allora $\exists v, w \in V$ *t.c.* $\phi(w, w) < 0 < \phi(v, v)$. Prendiamo quindi $W = Span(\{v, w\})$, abbiamo che $\sigma(\phi |_W) = (1, 1, 0)$. Ma questo è un piano iperbolico, quindi contiene dei vettori isotropi, che però non sono contenuti nel radicale. Assurdo.

**Esempio 15.** Sia $\phi \in PS(\mathbb{R}^4)$ il prodotto scalare associato ad:

$$A = \mathfrak{M}_{Can}(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo $\sigma(\phi)$.

**Svolgimento.** - Troviamo facilmente che $rnk\ A = 3$, quindi $i_0(\phi) = 1$.

- $\phi\mid_{Span(\{e_4\})}$ è definita negativa $\Rightarrow i_-(\phi) \geq 1$.
- $\phi\mid_{Span(\{e_1\})}$ è definita positiva $\Rightarrow i_+(\phi) \geq 1$.
- Non ci aiuta vedere $\phi\mid_W$, con $W = Span(\{e_1, e_4\})$ oppure $W = Span(\{e_2, e_4\})$ oppure $W = Span(\{e_3, e_4\})$; in questi tre casi infatti $W$ è un piano iperbolico, quindi non ci dà informazioni aggiuntive.
- Non ci aiuta nemmeno controllare $\phi\mid_W$, con $W = Span(\{e_2, e_3\})$ oppure $W = Span(\{e_3, e_1\})$ oppure $W = Span(\{e_1, e_2\})$; in questi tre casi infatti $\phi\mid_W$ è degenere, quindi non ci permette di dedurne altre informazioni.
- Sappiamo quindi per ora solo: $\sigma(\phi) = (\geq 1, \geq 1, 1)$.
- Controlliamo a questo punto $W = Span(\{e_1, e_2, e_3\})$. Abbiamo che:

  $$B = \mathfrak{M}_{\{e_1,e_2,e_3\}}(\phi\mid_W) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

  Visto che il determinante di questa matrice è $-9 \neq 0$ abbiamo che $\phi\mid_W$ è non degenere; quindi avremo che $\exists B$ base di $W$ tale che:

  $$D = \mathfrak{M}_B(\phi\mid_W) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

  Senza perdita di generalità possiamo dire: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Quindi tutto si basa su $\lambda_3$, o almeno, sul suo segno. Ma possiamo farci aiutare dal determinante. Infatti il segno del determinante è un invariante per congruenza, e noi sappiamo che il determinante del minore principale di $D$ di ordine 2 ha determinante con segno negativo. Quindi $\lambda_3 < 0 \Leftrightarrow det(B) > 0$, $\lambda_3 > 0 \Leftrightarrow det(B) < 0$. Ma sappiamo che il segno del determinante di $D$ è uguale al segno del determinante di $B$, che è negativo, quindi $\lambda_3 > 0$ e quindi abbiamo:

  $$\sigma(\phi) = (2, 1, 1)$$

*Osservazione* 45. Siano $W \subseteq W' \subseteq V$ degli spazi vettoriali tali che $dim\ W' = dim\ W + 1$. Sia inoltre $\phi\mid_W$ non degenere. Allora la conoscenza di: $\sigma(\phi\mid_W)$ e il segno del determinante di $\phi\mid_{W'}$ ci permettono di capire la segnatura di $\phi\mid_{W'}$. Abbiamo infatti che $\exists B$ base di $W'$ tale che:

$$\mathfrak{M}_B(\phi\mid_{W'}) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{i_+(\phi\mid_W)} & & \\ \hline & -I_{i_-(\phi\mid_W)} & \\ \hline & & \lambda \end{array}\right)$$

Abbiamo quindi tre casi:

- $\lambda = 0 \Leftrightarrow det(\phi\ |_{W'}) = 0 \Leftrightarrow \sigma(\phi) = (i_+(\phi\ |_W), i_-(\phi\ |_W), 1)$.
- $\lambda > 0 \Leftrightarrow sgn(det(\phi\ |_{W'})) = sgn(det(\phi\ |_W)) \Leftrightarrow \sigma(\phi) = (i_+(\phi\ |_W) + 1, i_-(\phi\ |_W), 0)$.
- $\lambda < 0 \Leftrightarrow sgn(det(\phi\ |_{W'})) \neq sgn(det(\phi\ |_W)) \Leftrightarrow \sigma(\phi) = (i_+(\phi\ |_W), i_-(\phi\ |_W) + 1, 0)$.

# Lezione 33

## Teoria

*Riflessione* 22. Abbiamo visto la decomposizione di Witt di uno spazio vettoriale e abbiamo trovato un nuovo valore invariante per isometria: l'indice di Witt. Abbiamo fatto poi delle osservazioni su questo indice che valgono su ogni campo:

- Se il prodotto scalare è non degenere, l'indice di Witt non può essere maggiore di $\left[\frac{n}{2}\right]$.

- Comunque si prenda una decomposizione di Witt il numero dei piani iperbolici non supera l'indice di Witt.

Abbiamo costruito una decomposizione di Witt nei casi complesso e reale a partire da una base di Sylvester.
Ma tutto questo nei casi in cui $\phi$ era non degenere. Cosa succede se $\phi$ è degenere? La definizione dell'indice di Witt sarebbe sempre coerente, vediamo cosa possiamo dire.

**Proposizione 23.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale e $\phi \in PS(V)$.
Se $V = Rad(\phi) \oplus U$ abbiamo:*

$$w\left(\phi\right) = dim\ Rad(\phi) + w\left(\phi\mid_U\right)$$

**Dimostrazione.** Sia $Z$ ssv. di $U$ di dimensione $w\left(\phi\mid_U\right)$ tale che $\phi\mid_Z \equiv 0$. Abbiamo quindi, abbastanza banalmente, che $\phi\mid_{Z\oplus Rad(\phi)} \equiv 0$, quindi $Z \oplus Rad(\phi)$ è un ssv. di $V$ sul quale la restrizione di $\phi$ è nulla. Ma allora:

$$w\left(\phi\right) \geq dim\ Z \oplus Rad(\phi) = dim\ Rad(\phi) + w\left(\phi\mid_U\right)$$

Supponiamo per assurdo $w\left(\phi\right) > dim\ Rad(\phi) + w\left(\phi\mid_U\right)$. Sia $H$ ssv. di $V$ di dimensione $w\left(\phi\right)$ sul quale la restrizione di $\phi$ sia nulla. Abbiamo che $H \cap U$ è un ssv. di $U$ sul quale si annulla $\phi$; abbiamo quindi l'assurdo:

$$\begin{aligned} w\left(\phi\mid_U\right) &\geq dim(H\cap U) = dim\ H + dim\ U - dim\ (H+U) \\ &\overset{hyp.}{>} dim\ Rad(\phi) + w\left(\phi\mid_U\right) + dim\ U - dim(U+H) \\ &= w\left(\phi\mid_U\right) + dim\ V - dim(H+U) \geq w\left(\phi\mid_U\right) \end{aligned}$$

Il che è chiaramente assurdo.

## Teorema di rappresentazione

*Riflessione* 23. Quando si ha un prodotto scalare non degenere questo può essere usato per indurre un endomorfismo o una forma bilineare. Vediamo come.
Sia $\phi \in PS(V)$, visto che in particolare $\phi$ è un'applicazione lineare in ciascuna delle due variabili possiamo fissarne una e avremo comunque un'applicazione lineare. Definiamo quindi:

$$\forall y \in V,\ V \xrightarrow{\phi_y} \mathbb{K}\ t.c.\ \forall x \in V,\ \phi_y(x) \overset{def.}{=} \phi(x, y)$$

Questa applicazione è lineare $\Rightarrow \forall y \in V,\ \phi_y \in V^*$.
Ma questo ci permette (data $\phi \in PS(V)$) di definire un'altra applicazione:

$$V \xrightarrow{F_\phi} V^*\ t.c.\ \forall y \in V,\ F_\phi(y) \overset{def.}{=} \phi_y$$

**Proposizione 24.** *Valgono le seguenti proprietà:*

*1)* $F_\phi$ *è lineare.*

*2)* $Ker\ F_\phi = Rad(\phi)$.

*3)* $Imm\ F_\phi = Ann(Rad(\phi))$.

*4)* $F_\phi$ *è un isomorfismo* $\Leftrightarrow \phi$ *è non degenere.*

**Dimostrazione.** (Andare a vedere le proposizioni fatte sugli annullatori).

1) Dobbiamo chiederci se:

$$\forall y_1, y_2 \in V,\quad F_\phi(y_1 + y_2) = F_\phi(y_1) + F_\phi(y_2)$$

Cioè se $\phi_{y_1+y_2} = \phi_{y_1} + \phi_{y_2}$. Vedifichiamo che, $\forall x \in V$:

$$\begin{aligned}\phi_{y_1+y_2}(x) &= \phi(x, y_1 + y_2) = \phi(x, y_1) + \phi(x, y_2) = \phi_{y_1}(x) + \phi_{y_2}(x)\\ &= (\phi_{y_1} + \phi_{y_2})(x)\end{aligned}$$

2) Possiamo semplicemente scrivere:

$$y \in Ker(F_\phi) \Leftrightarrow \phi_y = 0 \Leftrightarrow \forall x \in V,\ \phi_y(x) = \phi(x, y) = 0 \Leftrightarrow y \in Rad(\phi)$$

3) Vediamo intanto che $Imm\ F_\phi \subseteq Ann(Rad(\phi))$, vogliamo vedere che, $\forall y \in V,\ F_\phi(y) = \phi_y \in Ann(Rad(\phi))$. Questo è vero; infatti, $\forall y \in V$ abbiamo che,

$$\forall x \in Rad(\phi),\ \phi_y(x) = \phi(x, y) = 0$$

Dove l'ultima uguaglianza è data dalla definizione stessa di radicale.
Possiamo concludere la dimostrazione grazie alla formula delle dimensioni:

$$\begin{aligned}dim\ Imm(F_\phi) &= dim\ V - dim\ Ker(F_\phi) = dim\ V - dim\ Rad(\phi)\\ &= dim\ Ann(Rad(\phi))\end{aligned}$$

4) Deriva immediatamente dal punto 3). Visto che è un'applicazione lineare ci basta dimostrare che è iniettiva, ma questo lo sappiamo visto che il nucleo è il radicale e il prodotto scalare è non degenere. Inoltre vale anche il contrario, visto che il radicale è uguale al $Ker$ dell'applicazione lineare che è $\{0\}$ se l'applicazione è un isomorfismo.

**Definizione 39** ($\phi$-rappresentabilità)**.** Sia $\phi \in PS(V)$; $g \in V^*$ è detto $\phi$-rappresentabile se $g \in Imm(F_\phi)$.

*Osservazione* 46. Sia $\phi \in PS(V)$ e $g \in V^*$.

$$g \in Imm(F_\phi) \Leftrightarrow \exists y \in V \ t.c. \ g = F_\phi(y) \Leftrightarrow \exists y \in V \ t.c., \forall x \in V, \ g(x) = \phi(x, y)$$

**Teorema 13** (Teorema di rappresentazione di Riesz)**.** *Se $\phi$ è non degenere, ogni $g \in V^*$ è $\phi$-rappresentabile (in modo unico):*

$$\exists! \ y \in V \ t.c., \ \forall x \in V, \ g(x) = \phi(x, y)$$

**Dimostrazione.** Abbiamo già dimostrato che se $\phi$ è non degenere allora $F_\phi$ è isomorfismo, quindi in particolare è surgettiva (dimostra l'esistenza). Inoltre l'unicità è data dall'iniettività.

*Osservazione* 47. Sia $W^*$ un fissato ssv. di $V^*$ e $\phi \in PS(V)$. $W^*$ coincide con l'insieme dei funzionali $\phi$ rappresentabili se e solo se coincide con l'annullatore del radicale di $\phi$. Ma in particolare ogni $W^*$ può essere visto come annullatore di un particolare insieme: non è difficile identificare l'insieme (o lo spazio vettoriale) di cui $W^*$ è annullatore (è annullatore dello span dei vettori a lui complementari). Dunque se $W^* = Ann(S)$ allora $W^* = Imm(F_\phi) \Leftrightarrow S = Rad(\phi)$.

**Proposizione 25.** *Sia $U$ ssv. di $V$. Se $\phi \in PS(V)$ non è degenere allora*

$$F_\phi\left(U^\perp\right) = Ann\ U$$

*Se $n = dim\ V$ e $k = dim\ U$ sappiamo che $dim\ Ann(U) = n-k$; inoltre abbiamo che, visto che $\phi$ è non degenere, anche $dim\ U^\perp = n - k$. Quindi, anche senza questa proposizione, potevamo dire che i due spazi vettoriali sono isomorfi. Ma questa proposizione ci esplicita un'uguaglianza, lega profondamente la struttura dei funzionali e quella del prodotto scalare.*

**Dimostrazione.** Basta un'inclusione.

$$F_\phi\left(U^\perp\right) \subseteq Ann\ U$$

Cioè vogliamo dimostrare che, $\forall y \in U^\perp$, abbiamo $F_\phi(y) = \phi_y \in Ann(U)$, quindi che:

$$\forall u \in U, \ \phi_y(u) = \phi(u, y) = 0$$

*Riflessione* 24. Sia $\phi \in PS(V)$. $\forall g \in End(V)$ definiamo

$$V \times V \xrightarrow{\psi_\phi(g)} \mathbb{K} \ t.c \ \psi_\phi(g)(x, y) = \phi(x, g(y))$$

Questa applicazione è bilineare, infatti, per ogni variabile, è composizione di applicazioni lineari. Inoltre è ben definita:

$$End(V) \xrightarrow{\psi_\phi} Bil(V)$$

Che associa ad ogni endomorfismo la forma bilineare che abbiamo osservato ora.

**Proposizione 26.** *Se $\phi$ è non degenere, $\psi_\phi$ è un isomorfismo.*

**Dimostrazione.** Vediamo per punti:

- $\psi_\phi$ è lineare. (Esercizio).
- $\psi_\phi$ è iniettiva:

$$g \in Ker(\psi_\phi) \Rightarrow \psi_\phi(g) = 0 \Rightarrow \forall x, y \in V,\ \psi_\phi(g)(x, y) = \phi(x, g(y)) = 0$$

  Utilizzando il fatto che vale $\forall x$ vediamo che deve essere: $\forall y,\ g(y) = 0 \Rightarrow g = 0$.
- $dim\ End(V) = dim\ Bil(V) = n^2$.

**Corollario 20.** *Se $\phi$ è non degenere, $\forall b \in Bil(V)$, $b$ è rappresentabile in modo unico per mezzo di un endomorfismo di $V$.*

*Riflessione* 25. Sia $\phi \in PS(V)$ un prodotto scalare non degenere e $f \in End(V)$. Consideriamo $b \in Bil(V)$, *t.c.*, $\forall x, y \in V$, $b(x, y) = \phi(f(x), y)$. Per il corollario appena visto $\exists!\ g \in End(V)$ *t.c.* $b = \psi_\phi(g)$; ossia

$$\exists!\ g \in End(V)\ t.c.,\ \forall x, y \in V,\ \phi(f(x), y) = \phi(x, g(y))$$

Questo $g$, indidivuato univocamente da $f$, viene indicato con la notazione $f^*$.

**Definizione 40** (Aggiunta)**.** Sia $\phi \in PS(V)$ prodotto scalare non degenere. $f^*$ è detta aggiunta di $f$ rispetto a $\phi$. Su dicono autoaggiunti gli endomorfismi $f \in End(V)$ tali che $f = f^*$. Abbiamo dunque:

$$\forall x, y \in V,\ \phi(f(x), y) = \phi(x, f^*(y))$$

*Osservazione* 48. ??????????

**Proposizione 27.** *1) $f^*$ è lineare.*

*2) $f^{**} = f$ (involuzione).*

*3) $Ker(f^*) = (Imm\ f)^\perp$.*

*4) $Imm(f^*) = (Ker f)^\perp$*

*5) Se $B$ è base di $V$, $A = \mathfrak{M}_B(f)$, $A^* = \mathfrak{M}_B(f^*)$ e $M = \mathfrak{M}_B(\phi)$ allora valgono:*

$$A^* = M^{-1}\,{}^\tau AM \quad e \quad A^* \sim {}^\tau A$$

**Dimostrazione.** Possiamo utilizzare unicamente la definizione di aggiunta.

1) $\forall x, y_1, y_2 \in V$ abbiamo:

$$\begin{aligned}\phi(x, f^*(y_1 + y_2)) &= \phi(f(x), y_1 + y_2) = \phi(f(x), y_1) + \phi(f(x), y_2)\\ &= \phi(x, f^*(y_1)) + \phi(x, f^*(y_2)) = \phi(x, f^*(y_1) + f^*(y_2))\end{aligned}$$

Poichè vale $\forall x \in V$ e $\phi$ è non degenere, abbiamo che $f^*(y_1 + y_2) = f^*(y_1) + f^*(y_2) \forall y_1, y_2$.

2) $\forall x, y \in V$:

$$\begin{aligned}\phi(f(x), y) &= \phi(x, f^*(y)) = \phi(f^*(y), x) = \phi(y, f^{**}(x))\\ &= \phi(f^{**}(x), y) \Rightarrow \forall x \in V f(x) = f^{**}(x) \Rightarrow f = f^{**}\end{aligned}$$

3) '$\subseteq$' Sia $x \in Ker\ f^*$, vale allora che:

$$\forall y \in V,\ \phi(f(y), x) = \phi(y, f^*(x)) = \phi(y, 0) = 0 \Rightarrow x \in (Imm\ f)^\perp$$

'$\supseteq$' Sia $x \in (Imm\ f)^\perp$, $\forall y \in V$,

$$\phi(y, f^*(x)) = \phi(f(y), x) = 0 \Rightarrow f^*(x) = 0 \Rightarrow x \in Ker\ f^*$$

4) Deriva dalla 3) utilizzata su $f^*$.

5) Abbiamo che, $\forall v, w,\ \phi(f(v), w) = \phi(v, f^*(w))$. Abbiamo quindi:

$$^\tau[v]_B\, {}^\tau AM\, [w]_B = {}^\tau[v]_B MA^*Y$$

Visto che vale il per ogni abbiamo:

$$^\tau AM = MA^* \Rightarrow A^* = M^{-1}\, {}^\tau AM$$

$M$ è la matrice associata al prodotto scalare, esiste quindi una base ortonormale per $M$; abbiamo quindi che, in quella base, la matrice associata a $\phi$ è l'identità. Scegliendo opportunamente la base abbiamo quindi:

$$A^* = {}^\tau A$$

*Osservazione* 49.

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{\ {}^\tau f\ } & V^* \\ {\scriptstyle F_\phi}\big\uparrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F_\phi^{-1}} \\ V & \xrightarrow{\ f^*\ } & V \end{array}$$

Ricordandoci dell'applicazione trasposta che avevamo definito parlando dello spazio duale possiamo vedere che abbiamo:

$$F_\phi \circ f^* = {}^\tau\phi \circ F_\phi$$

Si ritrovano quindi $Imm\ f^*$ e $Ker\ f^*$ da $Ker\ {}^\tau f$ e $Imm\ {}^\tau f$. Infatti:

$$Ker\ f^* = Ker\left(F_\phi^{-1} \circ {}^\tau f \circ F_\phi\right) = F^{-1}\left(Ker\ {}^\tau f\right) = F^{-1}(Ann(Imm\, f)) = Imm\, f^\perp$$

## Spazi euclidei

**Definizione 41** (Spazio euclideo)**.** Sia $V$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e $\phi \in PS(V)$. Allora $(V, \phi)$ è uno spazio euclideo se $\phi$ è definito positivo.
Cioè uno spazio euclideo è uno spazio vettoriale reale dotato di un prodotto scalare definito positivo.

**Esempio 16.** - $\mathbb{R}^n$ con il prodotto scalare standard ($\phi(X, Y) = {}^\tau XY$).

- $\mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ con $\phi(A, B) = tr({}^\tau AB)$.

**Definizione 42** (Norma)**.** Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo. La funzione $V \xrightarrow{\|\ \|} \mathbb{R}$ che associa ad ogni vettore di $v$ lo scalare $\|v\| = \sqrt{\phi(v, v)}$ è detta norma.

**Proposizione 28.** *Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo. Allora valgono le seguenti proprietà:*

*1)* $\forall v \in V,\ \|v\| \geq 0$. *Inoltre* $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

*2)* $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall v \in V,\ \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

*3) Disuguaglianza di Schwarz:* $\forall v, w \in V$,

$$|\phi(v, w)| \leq \|v\|\ \|w\|$$

*4) Disuguaglianza triangolare:* $\forall v, w \in V$,

$$|v + w| \leq \|v\| + \|w\|$$

**Dimostrazione.** 1) ?????

2) ?????

3) Distinguiamo banalmente due casi:

- $v = 0 \ \vee\ w = 0$. In questa caso chiaramente vale la disuguaglianza.
- $v$ e $w$ entrambi non nulli:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \phi(tv + w, tv + w) \geq 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R},\ t^2\phi(v, v) + 2t\phi(v, w) + \phi(w, w) \geq 0$$

Abbiamo quindi che il discriminante di $t^2\phi(v, v) + 2t\phi(v, w) + \phi(w, w)$ è $\leq 0$, cioé:

$$\phi(v, w)^2 - \phi(v, v)\phi(w, w) \leq 0 \Leftrightarrow \phi(v, w)^2 \leq \|v\|^2\ \|w\|^2$$

4) Segue direttamente dal punto 3).

# Esercitazione

*Osservazione* 50. Sia $V$ uno spazio vettoriale, $\phi \in PS(V)$ e $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortogonale di $V$. Sappiamo (per la definizione di base) che

$$\forall v \in V,\ v = \sum_1^n \alpha_i v_i$$

Ma quindi, per la bilinearità di $\phi$ possiamo dire:

$$\phi(v, v_i) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi(v_j, v_i) = \alpha_i \phi(v_i, v_i)$$

Quindi, se $v_i$ è non isotropo (se non appartiene al radicale) abbiamo che:

$$\alpha_i = \frac{\phi(v, v_i)}{\phi(v_i, v_i)}$$

**Esempio 17.** Sia $V = \mathbb{R}_3[x]$ e $\forall p, q \in V$ abbiamo:

$$\phi(p,q) = \dddot{p}(0)\dddot{q}(0) - \ddot{p}(0)\ddot{p}(0) + \dot{p}(0)\dot{q}(0) - p(0)q(0)$$

Prendendo $B = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ abbiamo:

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -4 & \\ & & & 36 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi che $B$ è una base ortogonale e $\phi$ è non degenere con segnatura $\sigma(\phi) = (2,2,0)$. Prendiamo ora $q = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3$, vediamo che:

- $\phi(q,1) = -1$.
- $\phi(q,x) = 2$.
- $\phi(q,x^2) = -12$.
- $\phi(q,x^3) = 144$.

Abbiamo inoltre che $\phi\mid_{\{1,x\}}$ è non degenere con segnatura $(1,1,0) \Rightarrow H_1 = Span\left(\{1,x\}\right)$ è un piano iperbolico, esattamente come $H_2 Span\left(\left\{x^2, x^3\right\}\right)$. Quindi:

$$V = H_1 \overset{\perp}{\oplus} H_2$$

È una decomposizione di Witt di $V$.
Vediamo adesso come trovare un sottospazio $W$ di dimensione massima per il quale $\phi\mid_W$ sia nulla; cioè un sottospazio di dimensione $w(\phi)$ nel quale la restrizione sia nulla. Chiaramente, se ci fosse un radicale non banale, subito lo aggiungeremmo. Ma in questo caso il radicale è il solo vettore nullo. Allora quello che facciamo è cercare vettori isotropi in sottospazi tra di loro ortogonali; per esempio:

$$\mathfrak{M}_{\{1,x\}}(\phi\mid_{H_1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per trovare il vettore isotropo di questo piano iperbolico devo imporre:

$$H_1 \ni v_1 = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right) \ isotropo \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta$$

Quindi abbiamo due rette isotrope, ugualmente in $H_2$:

$$H_2 \ni v_2 = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right) \ isotropo \Leftrightarrow \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 36 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 + 36\beta^2 = 0$$

Quindi $v_1 = x + 1, v_2 = 3x^2 + x^3$. Abbiamo quindi:

- $W = Span\left(\left\{1 + x, 3x^2 + x^3\right\}\right)$ è tale che $\phi\mid_W = 0$ (realizza l'indice di nullità).
- $W = Span\left(\left\{x, x^3\right\}\right)$ è tale che $\phi\mid_W$ è definito positivo (realizza l'indice di positività).
- $W = Span\left(\left\{1, x^2\right\}\right)$ è tale che $\phi\mid_W$ è definito negativo (realizza l'indice di negatività).

*Osservazione* 51. Dato uno spazio vettoriale $V$ e un prodotto scalare $\phi$ definito su di esso chiamiamo decomposizione di Witt di $V$ una scrittura del tipo:

$$V = H_1 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} H_k \overset{\perp}{\oplus} W \overset{\perp}{\oplus} Rad(\phi)$$

Nella quale:

- $H_1, \dots, H_k$ sono piani iperbolici.
- $W$ è anisotropo.

Dato un certo *phi* tutte le decomposizioni di Witt hanno lo stesso numero di piano iperbolici. In particolare in uno spazio vettoriale complesso avremo anche che $dim\ W \leq 1$, infatti non esistono sottospazi di dimensione 2 anisotropi in uno spazio vettoriale complesso (nei quali la restrizione di $\phi$ sia diversa da 0). Per indice di Witt invece abbiamo definito:

$$w(\phi) = \max\{dim\ W \mid W\ ssv.\ di\ V\ e\ \phi\mid_W \equiv 0\}$$

In particolare abbiamo:

$$w(\phi) = k + dim\ Rad(\phi)$$

*Osservazione* 52. Con la notazione dell'Osservazione precedente. Se $H$ è un piano isotropo allora esiste una decomposizione di Witt tale che:

$$V = H \overset{\perp}{\oplus} H_2 \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} H_k \overset{\perp}{\oplus} W \overset{\perp}{\oplus} Rad(\phi)$$

Infatti $\phi\mid_H$ è non degenere $\Rightarrow V = H \oplus H^\perp$, e possiamo iterare il ragionamento su $H^\perp$.

**Esempio 18.** Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $\phi \in PS(V)$ tale che $\forall X, Y \in V,\ \phi(X,Y) = {}^{\tau}XAY$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo la segnatura.

**Svolgimento.** Vediamo facilmente che il determinante è diverso da zero, quindi $\phi$ è non degenere. Vediamo inoltre immediatamente che c'è un vettore isotropo, quindi c'è un piano iperbolico e la decomposizione di Witt di $V$ è:

$$V = H \overset{\perp}{\oplus} W$$

Vediamo che possiamo prendere $H = Span(\{e_1, e_2\})$; dovremo prendere di conseguenza $W$. Ma forse non è necessario; sappiamo infatti che $\phi\mid_W$ è definito; abbiamo quindi due possibilità:

- $\phi\mid_W$ definito positivo $\Leftrightarrow \sigma(\phi) = (2,1,0)$.
- $\phi\mid_W$ definito negativo $\Leftrightarrow \sigma(\phi) = (1,2,0)$.

Ma sappiamo anche che:

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Ma il determinante di $A$ è negativo, e il segno del determinante non varia; Abbiamo quindi che $\phi\mid_W$ è definito positivo e che quindi $\sigma(\phi) = (2,1,0)$.

# Lezione 34

## Teoria

**Definizione 43** (Distanza)**.** Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo. Un'applicazione $V \times V \xrightarrow{d} \mathbb{R}$ si dice distanza se:

1) $\forall x, y \in V,\ d(x, y) \geq 0;$
2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
3) $\forall x, y \in V,\ d(x, y) = d(y, x);$
4) $\forall x, y, z \in V,\ d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

**Teorema 14** (di Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt)**.** *Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo. $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$. Allora $\exists C = \{z_1, \ldots, z_n\}$ base di $V$ tale che:*

- *$C$ è ortonormale.*
- *$\forall i_1^n,\ Span(\{v_1, \ldots, v_i\}) = Span(\{z_1, \ldots, z_i\})$.*

**Dimostrazione.** Dimostrando il teorema cerchiamo un metodo più veloce dell'algoritmo di Lagrange per ortogonalizzare una base. Infatti abbiamo come ipotesi che il prodotto scalare sia definito positivo e questo ci è di vantaggio: il radicale è banale e quindi non dobbiamo temere diverse cose. Quindi quello che stiamo cercando è una ottimizzazione della trasformazione di basi di Lagrange. Questo ci è possibile per il fatto che con l'algoritmo di Lagrange dovevamo sempre cercare dei nuovi vettori non isotropi, in questo caso invece questo non serve: per definizione nello spazio vettoriale che stiamo considerando non abbiamo vettori isotropi e quindi possiamo fare molte meno verifiche.
Vediamo questo algoritmo:

- $w_1 = v_1$.
- $w_2 = v_2 - \frac{\phi(v_2, w_1)}{\phi(w_1, w_1)} w_1$. Questi primi due passaggi sono uguali all'algoritmo di Lagrange. Verifichiamo comunque che:
  - $\phi(w_1, w_2) = 0;$
  - $Span(\{v_1, v_2\}) = Span(\{w_1, w_2\})$.

Quello che possiamo fare ora (perché non ci sono vettori isotropi) e che non potevamo fare con Lagrange è semplicemente togliere ad ogni vettore della base la sua proiezione sullo Span dei vettori che lo precedono. Vediamo quindi il caso particolare di $w_3$ e poi generalizziamo:

- Cerchiamo $w_3$ tale che:
  - $\phi(w_1, w_3) = \phi(w_2, w_3) = 0$;
  - $Span(\{v_1, v_2, v_3\}) = Span(\{w_1, w_2, w_3\})$.

  Possiamo sottrarre a $v_3$ la sua proiezione ortogonale su $Span(\{w_1, w_2\}) = W_2$. Vediamo quindi questa proiezione ortogonale su $W_2$:

$$V \xrightarrow{\pi_{W_2}} W_2 \ t.c.\ \forall x \in V,\ \pi_{W_2}(x) = \frac{\phi(x, w_1)}{\phi w_1, w_1} w_1 + \frac{\phi(x, w_2)}{\phi w_2, w_2} w_2$$

  Quindi prendiamo come nostro $w_3$ il vettore $w_3 = v_3 - \pi_{W_2}(v_3)$.
  Possiamo verificare facilmente (per esempio con la matrice di cambio di base, che verrà una triangolare superiore con degli 1 nella diagonale) che valgono le due proprietà che avevamo richiesto.

Generalizziamo adesso questo procedimento a tutti i vettori della base:

- Per ogni vettore $v_j$ della base:

$$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\phi(v_j, w_i)}{\phi(w_i, w_i)} w_i$$

- Abbiamo ottenuto una base ortogonale, adesso pensiamo a renderla ortonormale. $\forall i_1^n$ prendiamo:

$$z_i = \frac{w_i}{\|w_i\|}$$

Possiamo osservare che questa è una base ortonormale.

**Corollario 21.** *Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo e $f \in End(V)$ un endomorfismo triangolabile. Allora $\exists B$ base di $V$ a bandiera per $f$ e ortonormale per $\phi$.*

**Dimostrazione.** Sia $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base a bandiera per $f$; per il teorema di Gram-Schmidt $\exists B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base di $V$ tale che:

- $B$ è ortonormale.
- $\forall i_1^n,\ Span(\{v_1, \ldots, v_i\}) = Span(\{w_1, \ldots, w_i\})$.

E $B$ è la base cercata.

## Isometrie di uno spazio euclideo

*Osservazione* 53. Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo e $f \in End(V)$. Allora se $\forall x, y \in V,\ \phi(f(x), f(y)) = \phi(x, y)$ abbiamo che $f$ è isometria.

*Dimostrazione.* Per definizione di isometria ci serve solo dimostrare che $f$ è isomorfismo. Ma abbiamo che $x \in Ker\ f \Rightarrow \phi(x, x) = \phi(f(x), f(x)) = 0 \Rightarrow x = 0$. Infatti l'unico vettore isotropo in uno spazio euvlideo è il vettore nullo.

**Teorema 15.** *Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo e $V \xrightarrow{f} V$ un'applicazione. Allora sono fatti equivalenti:*

① *$f \in O(V, \phi)$ ($f$ è isometria).*

② *$f \in End(V)$ e $\forall v \in V,\ \|f(v)\| = \|v\|$.*

③ *$f(0) = 0$ e $\forall x, y \in V,\ d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.*

④ *$f \in End(V)$ e $\forall B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di $V$ ortonormale, $C = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è base ortonormale.*

⑤ *$f \in End(V)$ e $\exists B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base di $V$ ortonormale tale che, $C = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ è base ortonormale.*

⑥ *$f \in End(V)$ e $f \circ f^* = id$*

**Dimostrazione.** Chiaramente si deve far vedere che valgono entrambe le freccie di implicazione tra ogni punto.

①⇒ ② Abbastanza ovvia:

$$\|f(v)\|^2 = \phi(f(v), f(v)) = \phi(v, v) = \|v\|^2$$

②⇒ ① Possiamo usare la formula di polarizzazione:

$$\begin{aligned}
2\phi(v, w) &= \phi(v + w, v + w) - \phi(v, v) - \phi(w, w) \\
&= \phi(f(v + w), f(v + w)) - \phi(f(v), f(v)) - \phi(f(w), f(w)) \\
&= \phi(f(v) + f(w), f(v) + f(w)) - \phi(f(v), f(v)) - \phi(f(w), f(w)) \\
&= 2\phi(f(v), f(w))
\end{aligned}$$

②⇒ ③ Possiamo scrivere:

$$d(f(x), f(y)) = \|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y)$$

③⇒ ① Particolarmente difficile: non sappiamo per ipotesi che $f$ è lineare. Conviene dividere la dimostrazione in più punti:

- $f$ conserva la norma.

  $$\|f(x)\| = \|f(x) - 0\| = \|f(x) - f(0)\| = d(f(x), f(0)) = d(f(x), 0) = \|x\|$$

- $f$ conserva il prodotto scalare: abbiamo per ipotesi che $\forall x, y \in V,\ \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$; elevando al quadrato otteniamo:

  $$\phi(x - y, x - y) = \phi(f(x) - f(y), f(x) - f(y)) = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2\phi(f(x), f(y))$$

  Ma abbiamo dimostrato che $f$ conserva la norma; per cui:

  $$\forall x, y \in V,\ \phi(f(x), f(y)) = \phi(x, y)$$

  Sia $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale di $V$. Consideriamo allora $C = \{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$; certamente questi vettori sono a due a due ortonormali; infatti abbiamo visto che $f$ conserva il prodotto scalare.

Abbiamo quindi un insieme ortonormale che non sappiamo ancora essere una base. Mostriamo che questi vettori sono indipendenti:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(v_i) = 0 \Rightarrow \forall j_1^n,\ \phi\left(\sum_{1}^{n} \alpha_i f(v_i), f(v_j)\right) = 0$$

Ma sappiamo che $\phi$ è bilineare e che i vettori sono a due a due ortogonali, quindi se $i \neq j$ abbiamo $\phi(v_i, v_j) = 0$, quindi anche $\phi(f(v_i), f(v_j))$. Quindi:

$$a_j \phi(f(v_j), f(v_j)) = \alpha_j = 0$$

Quindi i vettori sono linearmente indipendenti, quindi, per questioni dimensionali, sono una base.

- Vediamo come ultima cosa che l'applicazione è lineare:

$$\forall v \in V,\ v = \sum_{1}^{n} x_i v_i$$

Ma $x_i = \phi(v, v_i)$ è il coefficiente di Fourier, infatti abbiamo una base ortonormale, quindi $\forall i_1^n,\ \phi(v_i, v_i) = 1$. Quindi:

$$f(v) = \sum_{1}^{n} \phi(f(v), f(v_i)) f(v_i) = \sum_{1}^{n} x_i f(v_i)$$

Dove l'ultima uguaglianza è data dal fatto che $f$ conserva il prodotto scalare e $\phi(v, v_i) = \phi(f(v), f(v_i))$.

Da questo possiamo dire che $f$ è lineare e, visto che trasforma basi in basi, è anche un isomorfismo.

1 $\Rightarrow$ 4 Ovvio.

4 $\Rightarrow$ 5 Ovvio.

5 $\Rightarrow$ 1 Sia $B$ la base che ci fornisce l'ipotesi. Siano $v, w \in V,\ v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i,\ w = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$. Allora abbiamo:

$$\begin{aligned}
\phi(f(v), f(w)) &= \phi\left(f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i v_i\right), f\left(\sum_{j=1}^{n} y_i v_i\right)\right) \\
&= \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i), \sum_{j=1}^{n} y_j f(w_j)\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \phi(f(v_i), f(v_j)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \overset{B\ ort.}{=} \phi(v, w)
\end{aligned}$$

6 $\Leftrightarrow$ 1

$$\begin{aligned}
f \in O(V, \phi) \Leftrightarrow \forall x, y \in V,\ \phi(x, y) &= \phi(f(x), f(y)) \\
&= \phi(x, f^*(f(y))) \Leftrightarrow f^* \circ f = id
\end{aligned}$$

# Esercitazione

**Esercizio 25.** Su $\mathbb{R}^3$ costruiamo, se esiste, un prodotto scalare $\phi$ semidefinito tale che:

a) $\phi(e_1, e_1) = 1$.

b) $\phi(e_2 + e_3, e_2 + e_3) = 3$.

c) $Span(\{v_1, v_2\})^\perp = Span(\{v_2, v_3\})$ con:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Svolgimento.** Certamente, se esiste, $\phi$ è semidefinito positivo.

> Con i prodotto scalari costruire è molto simile a dire esiste: infatti il prodotto scalare restituisce uno scalare e non un vettore; quindi quello che facevamo con gli endomorfismi (trovare la matrice associata in una base e poi trovare una formula generale per ogni vettore in base alle sue coordinate in una base standard) qui non serve: non ci sono coordinate da considerare in $\phi(v, w)$. Basta quindi produrre $\mathfrak{M}_B(\phi)$ per una qualche base $B$.

Vediamo a cosa ci portano le ipotesi; possiamo studiare la matrice associata nella base canonica oppure scegliere come base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Scegliamo questa seconda opzione e vediamo che, per la terza ipotesi, abbiamo:

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Matrice decisamente pratica. Vediamo ora di determinare $a$ e $b$ (ricordandoci che $v_2 \in Rad(\phi) \Rightarrow \phi(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = \phi(v_1, v_1)$.

$$v_1 + v_2 = 2e_1 \Rightarrow \phi(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = \phi(2e_1, 2e_1) = 4 \Rightarrow a = 4$$

Stessa cosa possiamo dire per $b$, infatti, sapendo che $e_2 + e_3 = v_1 + v_2 + v_3$ possiamo dire:

$$\begin{aligned}\phi(e_2 + e_3, e_2 + e_3) = \phi(v_1 + v_2 + v_3, v_1 + v_2 + v_3) &\overset{v_2 \in Rad}{=} \phi(v_1 + v_3, v_1 + v_3) \\ &= 4 + 2\phi(v_1, v_3) + \phi(v_3, v_3) \Rightarrow \phi(v_3, v_3) = -1 = b\end{aligned}$$

Quindi la risposta è: esiste una $\phi$ con le tre caratteristiche richieste ma non è semidefinita.

**Esercizio 26.** Sia $V = \mathbb{R}^3$, $\phi \in PS(V)$ tale che $\forall X, Y \in R^3,\ \phi(X, Y) = {}^\tau XAY$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sia inoltre $f \in V^*$ tale che $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V,\ f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + y - 2z$.
Possiamo vedere che $\sigma(\phi) = (1, 2, 0)$ infatti:

- $Rad(\phi) = Ker\ A = \{0\}$.
- $\sigma(\phi\ |_{Span(\{e_1\})}) = (1,0,0) \Rightarrow i_+(\phi) \geq 1$.
- $\sigma(\phi\ |_{Span(\{e_3\})}) = (0,1,0) \Rightarrow i_-(\phi) \geq 1$.
- Ci è sufficiente sapere che $det(A) = 5$ per determinare la segnatura di $\phi$.

Quindi ogni funzionale è $\phi$-rappresentabile. Cerchiamo di trovare come $f$ è $\phi$-rappresentabile. Vediamo tre modi diversi:

1. Cerchiamo il vettore $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ tale che:

$$\forall \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in V,\ f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = \phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \end{smallmatrix}\right) A \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$$

Facciamo quindi variare $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ sulla base canonica e vediamo cosa dobbiamo avere:

-
$$\phi\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)\right) = A_1 \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) = f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1$$

-
$$\phi\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)\right) = A_2 \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) = f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1$$

-
$$\phi\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)\right) = A_3 \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) = f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = -2$$

Quindi $\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ funziona $\Leftrightarrow A\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \Leftarrow \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) = A^{-1}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Usando la base canonica otteniamo un sistema che potrebbe essere lungo da risolvere; potremmo quindi cercare una base ortogonale e vedere cosa succede; prendiamo innanzitutto $v_1 = e_1$ e poi vediamo l'ortogonale:

$$Span\left(\{e_1\}\right)^{\perp} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \middle|\ x + 2y + z = 0\right\} \supseteq Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$$

Scegliamo quindi questo vettore come secondo vettore della base e rifacciamo l'ortogonale:

$$Span\left(\{v_1, v_2\}\right)^{\perp} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \middle|\ \left\{\left(\begin{smallmatrix} x+2y-z=0 \\ y-2z=0 \end{smallmatrix}\right)\right.\right\} = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$$

Prendiamo quindi la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ e vediamo:

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Imponiamo quindi:

- $\phi(v, v_1) = f(v_1) = 1$.

- $\phi(v, v_2) = f(v_2) = -1.$
- $\phi(v, v_2) = f(v_3) = -3.$

E quindi, se $v = av_1 + bv_2 + cv_3$ possiamo scrivere (per come abbiamo visto che si ricava il coefficiente di Fourier):

$$v = 1v_1 + \frac{1}{2}v_2 + \frac{3}{10}v_3$$

③ Sappiamo che $\exists v \in V$ $t.c.$, $\forall w \in V,\ f(w) = \phi(v, w)$. Possiamo sfruttare il fatto che il $Ker$ di un funzionale ha una dimensione molto grande; quindi $v \in Ker\ f^{\perp} \Rightarrow v$ appartiene ad una certa retta. Quindi:

$$Ker\ f = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \middle| \ x + y - 2z = 0 \right\} = Span \left( \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\} \right)$$

Cerchiamo l'ortogonale al nucleo:

$$Ker\ f^{\perp} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \middle| \ (\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 1 \end{smallmatrix})\, A \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = 0 = (\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix})\, A \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \right\} = Span \left( \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{smallmatrix}\right) \right\} \right)$$

Ora dobbiamo capire quale vettore esatto è quello giusto; per farlo imponiamo

$$f(w) = \phi\left( \lambda \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{4}{3} \end{smallmatrix}\right), w \right)$$

Per un qualche vettore fuori dal nucleo e otteniamo il risultato esatto.

*Riflessione* 26. Sia $V = \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$; e siano: $\forall A, B \in V,\ \phi(A, B) = tr(A, B);\ \phi_1(A, B) = tr(A\,{}^{\tau}B)$.
Vediamo cosa riusciamo a dire della segnatura di $\phi$ e $\phi_1$.

- Per prima cosa esaminiamo $\phi_1$ e vediamo se ci sono vettori isotropi; sappiamo che

$$\phi_1(A, A) = tr(A, {}^{\tau}A) = \sum_{i,j} [A]_{ij}^2 \geq 0;\ \phi_1(A, A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

  Vediamo quindi che $\phi_1$ è definito positivo.

- Cerchiamo di stimare $\sigma(\phi)$; vediamo facilmente (possiamo dirlo per il punto appena visto) che $\phi\ |_{S_n}$ è definito positivo, infatti per le matrici simmetriche ${}^{\tau}S = S$; quindi ci ricondurremmo a $\phi_1$ e abbiamo visto che è definito positivo. Quindi $i_+(\phi) \geq \frac{n(n+1)}{2}$.

- Vediamo allo stesso modo, utilizzando la linearità di $\phi$, che $\phi\ |_{A(n)}$ è definito negativo, infatti, per le antisimmetriche, vediamo che ${}^{\tau}A = -A$. Quindi $i_-(\phi) \geq \frac{n(n-1)}{2}$.

- Ma a questo punto abbiamo finito:

$$\sigma(\phi) = \left( \frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2}, 0 \right)$$

# Lezione 35

## Teoria

Non abbiamo ancora visto un modo esplicito e veloce per individuare se un isomorfismo è un'isometria; soprattutto (come abbiamo fatto fino ad ora) ci piacerebbe riuscirlo a capire dalla matrice associata in qualche base (abbiamo infatti sempre cercato di esaminare le matrici, più facili da gestire e decisamente pratiche). Proviamo quindi a riconoscere le isometrie.

**Proposizione 29.** *Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo, $B$ una base ortonormale di $\phi$ e $f \in End(V)$. Sia inoltre $A = \mathfrak{M}_B(f)$. Allora*

$$f \in O(V, \phi) \Leftrightarrow {}^{\tau}AA = I$$

**Dimostrazione.** Siano $v, w \in V$ dei generici vettori e $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $X = [v]_B$, $Y = [w]_B$.
Visto che $B$ è ortonormale possiamo scrivere:

$$\phi(f(v), f(w)) = {}^{\tau}X\,{}^{\tau}AAY \quad e \quad \phi(v, w) = {}^{\tau}XY$$

Ma allora possiamo imporre che $f$ sia isometria:

$$\begin{aligned} f \in O(V, \phi) &\Leftrightarrow \forall v, w,\ \phi(f(v), f(w)) = \phi(v, w) \\ &\Leftrightarrow \forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ {}^{\tau}X\,{}^{\tau}AAY = {}^{\tau}XY \Leftrightarrow {}^{\tau}AA = I \end{aligned}$$

### Matrici ortogonali

**Definizione 44** (Matrice ortogonale)**.** $M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ si dice ortogonale se:

$${}^{\tau}MM = M\,{}^{\tau}M = I$$

Definiamo $O(n) = \{M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}) \mid M \text{ ortogonale}\}$

*Osservazione* 54. Vediamo alcune particolarità sulle matrici ortogonali:

1.
$$M \in O(n) \Leftrightarrow M \in GL(n),\ M^{-1} = {}^{\tau}M$$

2. $M \in O(n) \Leftrightarrow$ le righe (e le colonne) di $M$ generano una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$.
Dobbiamo infatti pensare al fatto che in $[AB]_{ij}$ ci sta il prodotto tra la $i$-esima riga di $A$ e la $j$-esima colonna di $B$. Quindi il prodotto tra righe e

colonne di $M$ dà luogo all'identità solamente se le sue righe e le sue colonne formano una base ortogonale: infatti moltiplicate tra di loro devono valere 1 solo se si moltiplica la riga $i$ per la colonna $i$; se si moltiplicano righe e colonne di posizione diversa devono avere come risultato 0 (altrimenti il loro prodotto non sarebbe l'identità).

**Definizione 45** (Gruppo ortogonale (e gruppo ortogonale speciale))**.** $O(n)$ dotato del prodotto è un gruppo, detto gruppo ortogonale.
Ma (vediamo facilmente per Binet) $A \in O(n) \Rightarrow det(A) = \pm 1$. Definiamo quindi:

$$SO = \{A \in O(n) \mid det(A) = 1\}$$

Questo è detto gruppo ortogonale speciale.

**Esempio 19.** Nel caso $n = 2$ (come avremo modo di vedere nelle prossime lezioni) Abbiamo:

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \; \alpha \in \mathbb{R} \right\} \bigcup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \middle| \; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Vediamo separatamente i due insiemi:

- Il primo corrisponde a $SO(2)$, l'insieme delle rotazioni, ed è costituito da matrici non diagonalizzabili. In realtà è facile capire perché siano non diagonalizzabili: se lo fossero dovrebbero avere un autovalore ma, tranne nel caso $\alpha = \pi k$ una rotazione non manda mai un vettore non nullo nel suo $Span$. Quindi ci potevamo aspettare che le rotazioni fossero non diagonalizzabili.

- Il secondo insieme, l'insieme delle riflessioni, corrisponde a quello delle matrici diagonalizzabili: in una riflessione (simmetria) in $\mathbb{R}^2$ vi è infatti un vettore che rimane in se stesso (asse di simmetria) e un vettore che sarà mandato nel suo opposto.

*Riflessione* 27. Facciamo un piccolo ragionamento (fuori dagli argomenti del corso e totalmente non formale) prima della prossima Proposizione per avere un'idea migliore della situazione in cui ci troviamo.
Noi ad un certo punto abbiamo deciso di restringere la nostra analisi agli spazi euclidei: spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ con prodotti scalari molto ricchi di proprietà; questo ci ha consentito di definire i concetti di norma e distanza e fare diversi ragionamenti. Ma in generale i prodotti scalari non sono così belli e nulla ci vieta di avere un prodotto scalare su uno spazio vettoriale complesso; ma qui la faccenda si complica: non possiamo dire cosa significa un prodotto scalare definito positivo o negativo nei complessi (visto che non hanno un ordinamento) e quindi molte cose fatte perdono senso in $\mathbb{C}$. Un modo per risolvere il problema è quello di passare alla norma; sono quindi definiti i prodotti hermitiani che sono tali che il prodotto di un vettore con se stesso sia sempre interno a $\mathbb{R}$. A questo punto possiamo fare di più per chiederci se un prodotto scalare di questo tipo è positivo o negativo. Quindi potremmo rifare alcuni ragionamenti già fatti sui prodotti hermitiani.
In particolare il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}$ associa ad ogni coppi $X, Y \in \mathbb{C}^n$ il numero complesso ${}^{\tau}X\overline{Y}$.
Riconosciamo alcune delle cose appena dette nella prossima Proposizione.

**Proposizione 30.** *Sia $A \in O(n)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore di $A$; abbiamo allora che $|\lambda| = 1$.*

**Dimostrazione.** Consideriamo $A$ come la matrice che induce un endomorfismo in $\mathbb{C}^n$. Abbiamo allora (visto che $\lambda$ è autovalore) che $\exists X \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ autovettore relativo a $\lambda$ (quindi $AX = \lambda X$). Ma sappiamo anche che $A$ è reale, possiamo quindi scrivere:

$$\lambda\overline{\lambda}\,{}^{\tau}X\overline{X} = {}^{\tau}(\lambda X)\overline{\lambda X} = {}^{\tau}AXA\overline{X} = {}^{\tau}X\,{}^{\tau}AA\overline{X} = {}^{\tau}X\overline{X}$$

Dunque abbiamo:

$$(\lambda\overline{\lambda} - 1)\,{}^{\tau}X\overline{X} = \left(|\lambda|^2 - 1\right){}^{\tau}X\overline{X} = 0$$

Ma sappiamo per certo che ${}^{\tau}X\overline{X}$ è diverso da zero (se facciamo i conti vediamo che otteniamo la somma dei quadrati dei valori assoluti delle varie componenti di $X$, che è decisamente positiva. Avviene quindi certamente:

$$|\lambda|^2 - 1 = 0 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

**Proposizione 31.** *Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ortonormale e $B' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ un'altra generica base. Chiamiamo inoltre $M = \mathfrak{M}_{B',B}(id)$. Abbiamo allora:*

$$B' \text{ ortonormale} \Leftrightarrow M \text{ ortogonale}$$

**Dimostrazione.** $\forall i_1^n$, $[w_i]_B = M[w_i]_{B'} = M^i$. Allora abbiamo:

$$\phi(w_i, w_j) \overset{B\ orn.}{=} {}^{\tau}[w_i]_B [w_j]_B = {}^{\tau}M^i M^j = ({}^{\tau}M)_i M^j = [{}^{\tau}MM]_{ij}$$

*Osservazione* 55. La proposizione appena dimostrata è molto interessante, ci permette infatti di rivedere sotto una nuova luce diversi dei teoremi che abbiamo fatto: ci consente di vedere una matrice ortogonale come una matrice di cambiamento di base e quindi è un punto di contatto tra isomorfismi e prodotti scalari.

**Proposizione 32.** *Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ triangolabile. Allora $\exists M \in O(n)$ t.c. :*

$${}^{\tau}MAM = M^{-1}AM = T \text{ triangolare}$$

**Dimostrazione.** Considero $A$ come un endomorfismo $\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n$; sappiamo inoltre che $\mathbb{R}^n$, dotato del prodotto scalare standard, è uno spazio euclideo e abbiamo $\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}(A) = A$, ma $\mathcal{C}$ è una base ortonormale per il prodotto scalare standard.
Sappiamo inoltre, per l'algoritmo di G.S. che esiste una base $B$ a bandiera per $A$ e anche ortonormale. Sia allora

$$M = \mathfrak{M}_{B,\mathcal{C}}(id)$$

Allora abbiamo che $M^{-1}AM = \mathfrak{M}_B(A) = T$ triangolare.
Ma sia $B$ che $\mathcal{C}$ sono basi ortonormali, quindi la matrice $M$ è ortogonale.

**Esercizio 27.** Sia $A \in \mathcal{M}(p,n,\mathbb{R})$ una matrice di rango $r$. Sappiamo (dai tempi dell'SD-equivalenza) che esistono due matrici invertibili $M$ e $Q$ per le quali:

$$MAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

1) Dimostrare che $\exists M \in GL(p,\mathbb{R}),\ \exists Q \in O(n)$ tali che:

$$MAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

2) Dimostrare che $rnk({}^{\tau}AA) = rnk(A)$.

**Dimostrazione.** 1) Sappiamo (dai tempi in cui avevamo studiato l'$SD$ equivalenza) che $Q$ era una matrice di ccambiamento di base fatta in modo tale che gli ultimi vettori di essa appartenessero al nucleo di $A$. Prendo quindi $\{v_{r+1},\dots,v_n\}$ una base ortonormale di $Ker\ A$ e la completo a $B = \{v_1,\dots,v_n\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Sia ora $S$ una base di $\mathbb{R}^p$ ottenuta completando $\{A(v_1),\dots,A(v_r)\}$ a base.
Possiamo a questo punto prendere:

- $M = \mathfrak{M}_{\mathcal{C},S}\,(id)$
- $Q = \mathfrak{M}_{B,\mathcal{C}}\,(id)$

Queste due matrici soddisfano le nostre richeste; in particolare $Q$ è ortogonale perché manda una base ortonormale in una base ortonormale.

2) Detta:

$$B = \left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Abbiamo che:

$$A = M^{-1}B\,{}^{\tau}Q \Rightarrow A\,{}^{\tau}A = M^{-1}B\,{}^{\tau}QQ\,{}^{\tau}B\,{}^{\tau}M^{-1} = M^{-1}B\,{}^{\tau}M \Rightarrow rnk\,(A\,{}^{\tau}A = rnk(A))$$

*Osservazione* 56. Se $B$ è una base ortonormale, la restizione di $\mathfrak{M}_B\,()$ a $O(V,\phi)$ identifica questo sottogruppo con il sottogruppo $O(n) \subseteq GL(n,\mathbb{K})$ delle matrici ortogonali. Denotiamo quindi:

$$SO(V,\phi) = \{f \in O(V,\phi) \mid det(f) = 1\}$$

E questo è detto gruppo ortogonale speciale; i suoi membri sono detti isometrie dirette.

*Osservazione* 57. In particolare la composizione di isometrie dirette è un'isometria diretta.

**Proposizione 33.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale, $\phi$ un prodotto scalare definito su di esso, $f \in O(V,\phi)$ e $W$ ssv di $V$.*

$$f(W) \subseteq W \Rightarrow f\left(W^{\perp}\right) \subseteq W^{\perp}$$

**Dimostrazione.** Poiché $f$ è isomorfismo, $f(W) = W$.
Dobbiamo vedere che, $\forall v \in W^{\perp},\ f(v) \in W^{\perp}$. Cioè $\forall w \in W,\ \phi(f(v),w) = 0$. Ma sappiamo che (visto che $f$ è isomorfismo) $\exists y \in W\ t.c.\ w = f(y)$. Allora possiamo scrivere:

$$\phi(f(v),w) = \phi(f(v),f(y)) = \phi(v,y) = 0$$

**Forma canonica di matrici ortogonali**

**Proposizione 34.** *Sia $A \in O(n)$ una matrice ortogonale, allora $\exists M \in O(n)$ tale che:*

$$M^{-1}AM = {}^{\tau}MAM = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$$

*Con $R_{\theta_i} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{smallmatrix}\right)$ e con $\theta_i \neq l\pi, \forall i_1^k$.*

*Possiamo dire equivalentemente:*
*Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo di dimensione $n$. $f \in O(V, \phi) \Rightarrow \exists B$ base ortonormale di $V$ tale che:*

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \begin{pmatrix} I_p & & & & \\ & -I_q & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$$

**Dimostrazione.** Per induzione su $n$.

$\iota$) $n = 1$. Ovvio.

$\iota\iota$) Distinguiamo due casi:

a) $A$ ammette un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$, in questo caso $\lambda = \pm 1$. Sia $v$ un autovettore relativo a $\lambda$ (possiamo supporre $\|v\| = 1$. Allora:

$$\mathbb{R}^n = Span(\{v\}) \oplus Span(\{v\})^{\perp}$$

Poiché $Span(\{v\})$ è $A$-invariante anche $Span(\{v\})^{\perp}$ lo è. Inoltre $A\mid_{Span(\{v\})^{\perp}}$ è un'isometria (una restrizione di una isometria a un sottospazio $f$ invariante continua a essere una isometria). Ossia

$$A\mid_{Span(\{v\})^{\perp}} \in O\left(Span(\{v\})^{\perp}, <\,,\,>\mid_{Span(\{v\})^{\perp}}\right)$$

Possiamo allora applicare l'iporesi induttiva a $Span(\{v\})^{\perp}$.

b) $A$ non ha autovalori reali. Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore complesso di $A$. Sappiamo che $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \cos\theta + \iota\sin\theta$. Proviamo a portare avanti un ragionamento simile a quello che avevamo usato per la forma di Jordan reale. In particolare consideriamo $v = x + \iota y \in \mathbb{C}^n$ autovalore relativo a $\lambda$. Vogliamo provare che

$$\|x\| = \|y\| \quad e \quad <x, y> = 0$$

Ma questo si vede facilmente, infatti:

$${}^{\tau}vv = {}^{\tau}v\,{}^{\tau}AAv = {}^{\tau}AvAv = \lambda^2\,{}^{\tau}vv$$

Ma $\lambda^2 \neq 1$ (infatti se lo fosse sarebbe reale) quindi ${}^\tau vv = 0$ e quindi:

$$0 = {}^\tau vv = {}^\tau(x + \iota y)(x + \iota y) = {}^\tau xx - {}^\tau yy + 2\iota\, {}^\tau xy \Rightarrow \begin{cases} {}^\tau xx = {}^\tau yy \Rightarrow \|x\| = \|y\| \\ {}^\tau xy = 0 \Rightarrow < x, y >= 0 \end{cases}$$

Per la dimostrazione del teorema di Jordan reale possiamo dire:

- $x, y$ sono linearmente indipendenti, inoltre abbiamo visto che sono una base ortonormale di un piano reale di dimensione 2.
- *Span* $(\{x, y\})$ è $A$-invariante, inoltre:

$$\mathfrak{M}_{\{y,x\}} \left(A \mid_{Span(\{x,y\})}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

  Sappiamo inoltre che *Span* $(\{x, y\})^\perp$ è $f$ invariante. Possiamo usare su di quella l'induzione.

*Osservazione* 58. Quello che possiamo dire grazie a questa proposizione è che data un'isometria $f$ su uno spazio euclideo $(V, \phi)$ si può vedere $V$ come somma diretta e ortogonale di spazi vettoriali sui quali la restrizione di $f$ è o l'identità, oppure una rotazione.

#### Rotazioni e riflessioni

**Definizione 46** (Rotazioni e riflessioni)**.** Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo di dimensione $n$, $f \in O(V, \phi)$ e $Fix(f) = \{v \in V \mid f(v) = v\}$. Allora $f$ si dice:

- Rotazione, se $f \in SO(V, \phi)$ e $dim\ Fix(f) = n - 2$.
- Riflessione, se $dim\ Fix(f) = n - 1$.

*Osservazione* 59.

- Ogni riflessione è isometria inversa.
- Se $f$ è una riflessione, allora $f$ è una simmetria: $f^2 = id$.

**Teorema 16.** *Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo di dimensione $n$ e $f \in O(V, \phi)$. Allora $f$ è composizione di $n - k$ riflessioni, dove $k = dim\ Fix(f)$.*

## Esercitazione

*Riflessione* 28. Sia $V$ uno spazio vettoriale, $\phi \in PS(V)$ e $W$ ssv. di $V$ tale che $\phi\mid_W$ sia non degenere. Sappiamo che:

$$V = W \overset{\perp}{\oplus} W^\perp$$

Sono definite quindi le proiezioni: $V \xrightarrow{\pi_W} W$ e $V \xrightarrow{\pi_{W^\perp}} W^\perp$. Non è difficile notare che (come in qualsiasi caso di spezzamento di uno spazio vettoriale come somma diretta di sottospazi vettoriali) abbiamo: $Ker\ \pi_W = W^\perp$ e $Ker\ \pi_{W^\perp} = W$.
Prendiamo a questo punto $v, w \in V$, $w$ non isotropo. Sappiamo allora che

$\phi\,|_{Span(\{w\})}$ è non degenere, quindi si può applicare il caso che abbiamo appena visto. In particolare la proiezione ci è data dal coefficiente di Fourier:

$$p_w(v) = \frac{\phi(v,w)}{\phi(w,w)}w$$

Per verificare quello che abbiamo detto vediamo che $w' = v - p_w(v) \in Span\left(\{w\}\right)^{\perp}$:

$$\phi(w,w') = \phi\left(v - \frac{\phi(v,w)}{\phi(w,w)}w, w\right) = \phi(v,w) - \frac{\phi(v,w)}{\phi(w,w)}\phi(w,w) = 0$$

Facciamo un'ultima considerazione: sia $B = \{w_1, \dots, w_k\}$ una base ortogonale di $W$ (tutti i vettori sono non isotropi, visto che $\phi\,|_W$ è non degenere. Allora, $\forall v \in V$, abbiamo:

$$z = \pi_W(v) = \sum_{i=1}^{k} p_{w_i}(v)$$

Per vedere che è vero basta mostrare che $\forall v \in V,\ v - z \in W^{\perp}$. Abbiamo infatti:

$$\forall i_1^k,\ \phi(z,w_i) = \phi(v,w_i) - \sum_{j=1}^{k}\phi\left(p_{w_j}(v), w_i\right) = \phi\left(v - p_{w_i}(v), w_i\right) = 0$$

**Esempio 20.** Consideriamo $V = \mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard: $\forall v,w \in \mathbb{R}^3,\ \phi(v,w) = {}^{\tau}vw$. Consideriamo anche:

$$H = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ x \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, x + y - 2z = 0 \right\}$$

e $q = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Vogliamo trovare $d(q,H) = \|q - p_H(q)\|$. Prendiamo una base ortogonale di $H$ e seguiamo il metodo che abbiamo appena ricordato.
Possiamo prendere come primo vettore della base di $H$, $w_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. A questo punto, chiaramente:

$$H = Span\left(\{w_1\}\right) \oplus \left(Span\left(\{w_1\}\right)^{\perp} \cap H\right)$$

Cerchiamo quindi:

$$Span\left(\{w_1\}\right)^{\perp} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right), w_1\right) = 0 \Leftrightarrow a - b = 0 \right\}$$
$$\Rightarrow Span\left(\{w_1\}\right)^{\perp} = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} a \\ a \\ c \end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$$

Inoltre abbiamo che:

$$\left(\begin{smallmatrix} a \\ a \\ c \end{smallmatrix}\right) \in H \Leftrightarrow 2a - 2c = 0 \Leftrightarrow a = c \Rightarrow w_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in Span\left(\{w_1\}\right)^{\perp} \cap H$$

Abbiamo quindi una base ortogonale di $H$. Troviamo la proiezione e poi la distanza ($d(q,H) = \sqrt{\phi(q - p_H(q), q - p_H(q))}$).

$$p_H(q) = p_{w_1}(q) + p_{w_2}(q) = \frac{\phi(q,w_1)}{\phi(w_1,w_1)}w_1 + \frac{\phi(q,w_2)}{\phi(w_2,w_2)}w_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da questo troviamo facilmente:

$$d(p,H) = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

**Esercizio 28.** Vediamo un altro modo per risolvere lo stesso esercizio. Potevamo infatti proiettare $q$ su $H^\perp$ e questa rappresenta già la distanza da $H$. Infatti sappiamo bene che

$$V = H \oplus H^\perp$$

E questa è una somma diretta tra sottospazi ortogonali, quindi ci dà esattametne quanto volevamo. Ma riflettiamo bene su $H^\perp$:

$$H = \left\{ \left( \begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \middle| \; x + y - 2z = 0 \right\} \Rightarrow v \in H$$
$$\Leftrightarrow \phi\left(v, \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix} \right)\right) = 0 \Rightarrow H = Span\left(\left\{\left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix} \right)\right\}\right)^\perp$$

Prendiamo ora la proiezione di $q$ su $H^\perp$:

$$p_{H^\perp}(q) = \frac{\phi\left(q, \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix} \right)\right)}{\phi\left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix} \right), \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix} \right)} \left( \begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix} \right)$$

Ne dobbiamo fare ora la norma e otteniamo:

$$\|p_{H^\perp}\|(q) = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

**Isometrie**

*Riflessione* 29. Siano $V$ spazio vettoriale, $\phi \in PS(V)$ e $f \in End(V)$. $f$ si dice isometria per $\phi$ se è un isomorfismo e mantiene il prodotto scalare, cioè se:

$$\forall v, w \in V, \; \phi(v, w) = \phi(f(v), f(w))$$

Vediamo alcune considerazioni che possiamo fare se $f$ è isometria:

- Il cono isotropo è $f$-invariante.
- $Rad(\phi)$ è $f$-invariante. Infatti:

$$v \in Rad(\phi) \Leftrightarrow \forall w \in V, \; \phi(v, w) = 0 \Leftrightarrow \forall w \in V, \; \phi(f(v), f(w)) = 0$$
$$\xLeftrightarrow{f \in Aut} \forall y, \; \phi(f(v), y) = 0 \Leftrightarrow f(v) \in Rad\ \phi$$

- $f$ mantiene l'ortogonalità.
- Sia $v$ autovettore per $f$ relativo a $\lambda$. Visto che $f$ è isometria abbiamo:

$$\phi(v, v) = \phi(f(v), f(v)) = \phi(\lambda v, \lambda v) = \lambda^2 \phi(v, v) \Rightarrow \begin{cases} v \; isotropo \\ \lambda = \pm 1 \end{cases}$$

- Gli autospazi $V_1$ e $V_{-1}$ sono ortogonali:

$$\forall v \in V, \forall w \in W, \; \phi(v, w) = \phi(f(v), f(w)) = \phi(v, -w)$$
$$= -\phi(v, w) \Rightarrow \phi(v, w) = 0$$

# Lezione 36

## Teoria

*Riflessione* 30. Nella prima parte del corso abbiamo trattato gli endomorfismi e il risultato più potente a cui siamo giunti è stato il teorema di diagonalizzabilità. Il fatto che ci fosse una base di autovalori infatti ci era molto comoda. Poi abbiamo arricchito le strutture conosciute con il prodotto scalare e ci siamo interessati degli spazi euclidei. In uno spazio euclideo, come abbiamo visto, la cosa più utile che ci possa capitare è una base ortonormale. Quindi in teoria, se abbiamo un endomorfismo e un prodotto scalare, siamo nel dubbio se scegliere una base di autovettori per l'endomorfismo (quando questo sia diagonalizzabile) oppure una base ortonormale per il prodotto scalare (se è uno spazio euclideo sappiamo che c'è sempre).
Cercheremo quindi di capire quali sono gli endomorfismi e i prodotti scalari che permettono di avere una base di autovettori che sia ortonormale; se riuscissimo a questo punto a trovare un algoritmo per trovare una base del genere avremmo risolto ogni nostro problema: non potremmo chiedere di meglio.

**Definizione 47** (Ortogonalmente diagonalizzabile)**.** Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo. $f \in End(V)$ si dice ortogonalmente diagonalizzabile se $\exists B$ base di $V$ che sia ortonormale e di autovettori per $f$. (In questo caso $B$ si dice base spettrale).

*Osservazione* 60. Se $f$ è ortogonalmente diagonalizzabile allora $f = f^*$.

*Dimostrazione.* $\exists B$ base spettrale $\Rightarrow \mathfrak{M}_B(f)$ è una matrice diagonale (per definizione di base spettrale). Ma sappiamo anche che $f$ è autoaggiunto se e solo se $\exists B$ base ortonormale per $\phi$ per la quale si abbia $\mathfrak{M}_B(f)$ simmetrica.
In particolare abbiamo che nella base spettrale la matrice associata sarà diagonale, quindi simmetrica, quindi abbiamo che $f$ deve essere autoaggiunto.

**Proposizione 35.** *Sia $f \in End(V)$ autoaggiunto e $W$ ssv. di $V$.*

$$f(W) \subseteq W \Rightarrow f\left(W^{\perp}\right) \subseteq W^{\perp}$$

**Dimostrazione.** Dobbiamo vedere che $\forall X \in W^{\perp},\ f(X) \in W^{\perp}$.

$$\forall w \in W,\ \phi(f(X), w) \overset{f\ autg}{=} \phi(X, f(w)) = 0$$

**Lemma 4.** *Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ simmetrica. Allora il suo polinomio caratteristico $p_A(t)$ è completamente fattorizzabile in $\mathbb{R}[t]$ (quindi è triangolabile).*

**Dimostrazione.** Consideriamo $A$ come una matrice complessa, chiaramente sarà triangolabile; sia $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalore per $A$ e $X \in \mathbb{C}^n$ un autovettore relativo a $\lambda$. Visto che $A$ ha coefficienti reali possiamo scrivere:

$$AX = \lambda X \Rightarrow A\overline{X} = \overline{\lambda X}$$

Allora abbiamo:

- ${}^{\tau}XA\overline{X} = {}^{\tau}X(\overline{\lambda X}) = \overline{\lambda}\,{}^{\tau}X\overline{X}$.
- ${}^{\tau}XA\overline{X} = {}^{\tau}(AX)\overline{X} = {}^{\tau}(\lambda X)\overline{X} = \lambda\,{}^{\tau}X\overline{X}$.

Visto le due serie di uguaglianze sono uguali abbiamo:

$$\lambda\,{}^{\tau}X\overline{X} = \overline{\lambda}\,{}^{\tau}X\overline{X} \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Il prossimo è un risultato particolarmente importante.

**Teorema 17** (spettrale reale)**.** *Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo e $f \in End(V)$.*

$$f \text{ ortogonalmente diagonalizzabile} \Leftrightarrow f \text{ autoaggiunto}$$

*Vediamo due diverse dimostrazioni per questo teorema.*

**Dimostrazione** (1)**.** '$\Rightarrow$' Già dimostrato. (Osservazione 60).

'$\Leftarrow$' Per induzione su $n = dim\ V$.

$\iota$) $n = 1$. Ovvio.

$\iota\iota$) $n \geq 2$. Per il Lemma 4 abbiamo che $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ autovalore. Sia $v_1 \in V_\lambda$ un autovettore di norma 1 relativo a $\lambda$. Allora sappiamo (visto che $\phi$ è definito positivo):

$$V = Span\left(\{v_1\}\right) \oplus Span\left(\{v_1\}\right)^{\perp}$$

Consideriamo quindi la situazione:

- $f\ |_{Span(\{v_1\})^{\perp}}$ è un endomorfismo, infatti $f\left(Span\left(\{v_1\}\right)^{\perp}\right) \subseteq Span\left(\{v_1\}\right)^{\perp}$.
- $\phi\ |_{Span(\{v_1\})^{\perp}}$ è un prodotto scalare definito positivo (la restrizione a un qualsiasi sottospazio di un prodotto scalare definito positivo è definita positiva).
- $dim\ Span\left(\{v_1\}\right)^{\perp} = n - 1$.
- $f\ |_{Span(\{v_1\})^{\perp}}$ è autoaggiunta: infatti $f$ era autoaggiunto su $V$, quindi in particolare sarà autoaggiunto per una restrizione.

Possiamo quindi applicare l'ipotesi induttiva, che ci restituirà una base $B' = \{v_2, \ldots, v_n\}$ che sia ortonormale per $\phi$ e diagonale per $f$. A questo punto la base:

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

È chiaramente la base spettrale cercata.

**Dimostrazione** (2)**.** '$\Rightarrow$' Già dimostrato. (Osservazione 60).

'$\Leftarrow$' Sia $S$ una base ortonormale per $\phi$ e $A = \mathfrak{M}_S(f)$. Sappiamo che $A$ è simmetrica; ma allora, per il Lemma 4, $A$ è triangolabile. Ci dobbiamo a questo punto ricordare del rafforzamento della triangolabilità che abbiamo fatto con Gram-Schmidt, quindi sappiamo che è triangolabile anche attraverso una matrice ortonormale. Cioè $\exists P \in O(n)$ tale che:

$$P^{-1}AP = {}^{\tau}PAP = T \ triangolare$$

Ma la matrice $A$ era simmetrica e la matrice $T$ è congruente ad $A$; ma la simmetria è invariante per congruenza (certamente cambiando base un prodotto scalare non può certo diventare una forma bilineare). Quindi $T$ è sia triangolare che simmetrica, quindi deve essere diagonale.
Sia $B$ la base di $V$ tale che $\mathfrak{M}_{B,S}(id) = P$.
Poiché $S$ è ortonormale e $P$ ortogonale allora la base $B$, come abbiamo dimostrato, è ortonormale. Inoltre $\mathfrak{M}_B(f) = T$ diagonale, quindi $B$ è una base di autovettori.

### Complementi al teorema spettrale

**Corollario 22.** *Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ simmetrica. Allora $\exists P \in O(n)$ tale che*

$$P^{-1}AP = {}^{\tau}PAP = D \ diagonale$$

*Riflessione* 31. Possiamo quindi fare diverse considerazioni su $A$ matrice simmetrica:

- Consideriamo le classi di equivalenza della relazione: similitudine tramite elementi di $O(n)$. Abbiamo che nella classe di equivalenza di $A$ vi è anche una matrice diagonale. Ma queste classi di equivalenza corrispondono a quelle negli endomorfismi rispetto al coniugui tramite elementi di $O(V, \phi)$.
- $A$ è congruente a $D$ tramite matrice ortogonale quindi nella classe di equivalenza di $A$ ottenuta dalla relazione di equivalenza congruenza tramite elementi di $O(n)$, vi è almeno una matrice diagonale. Stessa cosa per $PS(V)$ quozientato isometria tramite elementi di $O(V, \phi)$.

*Osservazione* 61. Abbiamo visto che, data $A$ simmetrica, abbiamo che $\exists P$ ortogonale tale che

$$P^{-1}AP = {}^{\tau}PAP = D \ diagonale$$

Ma che informazioni ci fornisce $D$?

- Considerando $A$ come un endomorfismo sulla diagonale abbiamo gli autovalori di $A$.
- Ci aiuta anche a individuare la segnatura di $A$. Infatti il numero di autovalori positivi di $A$ indica $i_+(A)$. Stessa cosa per gli autovalori negativi.

**Corollario 23.** *$A \in S(n, \mathbb{R})$ è definita positiva $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori di $A$ sono positivi.*

**Proposizione 36.** *Sia $(V, \phi)$ euclideo, $f \in End(V)$ autoaggiunto e $\lambda \neq \mu$ autovalori per $f$. Allora $V_\lambda \perp V_\mu$.*

**Dimostrazione.** Proviamo che, $\forall v \in V_\lambda,\ w \in V_\mu$.

$$\lambda\phi(v, w) = \phi(\lambda w) = \phi(f(v), w) = \phi(v, f(w)) = \phi(v, \mu w) = \mu\phi(v, w)$$

Ma visto che $\mu \neq \lambda$, abbiamo che $\phi(v, w) = 0$.

# Esercitazione

*Riflessione* 32. Sia $V$ uno spazio vettoriale, $f \in O(V, \phi)$, $B$ una base di $V$, $A = \mathfrak{M}_B(f)$, $M = \mathfrak{M}_B(\phi)$, $v, w \in V$ e $x = [v]_B$, $y = [w]_B$. Allora abbiamo:

$$^\tau xMy = \phi(v, w) = \phi(f(v), f(w)) = {}^\tau(AX)MAY \Rightarrow {}^\tau AMA = M$$

Vale inoltre il se e solo se: se $^\tau AMA = M$ allora abbiamo un'isometria.
In particolare (considerando il determinante), se $\phi$ è non degenere, allora abbiamo:

$$det\ {}^\tau A\ det\ M\ det\ A = det\ M \Rightarrow det\ A^2 = 1$$

Quindi, se consideriamo il gruppo che le isometrie formano con la composizione, possiamo dividere questo gruppo in due sottoinsiemi:

- Il gruppo ortogonale speciale, formato dalle isometrie con determinante uguale a 1.

- Il sottoinsieme complementare, formato da isometrie con determinante $-1$.

*Osservazione* 62. Pensiamo quanto appena detto nel caso particolare di $(V, \phi)$ spazio euclideo con $B$ base ortonormale e $f \in End(V)$. In questo caso $\mathfrak{M}_B(\phi) = I$ per definizione di base ortonormale. Quindi (detta $A = \mathfrak{M}_B(f)$), per quanto visto prima:

$$A\ ortogonale \Leftrightarrow {}^\tau AA = I$$

*Riflessione* 33. Sia $V$ un piano iperbolico. Vediamo quali sono le possibili isometrie su $V$.
Come sappiamo nel piano iperbolico ci sono due rette di vettori isotropi sia $B = \{w_1, w_2\}$ una base di vettori isotropi, in particolare (visto che sappiamo che esistono) si ipotizzi che siano tali che:

$$\mathfrak{M}_B(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo quindi cosa può fare un'isometria $f$ su questi vettori della base (il suo comportamento su questi vettori determina la sua azione su tutti i vettori del piano). Sappiamo però anche che il cono isotropo è $f$-invariante. Quindi non abbiamo molte possibilità (considerando anche che $f$ è in particolare isomorfismo):

$$\begin{cases} f(w_1) = \lambda w_1 \Rightarrow f(w_2) = \mu w_2 \\ f(w_1) = \lambda w_2 \Rightarrow f(w_2) = \mu w_1 \end{cases}$$

Ma ricordiamoci che devono anche mantenere il prodotto scalare tra di loro, quindi:

$$1 = \phi(w_1, w_2) = \phi(f(w_1), f(w_2)) = \lambda\mu\phi(w_1, w_2) \Rightarrow \mu = \frac{1}{\lambda}$$

Quindi, se $f$ è isometria, possiamo avere due casi:

$$A_\lambda = \mathfrak{M}_B\left(f\right) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \quad \textit{oppure}$$
$$B_\lambda = \mathfrak{M}_B\left(f\right) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ \frac{1}{\lambda} & 0 \end{pmatrix}$$

Nel primo caso il determinante della matrice è 1, nel secondo $-1$.
Abbiamo dimostrato che, se $f$ è isometria, allora vale una delle due situazioni descritte. Ma è vero il contrario? Il fatto che le matrici associate siano in quella forma implica che l'applicazione a loro associata sia isometria? Si. Possiamo dirlo grazie alla Riflessione 32 e alla prova del fatto che:

$$A_\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B_\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

*Riflessione* 34. Sia $V = \mathbb{R}^2$ dotato del prodotto scalare standard $\phi$. Cerchiamo di esaminare come sono fatte le isometrie; sappiamo che se $A \in \mathcal{M}(2, \mathbb{R})$ rappresenta un'isometria per $\phi$ solamente se l'insieme delle sue colonne (e delle sue righe) è una base ortonormale. In particolare abbiamo che la prima colonna moltiplicata per la sua trasposta deve valere 1 (e così per la seconda) quindi:

$$A \in O(2) \Rightarrow 1 = {}^{\tau}A^1 A^1 = [A]_{11}^2 + [A]_{21}^2 \Rightarrow \exists \alpha \ t.c. \ A^1 = \left(\begin{smallmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{smallmatrix}\right)$$
$$A \in O(2) \Rightarrow 1 = {}^{\tau}A^2 A^2 = [A]_{12}^2 + [A]_{22}^2 \Rightarrow \exists \alpha \ t.c. \ A^2 = \begin{pmatrix} \scriptstyle\cos\beta \\ \scriptstyle\sin\beta \end{pmatrix}$$

Ma sappiamo anche che tra di loro le due colonne devono essere ortogonali, quindi abbiamo:

$$0 = \phi(A^1, A^2) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$$

Questo ci fa capire che ci sono solamente due possibilità:

- $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. Le isometrie di questo genere vengono dette rotazioni, hanno come determinante $+1$ (sono isometrie dirette) e, in genere, non sono diagonalizzabili infatti, (tranne casi particolari) la rotazione non ha autovettori.

- $A = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. Le isometrie di questo genere, si vede facilmente, hanno come polinomio caratteristico $t^2 - 1$, abbiamo quindi intanto che sono diagonalizzabili, inoltre vi è una retta di punti fissati ($dim\ Fix(A) = 1$) e una retta di vettori che vengono mandati nei loro opposti. Queste isometrie sono dette riflessioni.

*Riflessione* 35 (Composizione di rotazione e riflessioni). ?????????

*Riflessione* 36 (DA RIFARE). Sia $(V, \phi)$ euclideo. $f \in End(V)$ si dice autoaggiunto se $f^* = f$ cioè se:

$$\forall v, w \in V, \ \phi(f(v), w) = \phi(v, f(w))$$

Sia $B$ una base di $V$ e $A = \mathfrak{M}_B(f)$ e $M = \mathfrak{M}_B(\phi)$ allora

$$^{\tau}AM = MA \Leftrightarrow MA \ simmetrica$$

In particolare se $(V, \phi)$ è euclideo e $B$ è una base ortogonale, allora

$$M = \mathfrak{M}_B(\phi) = I$$

Allora si deve vedere se $A$ è simmetrica.

**Esempio 21.** Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $\forall x, y \in \mathbb{R}^3,\ \phi(x, y) = {}^{\tau}xMy$ e $\forall v \in \mathbb{R}^3,\ f(v) = Av$. Con:

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vediamo intanto molto facilmente che $\phi$ è definito positivo notando l'alternanza del segno del determinante sui minori principali di $M$.
Per vedere che $A$ è isometria vediamo semplicemente che $MA$ è simmetrica:

$$MA = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 2 & 3 \\ 2 & * & -1 \\ 3 & -1 & * \end{pmatrix}$$

Quindi $f$ è autoaggiunta.

*Riflessione* 37. Sia $f$ un enfomorfismo $\phi$-autoaggiunto.

- $W \subseteq V$ ssv. $f$-invariante $\Rightarrow W^{\perp}$ è $f$-invariante.
- $\forall \lambda \neq \mu$ autovalori, $V_\lambda \perp V_\mu$.

**Esempio 22.** Riprendiamo l'ultimo esempio fatto.
Vediamo che $Ker\ f = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$, sia $W = Ker\ f^{\perp}$. Sappiamo (visto che $\phi$ è definito positivo):

$$\mathbb{R}^3 = Ker\ f \overset{\perp}{\oplus} W$$

Ma vediamo anche che $p_A(t) = t(-1-t)^2 \Rightarrow Sp(A) = \{0, -1\} \Rightarrow \mathbb{R}^3 = V_0 \overset{\perp}{\oplus} V_{-1}$.
Quindi abbiamo:

$$\mathbb{R}^3 = V_0 \overset{\perp}{\oplus} V_{-1}$$

**Esempio 23.** Sia $S = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Vogliamo trovare $P$ ortogonale tale che $P^{-1}SP = {}^{\tau}PSP = D$ diagonale. Visto che $S$ ha rango 2 la matrice ha un nucleo: $Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$.
Vediamo che ci sono altri autovettori, infatti $P_S(t) = t(t+4)(2-t)$ quindi:

$$\mathbb{R}^3 = Ker\ f \overset{\perp}{\oplus} V_2 \overset{\perp}{\oplus} V_4$$

Gli altri autovalori vanno cercati nell'ortogonale del Ker. Ma vediamo che in particolare:

$$V_4 = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}\right) \qquad V_2 = Span\left(\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\3\end{smallmatrix}\right)\right\}\right)$$

La base formata da vettori in ciascun autospazio è certamente una base ortogonale, scegliamo vettori che abbiano norma 1 e troviamo la base ortonormale:

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Prendiamo a questo punto come matrice $P$ la matrice del cambio di base tra la base canonica e questa nuova base $P$ (oppure troviamo la matrice nell'altro senso e sappiamo che l'inversa è anche la trasposta).

**Proposizione 37.** *Sia $A \in S(n, \mathbb{R})$ definita positiva.*

$$\exists! S \in S(n, \mathbb{R}) \text{ definita positiva t.c. } S^2 = A$$

**Dimostrazione.** Essendo una dimostrazione di esistenza e unicità:

1) Esistenza: $\exists P$ ortogonale tale che $P^{-1}AP = D$ diagonale. A questo punto sulla diagonale di $D$ avremo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, magari con ripetizioni. Consideriamo la matrice diagonale $\sqrt{D}$ che ha sulla diagonale le radici degli elementi della diagonale di $D$. A questo punto si vede facilmente che:

$$S = P\sqrt{D}P^{-1}$$

   è la matrice che ci interessa:

   - È simmetrica: infatti $P^{-1} = {}^{\tau}P$ e quindi è congruente a una matrice simmetrica.
   - $S^2 = P\sqrt{D}P^{-1}P\sqrt{D}P^{-1} = A$.
   - $S \sim \sqrt{D}$ e $\sqrt{D}$ ha tutti gli autovalori positivi.

2) Unicità: Sia $S$ una matrice con tutte le proprietà richieste. Allora:

   - $S$ e $A$ commutano.
   - $V = \bigoplus_{j=1}^{k} V_{\lambda_j}$ è una somma diretta ortogonale.
   - $SA = AS \Rightarrow \forall i,\ V_{\lambda_i}$ è $f$-invariante.

   Ma possiamo considerare che $S$ è determinato completamente da $S\mid_{V_{\lambda_1}}, \dots, S\mid_{V_{\lambda_k}}$. Quindi ci basta dimostrare che $S\mid_{V_{\lambda_i}}$ deve essere una particolare matrice. Ma questo è vero:

   - $S$ autoaggiunta rispetto al prodotto scalare standard e l'essere autoaggiunta passa alle restrizioni.
   - $S\mid_{V_{\lambda_i}}$ è diagonalizzabile.
   - Sia $w \in V_{\lambda_i}$ autovettore per $S$ relativo a $\mu \in \mathbb{R}$. Allora:

$$Aw = \lambda_i w = S^2 w = \mu^2 w \Rightarrow \mu = \sqrt{\lambda_i}$$

   - $S\mid_{V_{\lambda_i}} = \sqrt{\lambda_i} I$.

# Lezione 37

## Teoria

*Riflessione* 38. Abbiamo dimostrato il teorema spettrale, che ci assicura che gli endomordismi autoaggiunti, in uno spazio euclideo, ammettono una base ortonormale di autovettori; questo ci ha permesso di dire che ogni matrice simmetrica ad autovalori reali è simile (attraverso una matrice ortogonale) ad una matrice diagonale. Possiamo quindi diagonalizzare contemporaneamente il prodotto scalare e l'endomorfismo.
Interprentando la matrice $A$ dell'endomorfismo (che sarà simmetrica in una base ortonormale) come una matrice associata a un prodotto scalare, abbiamo visto che i valori che troviamo sulla diagonale di una matrice $D$ diagonale congrua ad $A$ ci danno informazioni a proposito degli indici di positività e negatività.
Avremo inoltre poi modo di vedere che, se due matrici simmetriche reali commutano, allora esiste una base ortonormale di autovettori per entrambe.

**Esercizio 29.** Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. Allora vale:

$$A \text{ è simmetrica} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{commuta con } {}^{\tau}A \\ A \text{ è triangolabile} \end{cases}$$

**Dimostrazione.** '$\Rightarrow$' Ovvio.

'$\Leftarrow$' Come conseguenza del teorema di $G - S$ sappiamo che $A$ può essere resa triangolare attraverso una matrice ortogonale, quindi:

$$\exists P \in O(n) \ t.c. \ P^{-1}AP = {}^{\tau}PAP = T \ triangolare$$

Abbiamo quindi che $T$ è sia simile che congruente ad $A$. Vediamo che mantiene anche la comutatività con la trasposta.

$$T\,{}^{\tau}T = {}^{\tau}PAP\,{}^{\tau}PAP = {}^{\tau}PA\,{}^{\tau}AP = {}^{\tau}P\,{}^{\tau}AAP = {}^{\tau}P\,{}^{\tau}AP\,{}^{\tau}PAP = {}^{\tau}TT$$

Ma $T$ è triangolare e commuta con la sua trasposta $\Rightarrow$ è diagonale.
Ma quindi in particolare $T$ è simmetrica e $A$ è congrua a $T$. Ma sappiamo che l'essere simmetrici è un invariante per congruenza. Quindi anche $A$ è simmetrica.

**Corollario 24.** *Se $A \in O(n)$ ha tutti gli autovalori reali allora è simmetrica.*

**Teorema 18** (di ortogonalizzazione simultanea)**.** *Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo e $\psi \in PS(V)$. Allora $\exists B$ base di $V$ ortonormale per $\phi$ e ortogonale per $\psi$.*

**Dimostrazione.** Sia $S$ una base ortonormale per $\phi$ e $A = \mathfrak{M}_S(\psi)$. In particolare abbiamo che $A$ è simmetrica visto che rappresenta un prodotto scalare. Consideriamo ora $g \in End(V)$ *t.c.* $\mathfrak{M}_S(g) = A$. Questo endomorfismo è autoaggiunto (è rappresentato in una base ortonormale da una matrice simmetrica). Quindi possiamo applicare il teorema spettrale su $g$; il teorema infatti garantisce che $\exists B$ base di $V$ ortonormale per $\phi$ e di autovettori per $g$. Ossia $\mathfrak{M}_B(g) = D$ diagonale.
Ma consideriamo $M = \mathfrak{M}_{B,S}(id)$, matrice di cambiamento di base tra due basi ortonormali, abbiamo quindi che $M \in O(n)$. Abbiamo quindi (considerando $A$ come endomorfismo):

$$M^{-1}AM = D$$

Invece considerando $A$ come matrice associata a $\psi$ possiamo dire:

$${}^{\tau}MAM = D$$

Ma quindi $D = \mathfrak{M}_B(\psi) \Rightarrow B$ è ortogonale per $\psi$ e ortonormale per $\psi$.

**Corollario 25.** *Equivalentemente alla Proposizione 37 possiamo dire:*
*Sia $(V, \phi)$ spazio euclideo e $f \in End(V)$ un endomorfismo autoaggiunto con tutti autovalori positivi (non strettamente). Allora $\exists! g \in End(V)$ autoaggiunto e con autovalori positivi tale che*

$$g^2 = f$$

## Geometria affine euclidea in $\mathbb{R}^n$

*Riflessione* 39. Abbiamo già incontrato, anche se di sfuggita, la struttura di sottospazio affine in uno spazio vettoriale; dato uno spazio affine abbiamo definito (e visto che è una buona definizione) la sua giacitura, la sua dimensione (la dimensione della giacitura) e abbiamo definito parallelismo tra sottospazi affini (quando una giacitura contiene l'altra). Ma la nostra analisi non poteva che essere superficiale: non avevamo ancora introdotto il i prodotti scalari e quindi non avevamo i concetti di norma, proiezione e gli altri concetti che abbiamo introdotto solo successivamente.

**Notazione.**
- Sia $S$ sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, indichiamo con $W_S$ la sua giacitura.
- Indichiamo con $\cdot$ il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$.

**Definizione 48** (Ortogonale (spazi affini))**.** Sia $S$ sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$. Si dice che $v$ è ortogonale a $S$ se $v \in W_S^{\perp}$.

**Esempio 24.** Sia $H$ l'iperpiano affine:

$$H = \{X \in \mathbb{R}^n \mid B \cdot X + d = 0\}$$

Allora abbiamo che il vettore $B \in \mathbb{R}^n$ è ortogonale a $H$ (per definizione).

**Definizione 49.** Siano $S, T$ sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$. Si dice che $S$ e $T$ sono ortogonali se:

$$W_S \subseteq W_T^{\perp} \ \left(W_T \subseteq W_S^{\perp}\right)$$

**Esempio 25.** Siano $A, B, C, D \in \mathbb{R}^n$. Consideriamo:

$$r = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X = \lambda A + C \ t.c. \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$t = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X = \lambda B + D \ t.c. \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Queste due rette hanno giacitura: $W_r = Span(\{A\})$ e $W_t = Span(\{B\})$. Abbiamo quindi:

$$r \perp t \Leftrightarrow W_r \subseteq W_t^{\perp} \Leftrightarrow A \in Span(\{B\})^{\perp} \Leftrightarrow A \cdot B = 0$$

**Esempio 26.** Siano $A, B, C \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$. Consideriamo:

$$r = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X = \lambda A + C \ t.c. \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$H = \{X \in \mathbb{R}^n \mid B \cdot X + d = 0\}$$

Abbiamo allora: $W_H = \{B \cdot X = 0\}$ e $W_H^{\perp} = Span(\{B\})$. Da questo possiamo dire:

$$r \perp H \Leftrightarrow A \in Span(\{B\})$$

**Proposizione 38.** *Sia $S$ sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $k$.*

*1) Se $T$ ssa. di $V$ è ortogonale a $S$ allora dim $T \leq n - k$.*

*2) $\forall d_1^{n-k}$, $\exists T$ ssa. di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $d$ e ortogonale a $S$.*

*3) Tutti i sottospazi affini di dimensione $n - k$ ortogonali a $S$ sono paralleli tra di loro e ciascuno di essi interseca $S$ in un solo punto.*

*4) $\forall P \in \mathbb{R}^n$, $\exists! T$ ssa. di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n - k$ e ortogonale a $S$ tale che $P \in T$.*

**Dimostrazione.** 1) $T \perp S \Leftrightarrow W_T \subseteq W_S^{\perp}$. Ma $dim\ W_S^{\perp} = n - k$ per ipotesi.

2) Dato $d$ sappiamo che $\exists W_T$ sottospazio vettoriale di dimensione $d$ che sia sottoinsieme di $W_S^{\perp}$. Allora $\forall v \in V$,

$$T = \{x + v \ t.c. \ x \in W_T\}$$

Soddisfa le nostre richieste.

3) Sia $R \in \mathbb{R}^n$ tale che $S = R + W_S$ e sia $T$ di dimensione $n - k$ ortogonale a $S$. Possiamo scrivere allora, per qualche $Q \in \mathbb{R}^n$, $T = Q + W_T$. Ma $S \perp T \Rightarrow W_T \subseteq W_S^{\perp}$. Ma $dim\ W_T = n - k$ per ipotesi, abbiamo quindi l'uguaglianza: $W_T = W_S^{\perp}$. Quindi i vari sottospazi affini sono paralleli tra di loro: hanno la stessa giacitura.

Consideriamo un generico $T = Q + W_S^{\perp}$. Sappiamo che possiamo scrivere $\mathbb{R}^n = W_S \oplus W_S^{\perp}$. Quindi, in particolare,

$$\exists! v \in W_S, w \in ortW_S \ t.c \ R - Q = v + w$$

Quindi, possiamo scrivere: $R - v = Q + w$. Ma:

- $R \in S$ e $v \in W_S \Rightarrow R - v \in S$.
- $Q \in T$ e $w \in W_T \Rightarrow Q + w \in T$.

Quindi $P_0 = R - v = Q + w$ appartiene all'intersezione. Inoltre è unico per l'unicità dello spezzamento della somma diretta.

4) Basta prendere:

$$T = P + W_S^{\perp}$$

*Osservazione* 63. Si può estendere la nozione di ortogonalità a due iperpiani di $\mathbb{R}^n$. Dati infatti $A, C \in \mathbb{R}^n,\ b, d \in \mathbb{R}$ consideriamo:

$$\begin{aligned} H &= \{X \in \mathbb{R}^n \,|\, A \cdot X + b\} \\ I &= \{X \in \mathbb{R}^n \,|\, C \cdot X + d\} \end{aligned}$$

Allora, come abbiamo già visto:

$$\begin{aligned} W_H &= \{X \in \mathbb{R}^n \,|\, A \cdot X = 0\} \\ W_I &= \{X \in \mathbb{R}^n \,|\, C \cdot X = 0\} \end{aligned}$$

Quindi $W_H = Span\left(\{A\}\right)^{\perp},\ W_I = Span\left(\{C\}\right)^{\perp}$. Diciamo quindi che $H$ e $I$ sono ortogonali se $A \perp C \Leftrightarrow A \cdot C = 0$.

### La distanza nei sottospazi affini

**Definizione 50** (Distanza (punto e ssa))**.** Sia $S$ un sottospazio affine di $\mathbb{R}^n$ e $P \in \mathbb{R}^n$. Allora definiamo la distanza tra $P$ ed $S$,

$$d(P, S) = \inf\{d(P, X) \mid X \in S\}$$

**Proposizione 39.** *$\exists P_0 \in S$ tale che $d(P, S) = \|P - P_0\|$. Quindi in realtà l'* inf *della definizione è un* min.

**Dimostrazione.** Sia $k = dim\ S$. Per la Proposizione 38 possiamo dire che $\exists! T$ sottospazio affine di dimensione $n - k$ ortogonale a $S$ e contenente $P$. Consideriamo allora $P_0 = S \cap T$ (notiamo che $P - P_0 \perp S$). Vediamo ora che $\forall X \in S,\ X \neq P,\ d(P, X) > \|P - P_0\|$. Infatti:

$$\begin{aligned} d(p, X)^2 &= \|P - X\|^2 = \|(P - P_0) + (P_0 - X)\|^2 \\ &= d(P, P_0)^2 + d(P_0, X)^2 + 2(P_0 - X) \cdot (P - P_0) > \|P - P_0\|^2 \end{aligned}$$

**Esempio 27.** Siano $B \in \mathbb{R}^n,\ d \in \mathbb{R}$, consideriamo:

$$H = \{X \in \mathbb{R}^n \,|\, B \cdot X + d\}$$

Prendiamo $P \in \mathbb{R}^n$. Allora:

$$d(P, H) = \frac{|B \cdot P + d|}{\|B\|}$$

**Dimostrazione.** Abbiamo infatti $d(P,H) = \|P - P_0\|$ dove $P_0 = H \cap r$ e $r$ la retta passsante per $P$ e ortogonale a $H$, cioè

$$r = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X = \lambda B + P \ t.c.\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Vediamo di trovare l'intersezione. Vogliamo $\lambda$ tale che $B \cdot (\lambda B + P) + d = 0$ (trovare l'intersezione: $P_0$). Otteniamo quindi:

$$\lambda = \frac{-d - B \cdot P}{B \cdot B}$$

Da questo troviamo esplicitamente $P_0$:

$$P_0 = \frac{-d - B \cdot P}{B \cdot B} B + P$$

E quindi, a questo punto:

$$d(P,H) = \|P - P_0\| = \|\frac{d + B \cdot P}{B \cdot B} B\| = \frac{|B \cdot P + d|}{\|B\|^2} \|B\| = \frac{|B \cdot P + d|}{\|B\|}$$

**Esercizio 30.** Calcolare la distanza tra un punto e una retta in $\mathbb{R}^3$.

**Definizione 51** (Distanza (tra ssa))**.** Siano $S, T$ sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$.

$$d(S,T) = inf\, \{d(X,Y) \mid X \in S, Y \in T\}$$

**Esempio 28.** Vediamo alcuni esempi:

a) Siano $H, I$ piani di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo due casi:
   - $H \cap I \neq \varnothing \Rightarrow d(H,I) = 0$.
   - $H \cap I = \varnothing \Rightarrow \forall P \in H,\ d(H,I) = d(P,I)$. Valore che sappiamo trovare con la formula appena vista.

b) Siano $H$ un piano e $r$ una retta di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo due casi:
   - $H \cap r \neq \varnothing \Rightarrow d(H,r) = 0$.
   - $H \cap r = \varnothing \Rightarrow \forall P \in r,\ d(H,r) = d(P,H)$. Valore che sappiamo trovare con la formula appena vista.

c) Siano $r, t$ rette di $\mathbb{R}^3$. Abbiamo tre casi:
   - $r \cap t \neq \varnothing \Rightarrow d(r,t) = 0$.
   - $r /\!/ t \Rightarrow \forall P \in r,\ d(r,t) = d(P,t)$. Valore che sappiamo trovare con la formula appena vista.
   - Se le due rette sono sghembe la cosa è meno facile. Siano $A, B, C, D \in \mathbb{R}^n$, consideriamo:

$$r = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X = \lambda A + C \ t.c.\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$
$$t = \{X \in \mathbb{R}^n \mid X = \lambda B + D \ t.c.\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

   Visto che le due rette sono sghembe, allora $A$ e $D$ sono linearmente indipendenti. Quello che dobbiamo fare è provare che $\exists! z$ retta tale che intersechi sia $r$ che $t$ e che sia ortogonale a entrabe; ottenuta questa basta dire: $P_1 = z \cap r$ e $P_2 = z \cap t$; abbiamo quindi:

$$d(r,t) = \|P_1 - P_2\|$$

Vediamo quindi che $z$ è unica. Le seguenti sono scritture generiche per un qualsiasi punto di $r$ e $t$:

$$P(\lambda) = \lambda A + C \in r$$
$$Q(\mu) = \mu B + D \in t$$

Quindi vogliamo dimostrare che esiste un'unica coppia di $\lambda$ e $\mu$ per la quale la retta passante per $P(\lambda)$ e $Q(\mu)$ è ortogonale ad entrambe le rette. Consideriamo quindi

$$P(\lambda) - Q(\mu) = \lambda A + C - \mu B - D$$

un vettore parallelo a $r$. Quello che ci resta da fare è imporre:

$$\begin{cases} (\lambda A + C - \mu B - D) \cdot A = 0 \\ (\lambda A + C - \mu B - D) \cdot B = 0 \end{cases}$$

Ci basta vedere che la matrice di coefficienti di questo sistema lineare è invertibile per capire che ha un'unica soluzione e quindi esiste un'unica retta (unici valori di $\lambda$ e $\mu$ per i quali la retta passante per $P(\lambda)$ e $Q(\mu)$ è ortogonale alle due rette). Vediamo infatti che:

$$M = \begin{pmatrix} A \cdot A & -A \cdot B \\ A \cdot B & -B \cdot B \end{pmatrix}$$

**Il gruppo delle traslazioni**

**Notazione.** Sia $X$ un insieme non vuoto, si indica con:

$$S(X) = \left\{ X \xrightarrow{f} X \textit{ t.c. } f \textit{ biunivoca} \right\}$$

*Osservazione* 64. Abbiamo visto che, $\forall X$ insieme, $(S(X), \circ)$ è un gruppo.

**Definizione 52** (Gruppo di trasformazioni)**.** Dato $X$ gruppo, si dice gruppo di trasformazioni su $X$ ogni sottogruppo di $S(X)$.

**Esempio 29.** Sia $V$ spazio vettoriale. Allora sono gruppi di trasformazioni:

- $GL(V)$.
- $O(V, \phi)$, con $\phi \in PS(V)$.

**Definizione 53** (Traslazione)**.** Sia $V$ spazio vettoriale e $v \in V$. Si dice traslazione (di $v$) l'applicazione: $V \xrightarrow{\tau_v} V$ con la legge: $\forall w \in V$, $\tau_v(w) = w + v$.

*Osservazione* 65. $\tau_v$ è lineare $\Leftrightarrow v = 0$.

**Proposizione 40.** *Sia $T(V) = \{traslazioni\ in\ V\}$. Allora $T(V)$ è un gruppo abeliano di trasformazioni isomorfo a $(V, +)$.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo intanto che è un sottogruppo:

- $r_0 = id \in T(v)$.
- $\tau_v \circ \tau_w = \tau_{v+w} = \tau_v \circ \tau_w$.
- L'applicazione $V \longrightarrow T(V)$ che associa ad ogni vettore $v \in V$ la traslazione $\tau_v \in T(V)$, è isomorfismo.

**Definizione 54** (Azione di un gruppo)**.** Sia $G$ un gruppo. Si chiama azione di $G$ su un insieme $X$ ogni omomorfismo:

$$G \xrightarrow{\phi} S(X)$$

In particolare l'azione si dice transitiva se, $\forall x, y \in X,\ \exists g \in G$ tale che $\phi(g)(x) = y$.

*Osservazione* 66. $T(V)$ agisce su $V$ in modo transitivo:

$$\forall v, w \in V,\ \exists \tau \in T(V)\ t.c.\ \tau(v) = w$$

Basta infatti prendere $\tau = \tau_{w-v}$.

**Il gruppo** $Isom(V, d)$

*Riflessione* 40. Fino ad ora ci siamo interessati alle isometrie lineari: delle applicazioni che mantenessero il prodotto scalare e che fossero anche lineari. Possiamo interessarci a qualcosa di un po' più generale.

**Definizione 55** (Isometrie affini)**.** Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo e $d$ la distanza indotta da $\phi$. Allora si dice:

$$Isom(V, d) = \left\{ V \xrightarrow{f} V \,\middle|\, \forall P, Q \in V,\ d(P, Q) = d(f(P), f(Q)) \right\}$$

*Osservazione* 67. Conosciamo già alcuni sottogruppi di $Isom(V, d)$.

- $O(V, \phi) \subseteq Isom(V, d)$.
- $T(V) \subseteq Isom(V, d)$.
- $\forall v \in V,\ \forall f \in O(V, \phi),\ \tau_v \circ f \in Isom(V, d)$.

**Lemma 5.** *$\forall v \in V,\ \forall f \in O(V, f)$ (in realtà basterebbe $f \in GL(V)$) abbiamo:*

$$f \circ \tau_v = \tau_{f(v)} \circ f$$

**Dimostrazione.**

$$(f \circ \tau_v)(v) = f(x + v) = f(x) + f(v) = \left(\tau_{f(v)} \circ f\right)(x)$$

**Proposizione 41.** *Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo. Allora:*

$$S = \{\tau_v \circ f \mid v \in V,\ f \in O(V, \phi)\}$$

*è un gruppo rispetto alla composizione.*

**Dimostrazione.** Basta in pratica dimostrare la chiusura per composizione. $\forall v, \in V,\ \forall f, g \in O(V, \phi)$ abbiamo:

$$(\tau_v \circ f) \circ (\tau_w \circ g) = \tau_v \circ (f \circ \tau_w) \circ g = \tau_v \circ \tau_{f(w)} \circ f \circ g = \tau_{v+f(w)} \circ (f \circ g)$$

Infatti gli altri punti della definizione sono balali:

- $id \in S$
- $(\tau_v \circ f)^{-1} = \tau_{-f^{-1}(v)} \circ f^{-1}$

# Esercitazione

### Algoritmo di Gram-Schmidt

*Riflessione* 41. Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo. Se abbiamo $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di $V$, l'algoritmo di Gram-Schmidt consente di trarre da questo una base ortogonale che può essere facilmente resa ortonormale. Prendiamo infatti $C = \{w_1, \ldots, w_n\}$ dove:

$$\forall i_1^n,\ w_i = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\phi(v_i, w_j)}{\phi(w_j, w_j)} w_j$$

Questa base è ortogonale per costruzione e sappiamo renderla ortonormale dividendo ogni vettore per la sua norma.

*Osservazione* 68. Ci sono diversi aspetti interessanti di questo algoritmo:

- Funziona $\forall \phi \in PS(V)$ ma, in generale, si blocca al primo vettore isotropo.
- La bandiera di $C$ è uguale alla bandiera di $B$.
- $M = \mathfrak{M}_{B,C}(id)$ è una matrice triangolare superiore con solo 1 nella diagonale, ha quindi determinante 1.

**Esempio 30.** Consideriamo $(\mathbb{R}^3, \phi)$, con $\phi$ il prodotto scalare standard e la base: $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ con:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Vediamo la base che ci fornisce l'algoritmo:

$$\begin{aligned}
w_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \\
w_2 &= \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{\phi(v_2, w_1)}{\phi(w_1, w_1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \\
w_3 &= \begin{pmatrix} -1 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} - \frac{\phi(v_3, w_1)}{\phi(w_1, w_1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\phi(v_3, w_2)}{\phi(w_2, w_2)} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Per avere una base ortonormale prendiamo

$$C' = \{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_1}{\|w_1\|} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Vediamo di trovare le varie matrici di cambio di base:

- Non è difficile trovare la matrice $M = \mathfrak{M}_{B,C'}(id)$, infatti $\forall v \in V,\ v = \phi(v, u_1)u_1 + \phi(v, u_2)u_2 + \phi(v, u_3)u_3$. Quindi:

$$M = \begin{pmatrix} \phi(v_1, u_1) & \phi(v_2, u_1) & \phi(v_3, u_1) \\ 0 & \phi(v_2, u_2) & \phi(v_3, u_2) \\ 0 & 0 & \phi(v_3, u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -10 \\ 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

- Troviamo abbastanza facilmente anche $N = \mathfrak{M}_{C',Can}(id)$; inoltre questa matrice è la matrice di cambiamento d ibase tra due basi ortonormali, quindi è ortogonale. Abbiamo quindi:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

- Infine abbiamo:

$$A = \mathfrak{M}_{B,Can}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 5 & -5 & -10 \\ 0 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Possiamo osservare che abbiamo trovato un modo per scrivere:

$$A = NM$$

Con $N$ ortogonale e $M$ triangolare superiore con valori strettamente positivi sulla diagonale. Questa forma viene chiamata decomposizione $QR$ della matrice $A$ ed è particolarmente utile.

*Osservazione* 69. Sia $A \in GL(n, \mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ e supponiamo di dover risolvere il sistema:

$$Ax = b$$

Possiamo farlo con i metodi che conosciamo, ma se avessimo $A = NM$ con $N \in O(n)$ e $M \in GL(n, \mathbb{R})$ matrice triangolare superiore con valori positivi sulla diagonale. Potremmo scrivere:

$$Ax = b \Leftrightarrow NMx = b \Leftrightarrow Mx = {}^{\tau}Nb$$

Inoltre $M$ è già scalinata ed è facile trovare ${}^{\tau}N$ data $N$. Quindi in pratica questa decomposizione ci permette di ridurre un qualunque sistema a un sistema lineare. Per questo questo metodo è utilizzato dai computer per fare questi calcoli.

**Proposizione 42.** *Siano $A, B \in S(n, \mathbb{R})$ tali che $AB = BA$. Allora $\exists P \in O(n)$ tale che:*

$${}^{\tau}PAP = D \qquad\qquad {}^{\tau}PBP = D'$$

*con $D$ e $D'$ diagonali. Cioè esiste $B$ una base ortonormale di $\phi$ (prodotto scalare standard) di autovettori sia per $A$ che per $B$.*
*Si può dire equivalentemente che, dato $(V, \phi)$ euclideo e $f, g \in End(V)$ autoaggiunti, esiste $B$ base ortonormale di $\phi$ di autovettori per $f$ e per $g$.*
*Vediamo due dimostrazioni:*

**Dimostrazione.** $A$ e $B$ sono diagonalizzabili e commutano, esiste quindi una base $B$ di autovettori. Esiste quindi $M \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che:

$$MAM^{-1} = D \qquad\qquad MBM^{-1} = D'$$

con $D$ e $D'$ diagonali. Vediamo cosa succede applicando G-S alla base $B$. Chiaramente otterremmo una base $C$ ortonormale, avremmo inoltre che $\mathfrak{M}_{B,C}(id) = L$, con $L$ matrice triangolare superiore avente sulla diagonale solo valori strettamente positivi. Possiamo scrivere quindi:

$$LMAM^{-1}L^{-1} = T \qquad\qquad LMBM^{-1}L^{-1} = T'$$

Possiamo dire certamente che $T$ e $T'$ sono triangolari, infatti G-S conserva le bandiere. Ma consideriamo a questo punto che $LM$ è la matrice del cambio di base tra due basi ortonormali, quindi deve essere una matrice ortogonale, quindi, interpretando l'ultima uguaglianza, abbiamo che $T$ e $A$; $T'$ e $B$ sono tra di loro congrue. Ma $A$ e $B$ sono simmetriche, quindi lo sono anche $T$ e $T'$. Ma una matrice simmetrica e triangolare è per forza diagonale. Quindi la base $C$ è la base cercata.

**Dimostrazione.** Sappiamo che $A$ e $B$ sono simmetriche e diagonalizzabili, chiamiamo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di $A$. Abbiamo allora:

$$V = V_{\lambda_1}(A) \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} V_{\lambda_k}(A)$$

Ma sappiamo anche che $A$ e $B$ commutano, quindi $\forall i_1^k,\ V_{\lambda_i}(A)$ è $B$ invariante. Quindi in particolare possiamo considerare separatamente le varie restrizioni $B\mid_{V_{\lambda_i}(A)}$. Vediamo cosa abbiamo:

- $B$ è autoaggiunto rispetto a $\phi$ (prodotto scalare standard). Quindi la sua restrizione rimane autoaggiunta.

- La restrizione di $\phi$ è definita positiva.

Per il teorema spettrale allora esiste una base ortogonale di autovettori per la restrizione (di autovettori per $B$, ma sarà anche di autovettori per $A$, visto che $A\mid_{V_{\lambda_i}(A)} = \lambda_i id\mid_{V_{\lambda_i}(A)}$, quindi ogni base è una base di autovettori per $A$.

*Osservazione* 70. Sia $(V, \phi)$ euclideo e $\phi \in PS(V)$. Allora abbiamo dimostrato che $\exists B$ base ortonormale per $\phi$ e ortogonale per $\psi$. Sia allora $C$ base di $V$. Consideriamo:

$$M = \mathfrak{M}_C(\phi) \qquad\qquad A = \mathfrak{M}_C(\psi)$$

Allora sappiamo che $\exists P \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che:

$${}^{\tau}PMP = I \qquad\qquad {}^{\tau}PAP = D$$

Con $D$ diagonale. Ma ci chiediamo quanto possa valere $p_B(t)$. Sappiamo che:

$$p_B(t) = det\,({}^{\tau}P(A - \lambda M)P) = det^2\ (P)\ det(A - \lambda M)$$

Quindi abbiamo che $Sp(D) = \{radici\ di\ det(A - \lambda M)\}$

**Esercizio 31.** Sia $V = \mathbb{R}^3$, Prendiamo:

$$\mathfrak{M}_{Can}(\phi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = M, \quad \sigma(M) = (3, 0, 0)$$
$$\mathfrak{M}_{Can}(\psi) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A, \quad \sigma(A) = (2, 0, 1)$$

Prendiamo $B$ base ortonormale per $\phi$, avremo allora che $\mathfrak{M}_B(\psi)$ è una matrice simmetrica, quindi $\exists! f$ autoaggiunta tale che $\mathfrak{M}_B(f) = \mathfrak{M}_B(\psi)$. Abbiamo che $det(A - \lambda M) = 3\lambda(1-\lambda)^2$ quindi alla fine avremo sulla diagonale due 1 e uno 0. Utilizziamo l'algoritmo di G-S rispetto a $\phi$ sulla base canonica e otteniamo quindi $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$:

$$B' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

Abbiamo quindi:

$$\mathfrak{M}_{B'}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo un autovettore, ma dobbiamo trovare gli altri due; sappiamo però che uno è relativo a 0 e l'altro a 3 (sarebbe a 1 ma abbiamo diviso per 3). Quindi quello che dobbiamo fare è trovare il nucleo (e poi il suo ortogonale) di $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Ma:

$$Ker \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

E quindi:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \in V_3 \tag{1}$$

Prendiamo quindi per la nuova base:

$$w_1 = e_1$$
$$w_2 = \sqrt{2} v_2 + v_3$$
$$w_3 = v_2 - \sqrt{2} v_3$$

# Lezione 38

## Teoria

*Riflessione* 42. La scorsa lezione abbiamo fatto dei ragionamenti circa:

$$\{\tau_v \circ f \mid v \in V,\ f \in O(V, \phi)\}$$

Abbiamo infatti visto che questo è un gruppo con la composizione (sarebbe un gruppo anche con $f \in GL(V)$).

*Osservazione* 71. Chiamiamo:

$$\mathcal{A}(V) = \{\tau_v \circ f \mid v \in V,\ f \in GL(V)\}$$

Prima di riuscire a studiare questo gruppo dobbiamo lavorare molto e introdurre nuovi concetti.

**Teorema 19.**

$$\{\tau_v \circ f \mid v \in V,\ f \in O(V, \phi)\} = Isom(V, d)$$

**Dimostrazione.** '$\subseteq$' Ovvio.

'$\supseteq$' Abbiamo due casi:

- Se $f(0) = 0$ abbiamo dimostrato che $f \in O(V, \phi)$ (era una delle condizioni equivalenti per essere isomorfismo).
- $f(0) = v \neq 0$. Consideriamo allora che $g = \tau_{-v} \circ f$ è sempre isometria (composizione di isometrie) e inoltre $g(0) = 0$. Possiamo quindi scrivere: $f = \tau_v \circ g$, con $g \in O(V, \phi)$.

### Incontro con gli spazi affini

*Riflessione* 43. La struttura di spazio affine può essere vista e considerata a diversi livelli di generalità: è di per sè una struttura molto astratta ma noi la vediamo solo in una particolare situazione.
Per farlo ci è necessario ripensare il nostro concetto di spazio vettoriale: quando lo abbiamo definito abbiamo detto che esso è un insieme con una certa struttura, e poi ci siamo concentrati sulla struttura, non pensando quasi più ad esso come ad un insieme. Dobbiamo invece ora essere capaci di pensare gli spazi vettoriali come insiemi, dobbiamo riuscire a vederli separatamente sia come insiemi semplici, senza struttura, sia come insiemi sui quali sappiamo fare somme, prodotti

per scalari e molte altre cose. Dobbiamo quindi riuscire a distinguere queste due visioni passando molto velocemente da una all'altra, spesso anche nella stessa equazione.
La distinzione è complicata ulteriormente dal fatto che, anche quando intendiamo $V$ solo come un insieme, utilizziamo (per praticità) i concetti di somma e prodotto per scalari che ci sono forniti dalla struttura di spazio vettoriale; quindi il frequente utilizzo della struttura soggiacente all'insieme rischia di confondere i due concetti: per non appesantire eccessivamente la notazione faremo somme tra elementi di un insieme (che in teoria non sappiamo assolutamente come fare) forti della conoscenza della struttura vettoriale che soggiace a $V$ inteso come insieme.
Per rendere più facile la divisione chiameremo punti gli elementi di $V$ inteso come insieme e vettori gli stessi elementi di $V$, inteso questa volta come spazio vettoriale (i vettori saranno indicati (quando è possibile confondersi) con una barra sotto di essi).

*Riflessione* 44. Sia $V$ un $\mathbb{K}$ spazio vettoriale. Sia $V \times V \xrightarrow{F} V$ che associa alla coppia di punti $(P, Q)$ (quindi il dominio è il prodotto cartesiano di due insiemi) il vettore $\underline{v} = Q - P = \vec{PQ}$ (quindi il codominio è $V$ inteso come spazio vettoriale). Quando parliamo di differenza $Q - P$ dobbiamo necessariamente fare ricorso alla struttura di $V$ come spazio vettoriale (che soggiace al $V$ del dominio inteso come insieme).
Se pensiamo ora a $V$ come spazio vettoriale abbiamo: $\tau_{\underline{v}}(P) = Q$. Quindi abbiamo appena associato ad una coppia di punti una traslazione nello spazio vettoriale. Vediamo che valgono le seguenti proprietà:

1) $\forall P \in V,\ \forall \underline{v} \in V,\ \exists! Q \in V\ t.c.\ \vec{PQ} = \underline{v}$.
2) (Relazione di Chasles) $\forall P, Q, R \in V$,
$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$$

Possiamo inoltre fissare uno dei due punti di $V$ per ottenere: $V \xrightarrow{F_P} V$, applicazione che associa ad ogni punto $Q$ il vettore $Q - P = \vec{PQ}$. Non è difficile vedere che, fissato $P$, $F_P$ è un'applicazione bigettiva che ha come nucleo $P$. Inoltre, $\forall \underline{v} \in V,\ F_P^{-1}(\underline{v}) = P + v$.
Visto che $F_P(P) = 0$ possiamo usare questa applicazione per dare all'insieme $V$ una struttura simile a quella di $V$ spazio vettoriale, scegliendo $P$ come punto privilegiato; questa applicazione ci permette infatti di fare diverse operazioni: volendo sommare due punti possiamo, attraverso di essa, trovare i vettori associati, farne la somma, e tornare indietro per trovare il punto che possiamo definire somma. Quindi questa applicazione aggiunge qualcosa al nostro insieme $V$.
Vediamo di dare un po' di generalità a quanto detto fino ad ora.

**Definizione 56** (Spazio affine)**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale. Un insieme $A$ (anche vuoto) si dice spazio affine su $V$ se $\exists A \times A \xrightarrow{F} V$ applicazione che associa ad ogni coppia di punti $(P, Q)$ un vettore $v$ denotato $\vec{PQ}$ tale che:

1) $\forall P \in A,\ \forall v \in V,\ \exists! Q \in A\ t.c.\ \vec{PQ} = v$.
2) $\forall P, Q, R \in A,\ \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

Poniamo inoltre $dim\ A = dim\ V$ se $A \neq \varnothing$, altrimenti $dim\ A = -1$.
Si nota che, banalmente $V$ è spazio affine su se stesso.

Ricordiamo una definizione che avevamo già dato:

**Definizione 57** (Sottospazio affine)**.** Sia $V$ spazio vettoriale. $H \subseteq V$ si dice sottospazio affine di $V$ se $\exists P_0 \in H$ ed esiste $W$ sottospazio vettoriale di $V$ tali che:

$$H = P_0 + W = \{P_0 + w \ t.c.\ w \in W\}$$

Conveniamo inoltre di ritenere un sottospazio affine anche l'insieme vuoto.

*Osservazione* 72. Quindi

$$H = F_{P_0}^{-1}(W)$$

Ma cosa significa? $F_{P_0}$ è un'applicazione che va dall'insieme $V$ a $V$ considerato come spazio vettoriale. La controimmagine del vettore nullo è il punto $P_0$. Possiamo quindi utilizzare $F_P$ (fissato un qualunque $P$ dell'insieme) per rimontare sull'insieme la struttura di spazio vettoriale che è in $V$ inteso come spazio vettoriale. Quindi posso, per ogni punto dell'insieme, rimontare una struttura aderente a quella dello spazio vettoriale $V$ attraverso l'applicazione vista.

Riprendiamo quanto già dimostrato quando parlammo la prima volta di sottospazi affini.

**Proposizione 43.** *Sia $H = P + W$ un sottospazio affine di $V$. Allora:*

*1)* $W = \{P - Q \mid P, Q \in H\}$*. Cioè il sottospazio $W$ è univocamente determinato da $H$, è quindi ben posta la definizione di giacitura e chiameremo $W = W_H$ la giacitura di $H$.*

*2)* $\forall P \in H,\ H = P + W$*.*

**Definizione 58** (Dimensione (sottospazio affine))**.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e $H$ un sottospazio affine di $V$ di giacitura $W_H$. Allora si dice

$$dim\ H = \begin{cases} dim\ W_H \Leftarrow H \neq \varnothing \\ -1 \Leftarrow H = \varnothing \end{cases}$$

Inoltre $H$ è detto:

- Retta affine: se $dim\ H = 1$.

- Piano affine: se $dim\ H = 2$.

- Iperpiano affine: se $dim\ H = n - 1$.

*Osservazione* 73. L'intersezione di due ssa. è un ssa.

*Dimostrazione.* Siano infatti $H, L$ sottospazi affini con un'intersezione non nulla, avremo allora che $\exists P \in V\ t.c.\ P \in H \cap L$. Allora:

$$H = P + W_H \qquad\qquad L = P + W_L$$

Quindi $H \cap L = P + (W_H \cap W_L)$ è sottospazio affine. Abbiamo in particolare:

$$W_{H \cap L} = W_H \cap W_L$$

**Definizione 59** (Parallelismo e incidenza)**.** Siano $H, L$ sottospazi affini. Allora questi si dicono:

- Incidenti: se $H \cap L \neq \varnothing$.
- Parallali: se $W_H \subseteq W_L$ oppure $W_L \subseteq W_H$.

*Osservazione* 74. Il parallelismo non è una relazione di equivalenza.

**Combinazioni affini**

Continuiamo a cercare di rimontare sugli spazi affini le strutture che conoscevamo degli spazi vettoriali.

**Definizione 60** (Combinazione affine)**.** Sia $V$ uno spazio affine (con $V$ un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale). Dati $P_1, \ldots, P_k \in V$ e $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$ *t.c.* $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$, si chiama combinazione affine dei punti $P_i$ con coefficienti $t_1, \ldots, t_k$ il punto:

$$t_1P_1 + \ldots + t_kP_k$$

*Osservazione* 75. Ma perché è necessario aggiungere che: $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$? Abbiamo che, $\forall P \in V$,

$$\begin{aligned} t_1P_1 + \ldots + t_kP_k = 0P + t_1P_1 + \ldots + t_kP_k &= \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right) P + \sum_{i=1}^{k} t_iP_i \\ &= P + \sum_{i=1}^{k} t_i(P_i - P) = P + \sum_{i=1}^{k} t_i\vec{PP_i} \end{aligned}$$

Abbiamo quindi:

$$t_1P_1 + \ldots + t_kP_k = F_P^{-1}\left(\sum_{i=1}^{k} t_i\vec{PP_i}\right)$$

Questa, semplicemente un'osservazione nel caso di $V$, diventa la definizione di combinazione affine di punti in uno spazio affine $A$ tramite $F_P$. Quello che dobbiamo fare infatti è:

- Si prendono le immagini dei punti ottenute tramite $F_P$, ossia i vettori $\vec{PP_i}$.
- Si considera in $V$ la combinazione lineare $\sum t_i\vec{PP_i}$.
- La si rimonta via $F_P$ in $P + \sum t_i\vec{PP_i}$.

L'ipotesi $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$ serve quindi perché il risultato non dipenda dalla scelta del punto $P$: non è immediato da dimostrare, ma comunque $\sum_{i=1}^{k} t_i = 1$ è sufficiente a garantirlo.

**Esempio 31.** Siano $P, Q \in V$ spazio affine su $V$, $\mathbb{K}$ spazio vettoriale con $char\ K \neq 2$. Chiamiamo punto medio tra $P$ e $Q$ il punto:

$$M = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$$

L'esistenza di questo punto, prima della definizione, non era scontata, ed è garantita dal fatto che è una combinazione affine (infatti la somma di $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ è 1).

**Notazione.** Indicheremo:

$$comb_a\left(P_1, \ldots, P_k\right) = \{\text{comb. affini di } P_1, \ldots, P_k\}$$

**Esempio 32.** Sia $V = \mathbb{R}^n$ e $P, Q \in V$ dei punti distinti. Allora:

$$\begin{aligned} comb_a\left(P, Q\right) &= \{zP + tQ \mid t + z = 1\} = \{(1-t)P + tQ \mid t \in \mathbb{K}\} \\ &= \{P + t(Q - P) \mid t \in \mathbb{K}\} \end{aligned}$$

E questa la conosciamo come retta passante per i punti $P$ e $Q$.

**Esempio 33.** Sia $V = \mathbb{R}^n$ e $P, Q, R \in V$ dei punti non allineati.
Abbiamo allora che $comb_a\left(P, Q, R\right) =$ piano passante per $P$ e $Q$ e $R$.

# Esercitazione

### Le isometrie come riflessioni

*Osservazione* 76. Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo. $\forall v \in V$ la riflessione $r_v$ fatta rispetto al vettore $v$ è data da:

$$\forall x \in V,\ r_v(x) = x - 2\frac{\phi(x, v)}{\phi(v, v)}v$$

Notiamo facilmente che le riflessioni sono isometrie di $\phi$. Inoltre:

$$Fix(r_v) = Span\left(\{v\}\right)^{\perp} = V_1(r_v)$$

Inoltre $r_v(v) = -v \Rightarrow V_{-1}(r_v)$ ha 1.

*Osservazione* 77. Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo di dimensione $n$ e $f \in End(V)$ un' isometria. Se sappiamo che $dim\ Fix(f) = n-1$ allora $\exists w \in Fix(f)^{\perp}$ *t.c.* $f = r_w$. Infatti sappiamo che possiamo avere, visto che $f$ è isometria, $f(w) = w$ (assurdo, perchè $w \notin Fix(f)$) oppure $f(w) = -w$; sarà vera questa seconda.

**Proposizione 44.** *Sia $(V, \phi)$ uno spazio euclideo di dimensione $n$, $f \in End(V)$ un' isometria e $k = dim\ Fix(f) = dim\ V_1(f)$. Allora $f$ può essere scritta come composizione di $n - k$ riflessioni.*

**Dimostrazione.** Per induzione su $n-k$.

$\iota$) $n-k=1$. Equivalente all'Osservazione 77.

$\iota\iota$) Abbiamo $f$ isometria per $\phi$ tale che $dim\ Fix(f) = k < n \Rightarrow \exists v \in Fix(f)^{\perp}$ *t.c.* $f(v) \neq v$. Consideriamo quindi: $w = f(v) - v$ e vediamo cosa possiamo dire di $g = r_w \circ f$. Possiamo vedere che $v \in Fix(g)$ ma, in linea generale, non possiamo dire come agisce $g$ sui vettori di $Fix(f)$. Convinciamoci intanto che:

$$g(v) = f(v) - \frac{\phi(f(v), w)}{\phi(w, w)} w = v$$

Ma vediamo come agisce su $x \in Fix(f)$.

$$g(x) = r_w(x) = x \Rightarrow x \in Fix(r_w) = Span\left(\{w\}\right)^{\perp}$$

Ma $v \in Fix(f)^{\perp}$ e (siccome $Fix(f)$ è $f$-invariante) $Fix(f)^{\perp}$ è $f$-invariante, quindi $f(v) - v \in Fix(f)^{\perp}$. Quindi:

$$Fix(f) \subseteq Span\left(\{w\}\right)^{\perp} = Fix(r_w) \ni x$$

Quindi $Span\left(\{v\}\right) \subseteq Fix(g) \supseteq Fix(f)$ e quindi $dim\ Fix(g) \geq k+1$. Tesi per induzione.

**Corollario 26.** *Le isometrie sono generate dalle riflessioni.*

*Osservazione* 78. Mantenendo la notazione dell'ultima Proposizione. Vediamo che $dim\ Fix(g) = k+1$. Infatti è importante avere una stima precisa del cambiamento della dimensione dei punti fissi.

$$\begin{gathered} x \in W = Fix(g) \cap Fix(r_w) \Rightarrow g(x) = x \Rightarrow r_w(f(x)) = x \\ \Leftrightarrow r_w(f) = f(x) \Rightarrow x = f(x) \Rightarrow x \in Fix(f) \end{gathered}$$

Quindi:

$$Fix(f) = W = Fix(g) \cap Fix(r_w)$$

Abbiamo quindi due possibilità:

$$k = dim\ Fix(f) = dim\ Fix(g) \cap Fix(r_w) = \begin{cases} dim\ Fix(g) \Rightarrow Assurdo \\ dim\ Fix(g) - 1 \end{cases}$$

### Geometria affine euclidea

*Riflessione* 45. Sia $(V, \phi) = (\mathbb{R}^n, <,>)$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $W \subseteq \mathbb{R}^n$ l' iperpiano:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \phi\left( \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = 0 \right\}$$

Quindi $W = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp}$

Prendiamo ora $Q \in \mathbb{R}^n$, vogliamo trovare $L$: il traslato di $W$ che passa per $Q$. Abbiamo che: $L = \tau_Q(W)$; quindi le equazioni per $L$ sono:

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \phi\left( \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - Q \right) = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \phi\left( \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) = \phi\left( Q, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \right\} \end{aligned}$$

Se invece cerchiamo la retta $r$ ortogonale a $L$ passante per $P$ questa sarà:

$$r = P + Span\left( \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\} \right)$$

*Riflessione* 46. Siano $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, $W = Span\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$ e $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$. Consideriamo allora:

$$p(X) = det\ M_X = det \left( \begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ X & v_1 & \cdots & v_n \\ & & & \end{array} \right)$$

Abbiamo che:

- $\forall X \in \mathbb{R}^{n+1},\ p(X) = 0 \Leftrightarrow dim\ W < n$.
- Se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti allora esistono valori di $X$ per i quali $p(X)$ è diverso da 0 ed altri per i quali è uguale. Ma $p(X) = 0 \Rightarrow Span\left(\{v_1, \ldots, v_n, X\}\right)$ ha dimensione $n$, quindi c'è un vettore dipendente dagli altri; ma visto che $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, allora $X \in Span\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right)$. Quindi $X \in Span\left(\{v_1, \ldots, v_n\}\right) \Leftrightarrow p(X) = 0$.

Ma (ipotizzando che $v_1, \ldots, v_n$ siano indipendenti) come possiamo trovare $W^\perp$? Vediamo intanto come scrivere bene $W$. Abbiamo che:

$$W = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, p(X) = 0 \right\}$$

Quindi, detto $p(X) = a_1 x_1 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1}$ abbiamo:

$$W = \left\{ X \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, a_1 x_1 + \ldots + a_{n+1} x_{n+1} = 0 \right\} \Rightarrow W^\perp = Span\left( \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \right\} \right)$$

Ci basta quindi trovare la forma esplicita di $p(X)$. Cerchiamo $a_i$, vogliamo sapere quindi quanto vale il coefficiente relativo a $x_i$ nel determinante di $M_X$; per vederlo pensiamo allo sviluppo di Laplace secondo la prima colonna. Abbiamo che $x_i$ ha come coefficiente unicamente il determinante della sottomatrice ottenuta eliminando la prima colonna e la $i$-esima riga, quindi abbiamo che

$a_i = det\ M_{X_i}$ intendendo con $M_{X_i}$ il minore ottenuto da $M_X$ eliminando la prima colonna e la $i$-esima riga. Abbiamo anche quindi:

$$\forall i_1^{n+1},\ a_i = det \left( \begin{array}{c|c|c|c} e_i & v_1 & \cdots & v_n \end{array} \right)$$

# Lezione 39

## Teoria

*Riflessione* 47. Nella scorsa lezione abbiamo visto un caso particolare della struttura astratta che abbiamo indicato con spazio affine; abbiamo infatti esaminato gli spazi vettoriali come insiemi e quindi (formalmente) privati delle caratteristiche delle quali sappiamo che godono. Abbiamo poi visto come rimontare (scelto un punto privilegiato $P$), tramite l'applicazione $F_P$, la struttura di spazio vettoriale sullo spazio affine. Ma abbiamo imparato a fare diverse operazioni e abbiamo trovato diverse proprietà negli spazi vettoriali e vorremmo ritrovare tutte queste cose negli spazi affini. Visto che abbiamo analizzato per molto tempo le applicazioni lineari un obiettivo iniziale potrebbe essere quello di rimontare le combinazioni lineari. Abbiamo visto la scorsa lezione le combinazioni affini e ricordiamo di avere imposto che i coefficienti avessero come somma 1; siamo stati spinti a questo per rendere generale la combinazione affine: per renderla indipendente dal $P$ che scegliamo come origine.Vediamo di ritrovare un punto di unione tra spazio vettoriale e spazio affine e trovare qualcosa anche sulle combinazioni affini.

**Proposizione 45.** *Sia $\varnothing \neq H \subseteq V$. Allora:*

$$H \text{ ssa. di } V \Leftrightarrow H \text{ è chiuso per comb. affini}$$

**Dimostrazione.** Vogliamo ripristinare il parallelismo con il sottospazio vettoriale.

'$\Rightarrow$' Sia $H = P_0 + W$, $W$ ssv. di $V$; siano inoltre, $P_0 + w_1, \ldots, P_0 + w_k$ punti di $H$ e $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$ tali che $t_1 + \ldots + t_k = 1$. Allora:

$$\sum_{i=1}^{k} t_i(P_0 + w_i) = \sum_{i=1}^{k} t_i P_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i w_i = P_0 + Z$$

Ma $Z \in W$, quindi $P_0 + Z \in H$.

'$\Leftarrow$' Visto che $H \neq \varnothing$ sia $P_0 \in H$. Sia inoltre

$$W = \{w \in V \mid P_0 + w \in H\}$$

Possiamo quindi anche scrivere: $H = P_0 + W$. Basta quindi provare che $W$ è ssv. di $V$ per avere la tesi; dobbiamo cioè vedere che, $\forall w_1, w_2 \in W$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in W \Leftrightarrow P_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in H$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{cases} w_1 \in W \Rightarrow Q_1 = P_0 + w_1 \in H \\ w_2 \in W \Rightarrow Q_2 = P_0 + w_2 \in H \end{cases}$$

Ma $H$ è chiuso per combinazione affine, quindi:

$$\begin{aligned} P_0 + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 &= P_0 + \alpha_1(Q_1 - P_0) + \alpha_2(Q_2 - P_0) \\ &= (1 - \alpha_1 - \alpha_2)P_0 + \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 \end{aligned}$$

E questo appartiene ad $H$, visto che è combinazione affine di punti appartenenti ad $H$.

**Proposizione 46.** *Vale la seguente uguaglianza:*

$$comb_a\,(P_0, \dots, P_k) = P_0 + Span\,(\{P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0\})$$

**Dimostrazione.** Siano $t_0, \dots, t_k \in \mathbb{K}$ tali che $t_0 + \dots + t_k = 1$. Allora:

'$\subseteq$'

$$\sum_{i=0}^{k} t_i P_i = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right) P_0 + \sum_{j=1}^{k} t_j P_j = P_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i\,(P_i - P_0)$$

'$\supseteq$'

$$P_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i (P_i - P_0) = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right) P_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i P_i$$

Che è combinazione affine di $P_0, \dots, P_k$ e quindi appartiene a $comb_a\,(P_0, \dots, P_k)$.

**Corollario 27.** *Quindi $comb_a\,(P_0, \dots, P_k)$ è un sottospazio affine di giacitura $Span\,(\{P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0\})$.*

**Definizione 61.** $comb_a\,(P_0, \dots, P_k)$ viene detto sottospazio affine generato da $P_0, \dots, P_k$ ed è il più piccolo sottospazio affine di $V$ contenente $P_0, \dots, P_k$.

*Osservazione* 79.

$$dim\ comb_a\,(P_0, \dots, P_k) = dim\ Span\,(\{P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0\})$$

## Riferimenti affini

Vediamo di ripristinare una nozione di base sullo spazio affine.

**Definizione 62** (Affinemente indipendente)**.** I punti $P_0, \dots, P_k \in V$ si dicono affinemente indipendenti se:

$$dim\ comb_a\,(P_0, \dots, P_k) = dim\ Span\,(\{P_1 - P_0, \dots, P_k - P_0\}) = k$$

**Definizione 63** (Riferimento affine)**.** Se $dim\ V = n$ si dice riferimento affine di $V$ ogni insieme ordinato:

$$R = \{P_0, \dots, P_n\}$$

di $n + 1$ punti affinemente indipendenti.

*Osservazione* 80. Essendo $R$ un insieme ordinato, scelgo $P_0$ come punto privilegiato e $\{P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_0\}$ sono una base di $V$ inteso come spazio vettoriale. Viceversa se $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di $V$, allora $\forall P_0 \in V,\ S = \{P_0, P_0 + v_1, \ldots, P_0 + v_n\}$ è un riferimento affine per costruzione.

**Esempio 34.** Un banale riferimento affine in $\mathbb{K}^n$ è:

$$\{0, e_1, \ldots, e_n\}$$

che viene detto riferimento affine standard.

**Proposizione 47.** *Sia $R = \{P_0, \ldots, P_n\}$ un riferimento affine di $V$. $\forall P \in V,\ \exists! \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tali che:*

$$\begin{cases} \sum_0^n \alpha_i = 1 \\ P = \sum_0^n \alpha_i P_i \end{cases}$$

**Dimostrazione.** Per ipotesi $V = comb_a\,(P_0, \ldots, P_n)$ quindi chiaramente esiste una combinazione affine che corrisponde a $P$, vogliamo vedere che è unica. Sia quindi:

$$P = \sum_0^n \alpha_i P_i = \sum_0^n \beta_i P_i \quad con \sum_0^n \alpha_i = \sum_0^n \beta_i = 1$$

Possiamo allora scrivere:

$$P_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i (P_i - P_0) = P_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i (P_i - P_0)$$

Quindi abbiamo l'uguaglianza di due traslazioni di $P_0$, ma, per gli assiomi con i quali abbiamo definito uno spazio affine, $\exists!$ vettore che sposta $P_0$ in un determinato vettore. Quindi (per l'assioma e non perché abbiamo semplificato un $P_0$) possiamo scrivere:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (P_i - P_0) = \sum_{i=1}^n \beta_i (P_i - P_0)$$

ma questa, appunto, è un'uguaglianza tra vettori e $P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_0$ sono indipendenti per ipotesi, abbiamo quindi che: $\forall i_1^n,\ \alpha_i = \beta_i$. Dunque anche $\alpha_0 = \beta_0$.

**Definizione 64** (Coordinate affini)**.** Mantenendo la notazione della Proposizione precedente si dicono (e sono ben definite) coordinate affini di $P$ rispetto al riferimento affine $R$:

$$[P]_R = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

*Osservazione* 81. Le coordinate affini $[P]_R$ sono le coordinate vettoriali del vettore $P - P_0$ nella base $\{P_1 - P_0, \ldots, P_n - P_0\}$.
Quindi in particolare in $\mathbb{K}^n$ le coordinate affini rispetto al riferimento affine standard coincidono con le coordinate vettoriali.

## Trasformazione affine

**Definizione 65** (Trasformazione affine)**.** Siano $V, W$ dei $\mathbb{K}$ spazi vettoriali. $V \xrightarrow{f} W$ si dice trasformazione affine se conserva le combinazioni affini.

**Definizione 66** (Isomorfismo affine)**.** Siano $V, W$ dei $\mathbb{K}$ spazi vettoriali. $V \xrightarrow{f} W$ trasformazione affine si dice isomorfismo affine se è biunivoca.

**Definizione 67** (Affinità)**.** Siano $V$ uno spazio vettoriale. $V \xrightarrow{f} V$ isomorfismo affine si dice affinità. Si definisce inoltre:

$$\text{Aff }(V) = \left\{ V \xrightarrow{f} V \textit{ t.c. } f \text{ affinità} \right\}$$

**Esempio 35.** Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$ e $R$ un riferimento affine di $V$. Allora: $V \xrightarrow{[\ ]_R} \mathbb{K}^n$ che associa al punto $P$ le sue coordinate affini $[P]_R$ è un isomorfismo affine. Questa applicazione infatti è biunivoca. Dobbiamo quindi solamente vedere che mantiene le combinazioni affini; una volta fatto questo avremo un corrispondente nello spazio affine dell'isomorfismo vettore-coordinate che avevamo negli spazi vettoriali. Vediamo una somiglianza pensando che questa applicazione manda i vettori del riferimento affine $R$ in $\{0, e_1, \ldots, e_n\}$. Quindi in pratica quello che facciamo è rendere $P_0$ il nuovo punto privilegiato e rimontare intorno ad esso la struttura di spazio vettoriale. Vediamo che in effetti questa applicazione biunivoca mantiene il prodotto scalare.
Siano $P_1, \ldots, P_r \in V$ e $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$ tali che $t_1 + \ldots + t_k = 1$; vogliamo dimostrare che:

$$[t_1P_1 + \ldots + t_kP_k]_R = t_1\,[P_1]_R + \ldots + t_k\,[P_k]_R$$

Sia $R = \{Q_0, \ldots, Q_n\}$; allora $[P_i]_R = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix}$ significa che

$$P_i - Q_0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(Q_j - Q_0)$$

Ossia:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} t_iP_i &= \left(1 - \sum_{i=1}^{k} t_i\right) + \sum_{j=1}^{k} t_jP_j = Q_0 + \sum_{i=1}^{k} t_i(P_i - Q_0) \\
&= Q_0 + \left(\sum_{i=1}^{k} t_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(Q_j - Q_0)\right)\right) = Q_0 + \left(\sum_{j=1}^{n}(Q_j - Q_0)\left(\sum_{i=1}^{k} t_ia_{ij}\right)\right)
\end{aligned}$$

Per cui:

$$[t_1P_1 + \ldots + t_kP_k]_R = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} t_ia_{i1} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} t_ia_{in} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{k} t_i\,[P_i]_R$$

**Esempio 36.** Le traslazioni sono affinità. Siano infatti $P_1, \ldots, P_r \in V$ e $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{K}$ tali che $t_1 + \ldots + t_k = 1$. Vogliamo dimostrare che, per ogni vettore $v \in V$:

$$\tau_v\left(\sum_{i=1}^{k} t_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{k} t_i \tau_v(P_i)$$

Infatti:

$$\begin{aligned}\tau_v\left(\sum_{i=1}^{k} t_i P_i\right) &= v + \sum_{i=1}^{k} t_i P_i = \left(\sum_{i=1}^{k} t_i\right) v + \sum_{i=1}^{k} t_i P_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} t_i (P_i + v) = \sum_{i=1}^{k} t_i \tau_v(P_i)\end{aligned}$$

*Osservazione* 82. Aff $(V)$ è un gruppo con la composizione di funzioni.

**Esempio 37.** Gli isomorfismi lineari sono affinità quindi:

- $T(V) \subseteq$ Aff $(V)$
- $GL(V) \subseteq$ Aff $(V)$

Quindi, per l'Osservazione precedente,

$$\mathcal{A}(V) = \{\tau_v \circ g \mid g \in GL(V)\} \subseteq \text{Aff } (V)$$

Cioè il gruppo di trasformazioni generate da $T(V)$ e da $GL(V)$ è un sottogruppo di Aff $(V)$.

**Proposizione 48.** *Se $V \xrightarrow{f} V$ è un'affinità e $f(0) = 0$ allora $f$ è lineare.*

**Dimostrazione.** Abbiamo che, $\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}f(t_1 v_1 + t_2 v_2) &= f((1 - t_1 - t_2)0 + t_1 v_1 + t_2 v_2) = (1 - t_1 - t_2) f(0) + t_1 f(v_1) + t_2 f(v_2) \\ &= t_1 f(v_1) + t_2 f(v_2)\end{aligned}$$

**Corollario 28.** *Sia $f \in$ Aff $(V)$. Allora $\exists! v \in V$, $\exists! g \in GL(V)$ tali che*

$$f = \tau_v \circ g$$

**Dimostrazione.** Sia $v = f(0)$. Allora prendiamo $g = \tau_{-v} \circ f$, questa affinità è tale che $g(0) = 0$. Quindi è lineare.

**Corollario 29.** *Possiamo quindi dire:*

$$\textit{Aff } (V) = \mathcal{A}(V)$$

*Abbiamo quindi che*

$$(\textit{Aff } (V), \circ)$$

*è un gruppo. In particolare, se $V = \mathbb{K}^n$,*

$$\textit{Aff } (\mathbb{K}^n) = \{X \longrightarrow AX + B \mid A \in GL(n, \mathbb{K}),\ B \in \mathbb{K}^n\}$$

*Riflessione* 48. Abbiamo visto che, in uno spazio vettoriale $V$ di dimensione $n$, data una base $B$, $\forall v_1, \dots, v_n \in V$ esiste un'unica applicazione lineare che manda i vettori della base in questi $n$ vettori, comunque noi possiamo deciderli. In particolare se gli $n$ vettori di arrivo sono linearmente indipendenti la nostra applicazione sarà un isomorfismo. In realtà noi, imponendo questi $n$ punti, ne imponiamo $n+1$, infatti deve essere $f(0) = 0$.
In uno spazio affine non abbiamo un vettore privilegiato quindi non c'è nulla che ci garantisce l'unicità di un affinità, anche posti i riferimenti affini in partenza e in arrivo.

**Proposizione 49.** *Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione $n$, $P_0, \dots, P_n$ e $Q_0, \dots, Q_n$ due $n+1$-uple di punti affinemente indipendenti. Allora esiste una e una sola affinità di $V$ tale che:*

$$\forall i_0^n, \; f(P_i) = Q_i$$

**Dimostrazione.** Poichè $\{P_0, \dots, P_n\}$ è un riferimento affine, ogni $P \in V$ si scrive in modo unico come

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i P_i \quad con \quad \sum_{i=0}^{n} a_i = 1$$

Poniamo allora (non possiamo fare altro se vogliamo che $f(P_i) = Q_i$):

$$f(P) = \sum_{i=0}^{n} a_i Q_i$$

Mostriamo che $f$ è un'affinità. Per farlo consideriamo l'isomorfismo lineare $V \xrightarrow{\phi} V$ tale che $\phi(P_i - P_0) = Q_i - Q_0$ (è isomorfismo perché trasforma basi in basi). Allora:

$$\begin{aligned} f(P) = f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i P_i\right) &= \sum_{i=0}^{n} a_i Q_i = Q_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i (Q_i - Q_0) \\ &= Q_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(P_i - P_0) = f(P_0) + \phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i (P_i - P_0)\right) \\ &= f(P_0) + \phi(P - P_0) \end{aligned}$$

Quindi abbiamo:

$$f = \tau_{Q_0} \circ \phi \circ \tau_{-P_0} \in \text{Aff } (V)$$

*Osservazione* 83. Un'affinità di $\mathbb{R}^n$ porta rette parallele in rette parallele. Sia infatti $f(X) = AX + B$ un'affinità ($A \in GL(n, \mathbb{R})$) e

$$r = \{\lambda C + P_0 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

una retta di giacitura *Span* $(\{C\})$. Allora abbiamo:

$$f(\lambda C + P_0) = A(\lambda C + P_0) + B = \lambda AC + AP_0 + B = \lambda(AC) + f(P_0)$$

Quindi $f(r)$ è la retta di giacitura *Span* $(\{\phi(C)\})$ passante per $f(P_0)$

## Aff $(\mathbb{K}^n)$

*Riflessione* 49. Abbiamo già visto che:

$$\text{Aff }(\mathbb{K}^n) = \{X \longrightarrow MX + N \mid M \in GL(n,\mathbb{K}), N \in \mathbb{K}^n\}$$

Ma possiamo anche vedere Aff $(\mathbb{K}^n)$ come un sottogruppo di $GL(N+1,\mathbb{K})$. Sia infatti

$$H = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \,\middle|\, x_{n+1} = 1 \right\}$$

Abbiamo allora che $H$ è ssa. di $\mathbb{K}^{n+1}$ di giacitura:

$$W_H = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n+1} \,\middle|\, x_{n+1} = 0 \right\}$$

Consideriamo allora l'applicazione $\mathbb{K}^n \xrightarrow{f} H$ con la legge: $f(X) = \left(\begin{smallmatrix} X \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Visto che

$$\left(\begin{smallmatrix} X \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} X \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Abbiamo che $f = \tau_{e_{n+1}} \circ \phi$ dove $\mathbb{K}^n \xrightarrow{\phi} W_h$ è un isomorfismo lineare con la legge $X \xrightarrow{\phi} \left(\begin{smallmatrix} X \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Quindi abbiamo che:

$$\mathbb{K}^n \underset{aff.}{\sim} H$$

Consideriamo allora

$$G(H) = \left\{ g \in GL(K^{n+1}) \mid g(H) = H \right\}$$

Come sono fatte le matrici associate alle applicazioni di $G(H)$? Sia $g \in G(H)$ allora:

$$g(Y) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline \tau_P & q \end{array}\right) Y$$

Con $M \in \mathcal{M}(n,\mathbb{K}),\ N, P \in \mathbb{K}^n,\ q \in \mathbb{K}$. Se $Y = \left(\begin{smallmatrix} X \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in H$ allora:

$$g\left(\left(\begin{smallmatrix} X \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline \tau_P & q \end{array}\right) \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} * \\ \hline \tau_P X + q \end{array}\right)$$

Quindi dobbiamo avere $\forall X \in \mathbb{K}^n,\ \tau_P X + q = 1$ e quindi deve essere $P = 0$ e $q = 1$. Abbiamo allora:

$$G(H) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \,\middle|\, M \in GL(n,\mathbb{K}) \right\}$$

**Notazione.** Indicheremo:

$$\left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \widetilde{M}_N$$

**Proposizione 50.** *$(G(H), \cdot)$ è un sottogruppo di $GL(n+1, \mathbb{K})$.*

**Dimostrazione.** Siano $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K}),\ N_1, N_2 \in \mathbb{K}^n$. Allora:

$$\left(\begin{array}{c|c} M_1 & N_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} M_2 & N_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} M_1M_2 & M_1N_2 + N_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

**Proposizione 51.** *L'applicazione*

$$(Aff\ (\mathbb{K}^n), \circ) \xrightarrow{L} (G(H), \cdot)\ t.c.\ (X \to MX + N) \xrightarrow{L} \widetilde{M}_N$$

*è un isomorfismo di gruppi (e quindi Aff $(\mathbb{K}^n)$ è isomorfo a un sottogruppo di $GL(n+1, \mathbb{K})$).*

**Dimostrazione.** Siano $f_1, f_2 \in$ Aff $(\mathbb{K}^n)$. Dimostriamo che è un omomorfismo.

$$f_1(X) = M_1X + N_1 \qquad\qquad f_2(X) = M_2X + N_2$$

Allora possiamo scrivere:

$$(f_1 \circ f_2)(X) = f_1(M_2X + N_2) = M_1(M_2X + N_2) + N_1 = (M_1M_2)X + (M_1N_2 + N_1)$$

Quindi (sapendo che):

$$L(f_1) = \widetilde{M_1}_{N_1} \qquad\qquad L(f_2) = \widetilde{M_2}_{N_2}$$

possiamo scrivere:

$$L(f_1) \cdot L(f_2) = \widetilde{M_1}_{N_1} \cdot \widetilde{M_2}_{N_2} = \widetilde{M_1M_2}_{M_1N_2+N_1} = L(f_1 \circ f_2)$$

Inoltre $L$ è bigettiva.

## Equivalenza affine

**Definizione 68** (Equivalenza)**.** Sia $G$ un gruppo di trasformazioni di $\mathbb{K}^n$. Due sottoinsiemi $F_1, F_2$ di $\mathbb{K}^n$ sono detti $G$-equivalenti se $\exists g \in G$ tale che

$$g(F_1) = F_2$$

**Definizione 69** (Equivalenza affine e metrica)**.** Siano $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{K}^n$ dei sottoinsiemi di $\mathbb{K}^n$. Questi sono detti affinemente (risp. metricamente) equivalenti se $\exists g \in$ Aff $(\mathbb{K}^n)$ (risp. $g \in Isom(\mathbb{K}^n)$) tale che

$$g(F_1) = F_2$$

**Esempio 38.** Siano $F_1 = \{P_0, \ldots, P_k\}$, $F_2 = \{Q_0, \ldots, Q_k\}$ delle $k+1$-uple di vettori affinemente indipendenti. Allora $\exists g \in \text{Aff }(\mathbb{K}^n)$ tale che:

$$\forall i_0^k \; g(P_i) = Q_i$$

Quindi delle $j$-uple di vettori affinemente indipendenti sono sempre affinemente equivalenti.

**Esempio 39.** Siano $H_1, H_2$ iperpiani affini di $\mathbb{K}^n$. Allora $\exists g \in \text{Aff }(\mathbb{K}^n)$ tale che $g(H_1) = H_2$.
Infatti $H_1 = comb_a\,(P_0, \ldots, P_{n-1})$ e $H_2 = comb_a\,(Q_0, \ldots, Q_{n-1})$. Continua come l'Esempio precedente. Quindi due iperpiani affini sono affinemente equivalenti.

*Riflessione* 50. Data $\mathfrak{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di $\mathbb{K}^n$ come facciamo a sapere se due elementi della famiglia sono affinemente equivalenti?
Per risolvere questo problema cerchiamo fi fare una classificazione; cerchiamo cioè di trovare un insieme di 'modelli', una specie di forma canonica che ci permetta di indicare quali classi di equivalenza affine sono rappresentate nell'insieme. Cerchiamo cioè:

$$\{E_i\}_{i \in I}\,,\ E_i \in \mathfrak{F}$$

tali che:

1) $i \neq j \Rightarrow E_i, E_j$ non sono affinemente equivalenti.
2) $\forall F \in \mathfrak{F},\ \exists i \in I \ t.c.\ F \underset{aff.}{\sim} E_i$

# Esercitazione

*Riflessione* 51. Sia $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un iperpiano, abbiamo visto che questo può essere scritto come:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0 \right\}$$

per certi $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Questa scrittura ci permette di vedere che $W = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp}$, rispetto al prodotto scalare standard $(\phi)$ in $\mathbb{R}^n$.
Ma come ben sappiamo possiamo anche scrivere:

$$W = Span\,(\{w_1, \ldots, w_{n-1}\})$$

L'equazione cartesiana dello spazio vettoriale è data, come abbiamo visto la scorsa Esercitazione, da:

$$det\begin{pmatrix} x_1 & & & \\ \vdots & w_1 & \ldots & w_{n-1} \\ x_n & & & \end{pmatrix}$$

Se invece vogliamo scrivere un iperpiano affine $L$ (con giacitura $W$ e passante per $Q \in \mathbb{R}^n$) possiamo scrivere:

Parametrica: $L = Q + W = W + Span\left(\{w_1, \dots, w_{n-1}\}\right)$

Cartesiana:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \phi\left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right) = \phi\left( \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, Q \right) \right\}$$

Queste due scritture ci possono aiutare a determinare gli ortogonali.

**Esempio 40.** Sia $V = \mathbb{R}^3$ e $L$ sottospazio affine:

$$L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + Span\left( \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right)$$

L'equazione cartesiana di $L$ è data da:

$$det \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 3 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cerchiamo adesso la retta $r$ ortogonale a $L$ e passante per $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vogliamo intanto un vettore $v$ ortogonale alla giacitura di $L$, poi ne faremo lo *Span* e poi gli imporremo il passaggio per $P$. Abbiamo quindi:

$$v = det \begin{pmatrix} e_1 & 1 & 2 \\ e_2 & 1 & 1 \\ e_3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow v = 2e_1 - e_2 + e_3(-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

*Riflessione* 52. Sia $r \subseteq \mathbb{R}^n$ una retta affine, possiamo scrivere quindi:

Parametrica: $r = P + Span\left(\{v\}\right)$.

Cartesiana:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n-1,1}x_1 + \ldots + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \end{cases} \right\}$$

Ma, chiamando,

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} = {}^{\tau}R_1 \quad \dots \quad v_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{n-1,1} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix} = {}^{\tau}R_{n-1}$$

Abbiamo innanzitutto che $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono linearmente indipendenti, inoltre la giacitura di $r$ avrà equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} \phi\left(v_1, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = 0 \\ \vdots \\ \phi\left(v_{n-1}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = 0 \end{cases}$$

Cioè:

$Giac(r) = Span(\{v\}) = Span(\{v_1\})^{\perp} \cap \ldots \cap Span(\{v_{n-1}\})^{\perp} = Span(\{v_1, \ldots, v_{n-1}\})^{\perp}$

Quindi

$$Giac(r)^{\perp} = Span(\{v\})^{\perp} = Span(\{v_1, \ldots, v_{n-1}\})$$

**Esempio 41.** Consideriamo in $\mathbb{R}^3$, $r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + Span(\{213\})$. Cerchiamo il piano $H \perp r$ passante per $Q = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$. Sappiamo già che $Giac(H)$ ha equazione cartesiana $2x + y + 3x = 0$, ma dobbiamo traslare di $Q$, abbiamo quindi l'equazione $2(x-5) + (y-1) + 3(z-9) = 0$.
Prendiamo invece la retta $r'$ con equazioni cartesiane $\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ x-3z=2 \end{cases}$ La giacitura di $r'^{\perp}$ sarà $Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}\right)$. Imponendogli il passaggio per $Q$ otteniamo:

$$H = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

## Spazi affini

*Riflessione* 53. La percezione geometrica quotidiana che abbiamo di piano o retta non è quella di spazio vettoriale: quando pensiamo a un piano o a una retta ce li immaginiamo senza un'origine, non li pensiamo con un punto privilegiato. Gli spazi affini rispondono a questa nostra percezione: possono diventare spazi vettoriali dopo aver fissato un'origine, ma non sono spazi vettoriali per loro natura; sono quindi oggetti sui quali possiamo fissare un punto per farli divenire spazi vettoriali. In pratica quello che facciamo è considerare l'insieme che normalmente è uno spazio vettoriale, senza considerare la presenza di un vettore privilegiato: lo consideriamo come insieme di punti sui quali, eventualmente, si può montare una struttura di spazio vettoriale; quindi, dopo aver scelto un'origine, possiamo definire somma e prodotto aiutandoci con la somma e il prodotto che conosciamo nello spazio vettoriale.
Scegliamo per esempio il punto $P_0$, vogliamo trovare un'operazione $+_{P_0}$ che renda $V_{P_0}$ uno spazio vettoriale. Avremo allora:

$$\forall P, Q \in V,\ P +_{P_0} Q = ((P - P_0) + (Q - P_0)) + P_0 = P + Q - P_0$$

Possiamo anche definire un prodotto per scalari:

$$\forall Q, \in V, \alpha \in \mathbb{K},\ \lambda \cdot_{P_0} Q = (\lambda(Q - P_0)) + P_0 = \lambda Q + (1-\lambda)P_0$$

Possiamo facilmente vedere che, per costruzione, $(V_{P_0}, +_{P_0}, \cdot_{P_0})$ è uno spazio vettoriale, inoltre notiamo che la somma e il prodotto per scalari sono combinazioni affini di punti e noi sapevamo già che gli spazi affini sono chiusi per combinazioni affini.
Abbiamo quindi rimontato su $V$ la struttura di spazio vettoriale prendendo come punto privilegiato $P_0$; non è difficile dimostrare che $V \xrightarrow{\tau_{P_0}} V_{P_0}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali. Ma questo vale per un qualsiasi punto $P_0$, vediamo quindi che, $\forall P_0, P_1, Q_1, \ldots, Q_k \in V$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che $\sum_1^k \lambda_i = 1$ abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i = \lambda_1 \cdot_{P_0} Q_1 +_{P_0} \ldots +_{P_0} \lambda_k \cdot_{P_0} Q_k = \lambda_1 \cdot_{P_1} Q_1 +_{P_1} \ldots +_{P_1} \lambda_k \cdot_{P_1} Q_k$$

Le combinazioni affini sono quindi le uniche sensate da fare con spazi affini: sono sempre le stesse, indipendentemente dal punto che scegliamo come origine.

*Riflessione* 54. Siano $P, Q \in V$ dei punti di $V$, uno spazio vettoriale reale. Consideriamo

$$\{\lambda P + (1-\lambda)Q \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Abbiamo allora che l'insieme vale:

- $\{P\}$ se $P = Q$.
- retta passante per $P$ e $Q$ se $P \neq Q$.

Prendiamo il caso non degenere, allora se:

'$\lambda = 0$' $\lambda P + (1-\lambda)Q = Q$.

'$\lambda = 1$' $\lambda P + (1-\lambda)Q = P$.

'$0 \leq \lambda \leq 1$' $\lambda P + (1-\lambda)Q \in \overline{PQ}$, cioè al variare di $\lambda$ ricopre tutto il segmento compreso tra $P$ e $Q$.

Se abbiamo invece tre punti $P_1, P_2, P_3$ (non allineati) abbiamo che:

$$H = \{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + (1-\lambda_1-\lambda_2)P_3\}$$

$H$ è il piano contenente $P_1, P_2, P_3$, le rette che congiungono i vari punti si ottengono nello stesso modo in cui abbiamo ottenuto prima una retta: annullando il contributo del punto che non appartiene alla retta. Inoltre il triangolo $T$ è dato da:

$$T = \{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + (1-\lambda_1-\lambda_2)P_3 \ t.c.\ \lambda_1, \lambda_2, (1-\lambda_1-\lambda_2) \in [0,1]\}$$

*Riflessione* 55. Siano $V, W$ dei $\mathbb{K}$ spazi affini, vogliamo esaminare le $V \xrightarrow{F} W$, applicazioni che mantengono le combinazioni affini. Vogliamo cioè che, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\ t.c.\ \sum_1^k \lambda_i = 1$, $\forall P_1, \ldots, P_k \in V$,

$$F\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i F(P_i)$$

Abbiamo visto che queste possono sempre essere scritte come $F = \tau \circ f$, con $f$ applicazione lineare, vogliamo infatti che $V_{P_0} \xrightarrow{F} W_{F(P_0)}$ sia un'applicazione lineare, $\forall P_0 \in V$.
In particolare chiamiamo affinità le trasformazioni affini biunivoche da $V$ in se stesso.
Possiamo vedere che, se $L \subseteq V$ è un sottospazio affine e $F$ un'affinità, $F(L)$ è un sottospazio affine della stessa dimensione. Esaminiamo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. In questo caso, visto che $F$ mantiene le combinazioni affini e le dimensioni, abbiamo che l'affinità manda rette in rette, segmenti (parti di rette tra due punti) in segmenti, semirette in semirette; inoltre, essendo un'applicazione biunivoca, se due segmenti sono disgiunti, anche la loro immagine lo sarà, se due rette sono coincidenti lo sarà anche la loro immagine. Quindi un'affinità conserva diverse cose: parallelismo, dimensione, ma non solo; se imfatti prendiamo un poligono

convesso di $n$ lati, questo sarà mandato in un altro poligono convesso con lo stesso numero di lati: infatti ogni vertice deve essere mandato in un vertice (si vede grazie al fatto che in un vertice due segmenti non paralleli si incontrano), ogni lato in un lato, inoltre l'interno viene mandato nell'interno e l'esterno nell'esterno (le semirette uscenti da punti interni intersecano un numero dispari di volte il 'perimetro' del poligono). Quindi le affinità conservano diverse cose.

**Esempio 42.** Siano $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$ i tre vertici di un triangolo $T$. Cerchiamo di vedere quanti e quali sono le affinità $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^2$ che mandano il triangolo in se stesso. L'affinità è completamente determinata da $F(P_1), F(P_2), F(P_3)$, vediamo quindi dove mandare questi punti. Possiamo mandare $F(P_1)$ in uno qualsiasi dei tre punti; supponiamo $F(P_1) = P_2$ a questo punto abbiamo due possibilità per $P_2$, ma, scelta questa, non abbiamo poi altre scelte possibili per $P_3$. Abbiamo quindi 6 affinità possibili, e inoltre da questo capiamo che tutti i triangoli sono affinemente equivalenti: troviamo sempre un'affinità che mandi un triangolo in un altro, basta imporre l'uguaglianza dei vertici uno ad uno.

**Esempio 43.** Sia $T$ un parallelogrammo con vertici $P_1, P_2, P_3, P_4$. Vediamo quanti sono le affinità che mandano il parallelogrammo in se stesso. Vediamo facilmente che la scelta di $F(P_1)$ limita a due casi possibili la scelta di $F(P_2)$, che a sua volta determina completamente l'applicazione. Abbiamo quindi 8 affinità possibili. Tutte queste 8 sono effettivamente affinità perchè mantengono inalterati i parallelismi e le simmetrie.

*Osservazione* 84. Tutti i triangoli e tutti i parallelogrammi sono affinemente isomorfi.

**Esempio 44.** Vediamo che il numero di lati non è sufficiente per determinare l'equivalenza affine. Vediamo infatti il caso dei trapezi. Prendiamo un trapezio isoscele $T$ che abbia $A, B$ come punti della base maggiore e $C, D$ come punti della base minore. Prendendo un'altro trapezio isoscele $T'$ che abbia come vertici $A', B', C', D'$, come facciamo a determinare se i due trapezi sono affinemente equivalenti? Vediamo che $F$ affinità manda segmenti paralleli in segmenti paralleli, quindi di certo i segmenti laterali vengono mandati in se stessi.
Cosa possiamo dire delle basi? Potrebbe essere utile vedere $AB$ come la base di un triangolo che abbia come lati i prolungamenti di $AD$ e $BC$ (e come vertice il punto $P$). Questo ci aiuta molto: $D \in AP$, e sappiamo che $F$ mantiene i segmenti e le intersezioni; quindi abbiamo che la base maggiore deve andare nella base maggiore, la minore nella minore. Quindi a quanto pare ci sono solo due possibili affinità. Ma vediamo se sono sempre possibili entrambe.
Sappiamo infatti che l'affinità mantiene le combinazioni affini, e sappiamo di poter scrivere $P$ come combinazione lineare di $A$ e $D$. Quindi abbiamo che $P'$ deve trovarsi nella stessa posizione rispetto a $A'$ e a $D'$.
Se queste condizioni sono mantenute possiamo avere un'affinità. Quindi due trapezi sono affinemente equivalenti se solamente se

$$\frac{PD}{AD} = \frac{P'D'}{A'D'}$$

Questa condizione è necessaria e sufficiente per l'equivalenza affine di trapezi.

# Lezione 40

## Teoria

*Riflessione* 56. Abbiamo visto che possiamo scrivere le affinità di $\mathbb{K}^n$ come matrici del tipo

$$\left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

Che abbiamo chiamato $\widetilde{M_N}$ e che abbiamo visto come immagine dell'affinità $X \longrightarrow MX + N$ rispetto all'applicazione $(\text{Aff }(\mathbb{K}^n), \circ) \xrightarrow{L} (G(H), \cdot)$ che abbiamo esaminato ieri. Abbiamo inoltre visto ieri che le matrici di $G(H)$ sono un sottogruppo di $GL(n+1, \mathbb{K})$, sono cioè gli isomorfismi di $\mathbb{K}^{n+1}$ che lasciano invariato l'iperipiano dei vettori che hanno come ultima componente $X_{n+1} = 1$.

**Definizione 70** (Luogo degli zeri)**.** Sia $g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Denotiamo con:

$$V(g) = \{X \in \mathbb{K}^n \mid g(X) = 0\}$$

il luogo degli zeri di $g$: i punti di $\mathbb{K}^n$ che annullano l'equazione.

*Osservazione* 85. L'applicazione

$$\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow S(\mathbb{K}^n)$$

che associa a ogni equazione l'insieme $V(g)$ del luogo degli zeri di $g$, è un'applicazione non iniettiva; in particolare $(\forall g \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n])$ :

- $\forall \alpha \in \mathbb{K} - \{0\}, \ V(g) = V(\alpha g)$.
- $\forall m \in \mathbb{N}, \ V(g^m) = V(g)$.
- Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $g_1, g_2$ non presentano fattori multipli (sono sqrf) allora:

$$V(g_1) = V(g_2) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{C} - \{0\} \ t.c. \ g_1 = \alpha g_2$$

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ non vale la proprietà precedente, infatti, $\forall c > 0$,

$$V(x^2 + y^2 + c) = \varnothing$$

**Definizione 71** (Proporzionalità)**.** Siano $g_1, g_2 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K} - \{0\} \ t.c. \ g_1 = \alpha g_2$$

Questa relazione, detta di proporzionalità, è relazione di equivalenza in

$$\mathbb{K} = [x_1, \dots, x_n]$$

**Definizione 72** (Ipersuperficie)**.** Si dice ipersuperficie affine di $\mathbb{K}^n$ ogni classi di proporzionalità di polinomi di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ di grado positivo.

**Definizione 73** (Equazione, supporto e grado di un'ipersuperficie)**.** Sia $I = [g]$ un'ipersupperficie.

- $g(x) = 0$ è detta equazione di $I$.
- $V(g) \subseteq \mathbb{K}^n$ è detto supporto di $I$ (a volte si chiama ipersuperficie il supporto, ma è un'abuso di linguaggio).
- Visto che $g_1 \sim g_2 \Rightarrow deg\ g_1 = deg\ g_2$ è ben definito:

$$deg\ [g] = deg\ g$$

**Definizione 74** (Curva e superficie affine, quadriche)**.** Sia $I$ una classe di proporzionalità di polinomi in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (un'ipersuperficie). Allora $I$ è detta:

- Curva affine, se $n = 2$.
- Superficie affine, se $n = 3$.
- Quadrica, se ha grado 2.
- Conica, se è una quadrica con $n = 2$.

*Osservazione* 86. Ogni ipersuperficie determina un supporto, ci possono essere supporti che sono il luogo degli zeri di ipersuperfici tra di loro non proporzionali.

**Definizione 75.** Sia $I = [g]$ un'ipersuperficie e $X \xrightarrow{\psi} MX + N$ un'affinità di $\mathbb{K}^n$. Si denota $\psi^{-1}(I)$ l'ipersuperficie di equazione

$$g(\psi(X)) = 0$$

*Osservazione* 87. La definizione data è coerente con il fatto che $\psi$ trasforma il supporto di $\psi^{-1}(I)$ nel supporto di $I$. infatti:

$$x_0 \in supp.\ \psi^{-1} \Leftrightarrow g(\psi(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \psi(x_0) \in V(g) = supp.\ I$$

**Definizione 76** (Equivalenza affine)**.** Due ipersuperfici affini $I$ e $J$ si dicono affinemente equivalenti se $\exists \psi \in \text{Aff}\ (\mathbb{K}^n)$ tale che $I = \psi^{-1}(J)$.
In altre parole, $I = [f]$ e $J = [g]$ sono affinemente equivalenti $\Leftrightarrow \exists \psi \in \text{Aff}\ (\mathbb{K}^n)\ t.c.\ f = g \circ \psi$.

*Osservazione* 88.

$$I \underset{aff}{\sim} J \Rightarrow \text{supp}\ (I) \underset{aff}{\sim} \text{supp}\ (J)$$

Il contrario è falso.
Abbiamo quindi che $\underset{aff}{\sim}$ classifica i polinomi (nota bene: non i supporti) a meno di cambiamenti di coordinate affini.

*Riflessione* 57. Ma come cambia l'equazione di una ipersuperficie per equivalenza affine?

Grado 1 Sia $I = [g]$ un iperpiano: $g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $deg\ g = 1$. Per scrivere il tutto in modo compatto sia:

$$g(X) = {}^{\tau}AX + b \quad con A \in \mathbb{K}^n,\ b \in \mathbb{K}, A \neq 0$$

Sia inoltre $\psi$ un'affinità di $\mathbb{K}^n$ tale che:

$$X \xrightarrow{\psi} MX + N$$

Vediamo allora di calcolare:

$$(g \circ \psi)(X) = {}^{\tau}A(MX + N) + b = ({}^{\tau}AM)X + {}^{\tau}AN + b$$

Vediamo in particolare che ${}^{\tau}AM \neq 0$, infatti $A \neq 0$ e $M$ è invertibile. Supponiamo dunque di avere un'altro iperpiano $J = [f]$, con

$$f(X) = {}^{\tau}A'X + b'$$

Allora, per la definizione di equivalenza affine, e visto come un'affinità cambia l'iperpiano $I$, possiamo dire che:

$$I \underset{aff}{\sim} J \Leftrightarrow \exists \begin{smallmatrix} \alpha\neq 0 \\ M\in GL(n,\mathbb{K}) \\ N\in\mathbb{K}^n \end{smallmatrix}\ t.c. \begin{cases} {}^{\tau}A' = \alpha\, {}^{\tau}AM \leftarrow coefficienti \\ b' = \alpha({}^{\tau}AN + b) \leftarrow termini\ noti \end{cases}$$

Proviamo a ripetere quanto detto: abbiamo visto che due iperpiani $[f]$ e $[g]$ sono affinemente equivalenti se esiste un affinità che, applicata allo spazio vettoriale, rende $f$ proporzionale a $g$; abbiamo quindi visto come un generico ipepiano $[g]$ (che abbiamo scritto come ${}^{\tau}AX + b$) agisce su uno spazio vettoriale cambiato da una generica affinità. Visto che adesso sappiamo come gli iperpiani sono influenzati dalle affinità, possiamo dire quando due iperpiani sono affinemente equivalenti. Visto che, se ha agito la generica affinità $X \xrightarrow{\psi} MX + N$, il nostro iperpiano ${}^{\tau}AX + b$ viene trasformato in $({}^{\tau}AM)X + {}^{\tau}AN + b$ abbiamo che un iperpiano è affinemente equivalente a $g$ solamente se può essere scritto (a meno di proporzionalità, quindi di moltiplicazione per scalari) come ${}^{\tau}A'X + b$ con $\begin{cases} {}^{\tau}A' = \alpha\, {}^{\tau}AM \\ b' = \alpha({}^{\tau}AN + b) \end{cases}$ Notiamo comunque che questo sistema ha soluzione, quindi due iperpiani sono sempre affinemente equivalenti come ipersuperfici. Quindi studiando le classi di equivalenza delle ipersuperfici, abbiamo un'unica classe di equivalenza di grado 1.

Grado 2 Sia $I = [g]$, con $deg\ g = 2$. Possiamo allora scrivere:

$$g(X) = \tau_X AX + 2\tau_B X + c$$

con $\begin{cases} A\in S(n,\mathbb{K}) \\ B\in\mathbb{K}^n \\ c\in\mathbb{K} \end{cases}$

*Esempio* 45. Consideriamo

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2 + 5$$

Abbiamo allora:

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right) \qquad B = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \qquad c = 5$$

Ma in questo modo sembra che ci tocchi portarci dietro 3 matrici per avere le informazioni che ci sono necessarie. In realtà possiamo utilizzare semplicemente:

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^{\tau}B & c \end{array}\right) \quad e \quad \widetilde{X} = \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right)$$

Vediamo perché la notazione vista ora è molto efficace:

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}Q\widetilde{X} &= \left(\begin{array}{c|c} X & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^{\tau}B & c \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} {}^{\tau}XA + {}^{\tau}B & {}^{\tau}XB + c \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right) \\
&= {}^{\tau}XAX + {}^{\tau}BX + {}^{\tau}XB + c = {}^{\tau}XAX + 2\,{}^{\tau}BX + c \\
&= g(X)
\end{aligned}$$

Quindi

$$V(g) = V\left({}^{\tau}\widetilde{X}Q\widetilde{X}\right)$$

Chiaramente questa uguaglianza è a meno di un banale isomorfismo, infatti $V(g) \subseteq \mathbb{K}^n$ mentre invece l'altro membro dell'uguaglianza rappreseta dei punti in $H \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$.
In generale comunque l'equazione ${}^{\tau}XQY = 0$ è un'equazione omogenea di secondo grado; quindi

$$V({}^{\tau}YQY)$$

è un cono (il luogo degli zeri di una forma quadratica) che ha come vertice 0.
Quindi in pratica vediamo $V(g)$ come l'intersezione tra un cono di $\mathbb{K}^{n+1}$ e l'iperpiano dei vettori che hanno come ultima componente $c$. Quindi lavoriamo con uno spazio vettoriale di dimensione maggiore e poi intersechiamo gli zeri che troviamo lì con un iperpiano dello spazio vettoriale allargato.

*Esempio* 46.

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 = \left\{ \begin{smallmatrix} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 \\ x_3 = 1 \end{smallmatrix} \right.$$

Cioè noi vediamo quella che tipicamente chiamiamo circonferenza di raggio unitario (la chiamiamo così perché ora non è questo l'importante) come l'intersezione tra il luogo degli zeri di un'equazione di secondo grado in $\mathbb{R}^3$ e il piano affine dei vettori che hanno come ultima componente 1.

*Riflessione* 58. Sia $I$ la quadrica di equazione:

$$^{\tau}\widetilde{X}Q\widetilde{X} = 0$$

E $X \xrightarrow{\psi} MX + N$ un'affinità; qual'è l'equazione della quadrica di $\psi^{-1}(I)$? Cioè qual'è la matrice associata alla quadrica di $\psi^{-1}(I)$?

$$\widetilde{M_N}\widetilde{X} = \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} MX+N \\ \hline 1 \end{array}\right) = \widetilde{\psi(X)}$$

Quindi $\psi^{-1}(I)$ ha equazione:

$$^{\tau}\widetilde{\psi}(X)Q\widetilde{\psi}(X) = {}^{\tau}\widetilde{X}\,{}^{\tau}\widetilde{M_N}Q\widetilde{M_N}\widetilde{X} = 0$$

Quindi la matrice associata alla quadrica di $\psi^{-1}$ è

$$^{\tau}\widetilde{M_N}Q\widetilde{M_N}$$

Cioè viene cambiata per congruenza; quindi tutti gli invarianti per congruenza che conosciamo vengono mantenuti.
Quindi studiare le classi di equivalenza delle quadriche di $\mathbb{K}^n$ rispetto alla $\underset{aff}{\sim}$ corrisponde a studiare le classi di equivalenza, sempre rispetto alla stessa relazione dell'insieme:

$$\left\{ Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^{\tau}B & 1 \end{array}\right) \;\middle|\; 0 \neq A \textit{ simmetrica} \right\}$$

Dove, ripetiamo,

$$Q \underset{aff}{\sim} Q' \Leftrightarrow \exists \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha \in \mathbb{K} - \{0\} \\ \widetilde{M_N} \in \mathrm{Aff}\ (\mathbb{K}^n) \end{smallmatrix} \right. \ t.c.\ Q' = \alpha\, {}^{\tau}\widetilde{M_N}Q\widetilde{M_N}$$

## Classificazione affine delle coniche

Cominciamo dalle coniche di $\mathbb{K}^2$ e restringiamoci a esaminare i casi di $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

*Riflessione* 59. Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

Con $a_{11}, a_{12}, a_{22}$ non tutti nulli. Se

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

$$c = a_{33} \qquad Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^{\tau}B & 1 \end{array}\right)$$

Allora possiamo dire che $\mathcal{C}$ ha equazione

$${}^{\tau}\widetilde{X}Q\widetilde{X} = 0$$

Prendiamo allora $X' \xrightarrow{\psi} MX' + N$ affinità, vediamo che $\psi^{-1}(\mathcal{C})$ ha equazione

$${}^{\tau}\widetilde{X'}\,{}^{\tau}\widetilde{M}_N Q \widetilde{M}_N \widetilde{X'} = 0$$

Possiamo quindi scrivere:

$$Q' = {}^{\tau}\widetilde{M}_N Q \widetilde{M}_N = \left(\begin{array}{c|c} {}^{\tau}M & 0 \\ \hline {}^{\tau}N & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^{\tau}B & c \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} {}^{\tau}MA & {}^{\tau}MB \\ \hline {}^{\tau}NA + {}^{\tau}B & {}^{\tau}NB + c \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} {}^{\tau}MAM & {}^{\tau}M(B + AN) \\ \hline {}^{\tau}({}^{\tau}M(B + AN)) & {}^{\tau}NAN + 2\,{}^{\tau}NB + c \end{array}\right)$$

Questo ci dice cose interessanti: avevamo già detto che la matrice $Q$ sarebbe cambiata per congruenza, ma ora vediamo che il minore principale $A$ cambia anch'esso per congruenza, e per giunta influenzato solamente da $M$; cioè la parte di secondo grado dell'equazione è influenzata solo dalla parte lineare dell'affinità, quindi se abbiamo una traslazione, la parte di secondo grado non sarà cambiata.

*Osservazione* 89. Abbiamo quindi che l'affinità non cambia il grado di $Q$: trasforma coniche in coniche; cioè, visto che $M$ è invertibile e $A \neq 0$ abbiamo anche che $A' \neq 0$ e quindi l'equazione di $Q'$ sarà anch'essa di secondo grado.

*Osservazione* 90. Ripetiamo che:

- $Q$ e $Q'$ sono congruenti.

- $A$ e $A'$ sono congruenti.

Quindi $rnk(A)$ e $rnk(B)$ sono invarianti per equivalenza affine.

**Definizione 77** (Conica degenere)**.** Sia $\mathcal{C}$ una conica. $\mathcal{C}$ è detta degenere se $det\ Q = 0$. Più precisamente $\mathcal{C}$ viene detta:

- Semplicemente degenere, se $rnk\ Q = 2$.
- Doppiamente degenere, se $rnk\ Q = 1$.

**Definizione 78** (Conica a centro)**.** Sia $\mathcal{C} = [g]$ una conica. $\mathcal{C}$ è detta conica a centro se $\exists N \in \mathbb{K}^2$ tale che, $\forall X \in \mathbb{K}^n$, $g(X) = g(\sigma_N(X))$ dove $\sigma_N$ è la simmetria centrale di centro $N$.

*Osservazione* 91. Se $N = (0,0)$, $\sigma_N(x,y) = (-x,-y)$ quindi $(0,0)$ è centro per $\mathcal{C} = [g] \Leftrightarrow g(x,y)$ non contiene monomi di primo grado (solo se $B = 0$).
In generale se $N \in \mathbb{K}^2$ è un centro per $\mathcal{C}$ e considero la traslazione $\tau = \tau_N$ abbiamo allora che $\tau^{-1}(\mathcal{C})$ ha centro in $(0,0)$ e quindi $B' = 0$. Abbiamo

$$B' = AN + B$$

Quindi $N$ è soluzione del sistema $AY = -B$.

### Coniche non a centro

*Riflessione* 60. Consideriamo

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^{\tau}B & c \end{array}\right)$$

Siamo nel caso in cui il sistema $AY = -B$ non ha soluzioni, quindi $rnk\ A = 1$, infatti sappiamo che $A \neq 0$ e se avesse rango 2 il sistema avrebbe soluzione. Sappiamo quindi che

$$\exists M \in GL(2, \mathbb{K})\ t.c.\ {}^{\tau}MAM = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi con la trasformazione lineare $X \xrightarrow{\widetilde{M_0}} MX$, e con un eventuale cambio di segno, $Q$ diventa:

$$Q_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 \\ \hline b_1 & b_2 & d \end{array}\right)$$

Poichè $\mathcal{C}$ non ha centri, abbiamo $b_2 \neq 0$, e quindi $rnk\ Q = 3$ (quindi una conica non a centro è sicuramente non degenere). Vediamo ora che $\exists N = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right)$ tale che la traslazione $X \xrightarrow{\tau_N} X + N$ trasforma $Q_1$ in:

$$Q_2 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 \\ \hline 0 & c_2 & 0 \end{array}\right)$$

Per ottenerlo dobbiamo infatti imporre:

$$\begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ * \end{smallmatrix}\right) \\ \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix}\right) + 2\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right) + d = 0 \end{cases}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \alpha + b_1 = 0 \\ \alpha^2 + 2\alpha b_1 + 2\beta b_2 + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -b_1 \\ 2\beta b_2 = b_1^2 - d \end{cases}$$

Che ha soluzione, visto che $b_2 \neq 0$. Infine con la trasformazione:

$$\begin{cases} X = X' \\ Y = -\frac{Y'}{2c_2} \end{cases}$$

Si ottiene l'equazione $x'^2 - y' = 0$. Cioè

$$Q_3 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Questo tipo di conica è detto tipo $\mathcal{C}_1$, e le coniche di tipo $\mathcal{C}_1$ sono dette parabole.

**Coniche a centro**

**Passo 1** : eliminazione dei termini di primo grado. Tramite una traslazione (che porta l'origine nel centro) la matrice di $\mathcal{C}$ diventa quindi:

$$Q_1 = \left(\begin{array}{cc|c} A & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & d \end{array}\right)$$

Se $d \neq 0$ posso dividere per $d$, ossia posso supporre $d = 0$ oppure $d = 1$.

**Passo 2** : Semplificazione di $A$. $A$ si modifica per congruenza, quindi la sua forma canonica dipende dal campo in cui siamo.

$\underline{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$ Il rango di $A$ è un invariante completo per congruenza, quindi vediamo come si semplifica l'equazione di $\mathcal{C}$ a seconda di $(rnk\ A, rnk\ Q)$.

- $\left\{\begin{smallmatrix} rnk\ A=2 \\ rnk\ Q=3 \end{smallmatrix}\right.$. In questo caso abbiamo $d = 1$. Quindi:

$$\mathcal{C} \underset{aff}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione della conica è quindi:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

– $\left\{\begin{smallmatrix} rnk\ A=2 \\ rnk\ Q=2 \end{smallmatrix}\right.$. In questo caso abbiamo $d = 0$.

$$\mathcal{C} \underset{aff}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

L'equazione è:

$$x^2 + y^2 = 0$$

E il supporto è quindi l'unione di due rette incidenti (siamo in $\mathbb{C}$).

– $\left\{\begin{smallmatrix} rnk\ A=1 \\ rnk\ Q=2 \end{smallmatrix}\right.$. Abbiamo:

$$\mathcal{C} \underset{aff}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Come equazione della conica abbiamo:

$$x^2 + 1 = 0$$

E il supporto sono quindi due rette parallele (siamo in $\mathbb{C}$).

– $\left\{\begin{smallmatrix} rnk\ A=1 \\ rnk\ Q=1 \end{smallmatrix}\right.$. In questo caso:

$$\mathcal{C} \underset{aff}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi l'equazione:

$$x^2 = 0$$

E questa volta il supporto è una retta 'doppia'.

**Teorema 20** (di classificazione affine delle coniche in $\mathbb{C}^2$)**.** *Ogni conica in $\mathbb{C}^2$ è affinemente equivalente ad una e una sola delle seguenti:*

*1)* $x^2 - y = 0$ *4)* $x^2 + 1 = 0$
*2)* $x^2 + y^2 + 1 = 0$
*3)* $x^2 + y^2 = 0$ *5)* $x^2 = 0$

*Inoltre la coppia $(rnk\ A, rnk\ Q)$ è un sistema completo di invarianti per equivalenza affine in $\mathbb{C}^2$.*

$\underline{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$ Siamo sempre nel caso delle coniche a centro, ma su $\mathbb{R}$ il rango non è un invariante completo per congruenza; la segnatura lo è, ma non è invariante per equivalenza affine (visto che ci è permesso moltiplicare per scalari anche negativi). Possiamo quindi usare l'indice di Witt, che semplicemente ci indica il minimo tra $i_+$ e $i_-$, che è invariante anche per prodotto per scalari.

Vediamo quindi il secondo passo nel caso reale (il primo era valido in ogni campo); ci troviamo una matrice nella forma:

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} A & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & d \end{array}\right)$$

Con $d = 1 \vee d = 0$. Distinguiamo quindi i casi a seconda di:

$$(rnk\ A, rnk\ Q, w(A), w(Q))$$

I) $\left\{\begin{smallmatrix} rnk\ A=2 \\ rnk\ Q=3 \end{smallmatrix}\right.$. Possiamo avere diversi casi (in tutti avremo coniche non degeneri, quindi $d = 1$):

Tipo $\mathcal{C}_2$ $\left\{\begin{smallmatrix} w(A)=0 \\ w(Q)=0 \end{smallmatrix}\right.$. In questo caso abbiamo:

$$Q \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

L'equazione della conica è quindi:

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

Questa conica viene detta ellisse immaginaria: ha come supporto l'insieme vuoto.

Tipo $\mathcal{C}_3$ $\left\{\begin{smallmatrix} w(A)=0 \\ w(Q)=1 \end{smallmatrix}\right.$. Abbiamo:

$$Q \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo scrivere in due modi l'equazione della conica:

$$-x^2 - y^2 + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$\mathcal{C}$ viene detta ellissi reale, $V(f)$ è una circonferenza.

Tipo $\mathcal{C}_4$ $\left\{\begin{smallmatrix} w(A)=1 \\ w(Q)=1 \end{smallmatrix}\right.$. In questo caso:

$$Q \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

La conica avrà quindi equazione:

$$x^2 - y^2 + 1 = 0$$

E viene detta iperbole.

II) $\left\{\begin{smallmatrix} rnk\ A=2 \\ rnk\ Q=2 \end{smallmatrix}\right.$. Anche qui ci sono diversi casi (di coniche che però sono degeneri, in particolare $d = 0$):

Tipo $\mathcal{C}_5$ $\left\{\begin{smallmatrix} w(A)=0 \\ w(Q)=1 \end{smallmatrix}\right.$. Non può che essere:

$$Q \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

La conica avrà equazione:

$$x^2 + y^2 = 0$$

Queste sono rette complesse incidenti, e hanno come $V(f) = \{(0,0)\}$

Tipo $\mathcal{C}_6$ $\left\{\begin{smallmatrix} w(A)=1 \\ w(Q)=2 \end{smallmatrix}\right.$. Dobbiamo avere:

$$Q \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi l'equazione:

$$x^2 - y^2 = 0$$

Questa conica sono rette incidenti in $\mathbb{R}^2$.

III) $\left\{\begin{smallmatrix} rnk\ A=1 \\ rnk\ Q=2 \end{smallmatrix}\right.$. Abbiamo anche qui due casi possibili:

Tipo $\mathcal{C}_7$ $\left\{\begin{smallmatrix} w(A)=1 \\ w(Q)=1 \end{smallmatrix}\right.$. Per forza di cose abbiamo:

$$Q \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

La conica avrà equazione:

$$x^2 + 1 = 0$$

Queste sono rette complesse parallele, il loro luogo degli zeri è l'insieme vuoto; questo ci fa capire che a due supporti uguali possono corrispondere coniche diverse.

Tipo $\mathcal{C}_7$ $\left\{\begin{smallmatrix} w(A)=1 \\ w(Q)=2 \end{smallmatrix}\right.$. Abbiamo:

$$Q \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Avremo come equazione:

$$x^2 - 1 = 0$$

Che sono rette parallele in $\mathbb{R}^2$.

IV) $\left\{\begin{smallmatrix} rnk\ A=1 \\ rnk\ Q=1 \end{smallmatrix}\right.$. Rimane da esaminare un ultimo caso:

Tipo $\mathcal{C}_9$ $\left\{\begin{smallmatrix} w(A)=1 \\ w(Q)=2 \end{smallmatrix}\right.$. Abbiamo un'unica possibilità:

$$Q \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi l'equazione:

$$x^2 = 0$$

Che è una retta doppia.

Possiamo quindi enunciare:

**Teorema 21** (di classificazione affine delle coniche in $\mathbb{R}^2$)**.** *Ogni conica di $\mathbb{R}^2$ è affinemente equivalente ad una e una sola delle seguenti:*

1) $x^2 - 2y = 0$, *parabola.*
2) $x^2 + y^2 + 1 = 0$, *ellisse immaginaria.*
3) $x^2 + y^2 - 1 = 0$, *ellisse reale.*
4) $x^2 - y^2 + 1 = 0$, *iperbole.*
5) $x^2 + y^2 = 0$, *rette complesse incidenti.*
6) $x^2 - y^2 = 0$, *rette incidenti.*
7) $x^2 + 1 = 0$, *rette complesse parallele.*
8) $x^2 - 1 = 0$, *rette parallele.*
9) $x^2 = 0$, *retta doppia.*

*La quaterna* $(rnk\ A, rnk\ Q, w(A), w(Q))$ *è un sistema completo di invarianti per equivalenza affine in* $\mathbb{R}^2$.

Possiamo riassumere il caso reale nella tabella:

| | $\mathcal{C}_1$ | $\mathcal{C}_2$ | $\mathcal{C}_3$ | $\mathcal{C}_4$ | $\mathcal{C}_5$ | $\mathcal{C}_6$ | $\mathcal{C}_7$ | $\mathcal{C}_8$ | $\mathcal{C}_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $rnk\ A$ | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 |
| $rnk\ Q$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| $w(A)$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $w(Q)$ | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |

# Lezione 41

## Teoria

*Riflessione* 61. Abbiamo visto come classificare le coniche in $\mathbb{R}$ e in $\mathbb{C}$ e abbiamo trovato 5 classi di equivalenza affine nel caso complesso e 9 classi nel caso reale; la parabola è l'unico modello non a centro, nel caso reale. Abbiamo inoltre visto che la quaterna $(rnk\ A, rnk\ Q, w(A), w(Q))$ è un sistema completo di invarianti.

*Osservazione* 92. Sia $\mathcal{C}$ la conica di $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^2+y^2-1=0$. Abbiamo visto che il supporto di questa conica può essere visto come l'intersezione tra

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 - y^2 - z^2 = 0 \right\}$$

Con il piano $H$ di equazione $z = 1$.
Abbiamo definito $S$ come la quadrica di equazione $x^2-y^2-z^2=0$, il luogo degli zeri di questa quadrica è quindi un cono: se moltiplichiamo infatti una soluzione per $\lambda \in \mathbb{R}$ troviamo: $\lambda^2(x^2-y^2-z^2)=0$. Inoltre osserviamo cosa succede intersecando questa quadrica con piani paralleli al piano $Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right)$: al variare di $z$ otteniamo l'equazione:

$$x^2 + y^2 = c^2$$

che, come sappiamo, ha come soluzione i punti di una circonferenza.

*Osservazione* 93. Sia $\mathcal{C}$ una conica di equazione $x^2-y^2+1=0$. Abbiamo visto che anche questa può essere vista come l'intersezione tra:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 - y^2 + z^2 = 0 \right\}$$

e il piano $H$ che abbiamo visto nell'Osservazione precedente. In particolare in questo caso l'intersezione ci darà l'iperbole che ci aspettavamo, ma se facciamo l'intersezione con i piani paralleli a $Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$ vediamo che quello che otteniamo sono circonferenze, se infatti fissiamo $y = c$ otteniamo:

$$x^2 + z^2 = c^2$$

E questa è l'equazione di una circonferenza, quindi la quadrica in $\mathbb{R}^3$ è tale che l'intersezione con piani paralleli al piano di $xz$ ci dà sempre una circonferenza.

*Osservazione* 94. Sia $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 - y^2 = 0$. Possiamo vedere, come in tutti i casi precedenti, $\mathcal{C}$ come intersezione tra il piano $H$ di prima e:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 - y^2 = 0 \right\}$$

Ma vediamo che in questo caso, se $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in S$, allora $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{S}()$, infatti il termine $z$ non compare nell'equazione e quindi è variabile, quindi l'intersezione è la stessa, indipendentemente dal $c$ che scegliamo da imporre a $z$.

**Esempio 47.** Sia $\mathcal{C}$ la retta di equazione:

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2x - 10y + 1 = 0$$

Vediamo di trovare la forma canonica affine $\widetilde{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$ e determinare $\phi \in \operatorname{Aff}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tale che $\phi(\widetilde{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$. Associamo a $\mathcal{C}$ la matrice:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -5 \\ -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo facilmente che:

- $det\ A = -3$, quindi la matrice ha centro: infatti abbiamo visto che i centri sono soluzione dell'equazione: $AY = -B$, e se $A$ è invertibile (cioè ha determinante diverso da 0, come in questo caso) allora l'equazione ha soluzione, e quindi vi sono centri. Quindi conica ha centro.
- $w\,(A) = 1$.
- $det\ Q = -9$. Quindi la conica è non degenere. Quindi possiamo dire che la conica è un'iperbole.
- $w\,(Q) = 1$.

Vediamo come fare per trovare l'affinità che trasforma $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica.

1) Cerchiamo innanzitutto il centro, cerco quindi $N = \left( \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{smallmatrix} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{smallmatrix} \right.$$

2) Abbiamo visto quindi che la traslazione che sposta il centro nell'origine è quella del vettore $N = \left( \begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix} \right)$. Quindi eseguiamo $\psi_1(X) = X + \left( \begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \end{smallmatrix} \right)$. Abbiamo quindi che la matrice associata a questa affinità è:

$$\widetilde{M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo in particolare che $det\ \widetilde{M_1} = 1$, e questo vale sempre per le traslazioni. Vediamo come viene cambiata la conica:

$$Q_1 = {}^{\tau}\widetilde{M_1} Q \widetilde{M_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Notiamo che avremmo potuto prevedere $Q_1$, infatti avevamo visto che $A$ viene cambiata in ${}^{\tau}MAM$, cioè la parte di secondo grado della conica viene cambiata solamente dalla componente lineare dell'affinità, ma $\psi_1$ è una traslazione, quindi non ha componente lineare, quindi lascia invariata la parte di secondo grado. Per quanto riguarda $B$, $\psi_1$ è stata scelta appositamente per annullare la parte di primo grado. Inoltre possiamo ricavare il termine noto dal determinante che è restato invariato (infatti $det\ M = 1$).

3) Diagonalizzo $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ utilizzando Sylvester. Prendo quindi $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2 - 2e_1$.

$$M_2 = \mathfrak{M}_{\{v_1,v_2\},\{e_1,e_2\}}(id) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

E quindi:

$$A_2 = {}^{\tau}M_2 A_1 M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Abbiamo quindi che la matrice che rappresenta l'affinità che ha come parte lineare $A_2$ è:

$$\widetilde{M_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Possiamo quindi ricavarci la matrice associata alla conica $\mathcal{C}$ dopo che ha subito le due affinità che abbiamo trovato ora.

$$Q_2 = {}^{\tau}\widetilde{M_2} Q_1 \widetilde{M_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4) Ci resta quindi solo da normalizzare il tutto. Scegliamo infatti la matrice $M_3 = \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{3} & & \\ & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Vediamo che questa ultima affinità rende la conica:

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 3 & & \\ & -3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

Che è quello che sapevamo sarebbe venuto sin dall'inizio.

Riassumendo quanto abbiamo fatto possiamo dire:

- Traslazione che porti il centro nell'origine.

- Affinità lineare che diagonalizzi gli esponenti di secondo grado.

- Normalizzazione.

L'affinità che cercavamo è data da $\psi = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \psi_3$. Cioè quella associata alla matrice:

$$\widetilde{M} = \widetilde{M}_1\widetilde{M}_2\widetilde{M}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi l'affinità che stavamo cercando è $X \to \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ Verificare che la matrice ${}^{\tau}\widetilde{M}Q\widetilde{M}$ è quella che stavamo cercando.

*Riflessione* 62. Abbiamo studiato la classificazione affine delle coniche. Abbiamo cioè studiato le classi delle coniche che sono proporzionali a meno di equivalenza affine; ma possiamo restringere la nostra analisi alle isometrie: a studiare le classi di coniche metricamente equivalenti. Abbiamo visto fino ad ora che le affinità erano formate da una parte lineare e da una parte di traslazione, e fino ad ora abbiamo chiesto solamente che la parte lineare fosse invertibile, chiediamo ora invece che tutta l'affinità sia un'isometria; in particolare ogni traslazione è isometria (e le isometrie formano un gruppo con la composizione) dobbiamo quindi interessarci unicamente della parte lineare: se questa è un'isometria, allora lo è anche tutta l'affinità.

*Riflessione* 63. Ricordiamo che due coniche $\mathcal{C} = [f]$ e $\mathcal{D} = [g]$ si dicono metricamente equivalenti se $\exists \psi \in Isom(\mathbb{R}^2)$ tale che $\mathcal{C} = \psi(\mathcal{D})$ ossia se $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \psi \in Isom(\mathbb{R}^2)$ tali che:

$$g = \alpha(f \circ \psi)$$

Se $\psi \in Isom(\mathbb{R}^2)$ allora $\psi(X) = MX + N$ con $M \in O(2)$. Possiamo classificare metricamente le coniche di $\mathbb{R}^2$ in modo simile al caso affine che abbiamo esaminato fino ad ora, ma usando traslazioni e isometrie lineari. La prima parte (nella quale cambiamo la conica per traslazione) è uguale nei due casi (visto che le traslazioni in particolare sono isometrie) poi continuiamo diagonalizzando $A$, per farlo non usiamo il teorema di Sylvester ma il teorema spettrale. Chiaramente vi sono delle differenze: utilizzando isometrie otteniamo una matrice sia simile che congruente alla matrice di partenza, quindi in particolare conserva tutti gli invarianti per similitudine che conosciamo.
Sia $M \in O(2)$ una matrice ortogonale, sappiamo che

$$det\ M = det\ \widetilde{M}_N = det \left(\begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \pm 1$$

Quindi possiamo dire:

- $tr\ ({}^{\tau}MAM) = tr\ A$.
- $det\ ({}^{\tau}MAM) = det\ A$.
- $det\ \left({}^{\tau}\widetilde{M}_N Q \widetilde{M}_N\right) = det\ Q$.

È fondamentale ricordarsi che $Q$ non viene cambiata per similitudine! La matrice $\widetilde{M}_N$ non è assolutamente ortogonale, anche se ha determinante $\pm 1$. L'unica cosa che cambia anche per similitudine è la sottomatrice $A$, ma non tutta $Q$, quindi per esempio la traccia della matrice $Q$ non è un invariante di equivalenza metrica.

*Riflessione* 64. Quanto detto nella Riflessione precedente è utile se abbiamo una conica e vogliamo trovare a quale classe appartiene. Ma se ci vengono date due coniche, come facciamo a dire se queste sono metricamente equivalenti? Il problema è diverso: infatti sappiamo che una conica è una classe di proporzionalità, quindi possiamo moltiplicare una matrice per uno scalare e rimaniamo sempre dentro la conica, ma sappiamo che il determinante di una matrice è multilineare, quindi viene cambiato dal prodotto per scalari. Abbiamo quindi:

$$\alpha Q = \left(\begin{array}{c|c} \alpha A & \alpha B \\ \hline \alpha\, {}^{\tau}B & \alpha c \end{array}\right)$$

Quindi abbiamo:

- $det(\alpha Q) = \alpha^3 det\ Q$.
- $det(\alpha A) = \alpha^2 det A$.
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$.

Abbiamo quindi che sono invarianti per equivalenza metrica:

$$\frac{det\ A}{tr^2(A)} \qquad\qquad \frac{det\ Q}{tr^3(A)}$$

Inoltre, se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ sono metricamente equivalenti, abbiamo che $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$ tale che:

- $det\ Q' = \alpha^3 det\ Q$.
- $det\ A' = \alpha^2 det\ A$.
- $tr\ A' = \alpha tr\ A$.

Chiaramente non vale il viceversa: non sono un sistema completo di invarianti, sono comunque utili per trovare coniche non metricamente equivalenti.

## Quadriche

*Riflessione* 65. Sia $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ (con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oppure $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) un polinomio di grado 2. Possiamo allora scrivere:

$$f(X) = {}^{\tau}XAX + 2\,{}^{\tau}BX + c$$

con $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ simmetrica, $B \in \mathbb{K}^n$, $c \in \mathbb{K}$. Chiamiamo matrice della quadrica $[f]$ la matrice:

$$Q = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^{\tau}B & c \end{array} \right)$$

In particolare, come ci aspettiamo, la quadrica si dice degenere se $det\ Q = 0$.
Con un abuso di linguaggio chiameremo quadrica anche il supporto della quadrica.

**Definizione 79** (Cono)**.** Una quadrica $\mathcal{C}$ si dice cono di vertice $P_0 \in \mathcal{C}$ se, $\forall P \in \mathcal{C}, P \neq P_0$, la retta congiungente $P_0$ e $P$ è contenuta completamente in $\mathcal{C}$.

**Definizione 80** (Cilindro)**.** Una quadrica $\mathcal{C}$ è detta cilindro se $\exists r$ retta di $\mathbb{K}^n$ tale che $\forall P \in \mathcal{C}$ la retta passante per $P$ e parallela a $r$ è contenuta in $\mathcal{C}$.

*Riflessione* 66. Facciamo ora un ragionamento per comprendere da un altro punto di vista queste due definizioni.
Abbiamo visto che due rette parallele non si intersecano, ma in geometria proiettiva vedremo che è possibile dire che si intersecano all'infinito. Possiamo infatti completare $\mathbb{R}^2$ aggiungendogli dei punti all'infinito, quello che otteniamo è detto piano primitivo. Molto interessante notare che due rette parallele condividono la direzione, quindi due rette parallele, all'infinito, si incontrano in un punto che possiamo dire essere la direzione di queste due rette.
Pensiamo ora di fare la stessa cosa con $\mathbb{R}^3$ e pensiamo ai cilindri e ai coni. I cilindri sono fatti di rette parallele, quindi, per quanto detto (in geometria proiettiva), si incontrerebbero all'infinito, ma allora, se prendiamo un punto qualsiasi $P$ del cilindro, la retta congiungente $P$ e la direzione delle rette del cilindro è completamente compresa in $\mathcal{C}$; quindi in geometria il cilindro è a tutti gli effetti un cono. Possiamo fare anche il ragionamento inverso e vedere il cono come un cilindro. Quindi se aggiungiamo i punti all'infinito si perde la differenza tra coni e cilindri.

**Esempio 48.** 1) Se $f$ è un polinomio omogeneo di II grado il suo supporto è un cono con vertice l'origine: moltiplicando un vettore del supporto per uno scalare, si ottiene un vettore che è sempre nel luogo degli zeri (succede solo perché il vertice del cono è l'origine).

2) Se $f$ è un polinomio di secondo grado in $x_1, \ldots, x_n$ in cui non compare una variabile $x_j$ allora il luogo degli zeri è un cilindro parallelo all'asse $x_j$. Infatti, presa una soluzione qualsiasi, possiamo fare variare a nostro piacimento la componente $x_j$ e avremo ancora le stesse soluzioni. Abbiamo visto questa cosa nella quadrica data in $\mathbb{R}^3$ da $x^2 - y^2 = 0$ nell'Osservazione 94 fatta a inizio lezione.

**Esempio 49.** Consideriamo lo stesso esempio dell'Osservazione 94 appena citata. Abbiamo che il luogo degli zeri di questa quadrica è:

- un cono di vertice $(0, 0, 0)$.

- un cilindro parallelo all'asse $z$.

**Definizione 81** (Quadrica a centro)**.** Sia $Q = [g]$ una quadrica. $Q$ è detta a centro se $\exists N \in \mathbb{K}^n$ tale che, $\forall x,\ g(x) = g(\sigma_N(x))$ con $\sigma_N$ simmetria centrale di centro $N$.

*Osservazione* 95. Come ci aspettiamo i centri di $Q$ sono le soluzioni del sistema lineare:

$$AX = -B$$

**Proposizione 52.** *La proprietà di essere quadriche a centro è una proprietà affine (cioè se prendo due quadriche affinemente equivalenti sono entrambe a centro oppure nessuna delle due lo è).*

**Dimostrazione.** Sia $Q$ una quadrica. Vogliamo provare che, se $Q$ è a centro, ogni quadrica affinemente equivalente a $Q$ è a centro. Sia $Q = [f]$, $\phi \in \text{Aff }(\mathbb{K}^n)$ tale che $\phi(X') = MX' + N$. Allora abbiamo visto che:

$$Q' = \phi^{-1}(Q) = [f \circ \phi]$$

Sia $R$ un centro per $Q$, ossia $AR = -B$. Calcoliamo $R' = \phi^{-1}(R)$:

$$R' = \phi^{-1}(R) \Leftrightarrow \phi(R') = MR' + N = R \Leftrightarrow R' = M^{-1}(R - N)$$

Verifichiamo ora che $R'$ è centro per $Q'$, ossia $A'R' = -B'$. Abbiamo infatti:

$$\begin{aligned} A'R' &= {}^{\tau}MAM(M^{-1}(R-N)) = {}^{\tau}MA(R-N) \\ &= {}^{\tau}MAR - {}^{\tau}MAN = -{}^{\tau}MB - {}^{\tau}MAN \\ &= -({}^{\tau}M(B + AN)) = -B' \end{aligned}$$

Dove l'ultima uguaglianza è data da quanto visto nella Riflessione 59.

**Proposizione 53.** *Sia $Q$ una quadrica di equazione ${}^{\tau}\widetilde{X}Q\widetilde{X} = 0$. Con*

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^{\tau}B & c \end{array}\right)$$

*Allora valgono:*

*1) $rnk\ Q \leq rnk\ A + 2$.*

*2) $Q$ è a centro $\Leftrightarrow rnk\ Q \leq rnk\ A + 1$.*

**Dimostrazione.** Sia $A' = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$

1)

$$\begin{cases} rnk\ A \leq rnk\ A' \leq rnk\ A + 1 \\ rnk\ A' \leq rnk\ Q \leq rnk\ A' + 1 \end{cases} \Rightarrow rnk\ Q \leq rnk\ A + 2$$

2) Abbiamo da vedere entrambe le frecce:

'$\Rightarrow$' Se $Q$ è a centro, $AX = -B$ ha soluzione, quindi $rnk\ A = rnk\ A'$ e dunque $rnk\ Q \leq rnk\ A' + 1$

'$\Leftarrow$' Per assurdo supponiamo che $Q$ non abbia centri $\Rightarrow rnk\ A' = rnk\ A+1$ (se il rango fosse uguale allora il sistema avrebbe soluzioni, per Rouché-Capelli). Allora questo ci dice che l'ultima colonna di $A'$ è linearmente indipendente dalle prime $n$ colonne di $A$ e la stessa cosa vale in $Q$. Visto che $Q$ è simmetrica, la $n+1$-esima riga di $Q$ è linearmente indipendente dalle prime $n$ righe di $Q$ (che sono le righe che compongono $A'$). Allora abbiamo l'assurdo:

$$rnk\ Q = rnk\ A' + 1 = rnk\ A + 2$$

**Corollario 30.** *$Q$ non a centro $\Leftrightarrow rnk\ Q = rnk\ A + 2$.*

**Teorema 22** (di classificazione affine delle quadriche)**.** *Ogni quadrica di $\mathbb{K}^n$ è affinemente equivalente ad una e una sola delle seguenti:*

*1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:*

- *$x_1^2 + \ldots + x_r^2 + d = 0$, con $d = 0$ oppure $d = 1$. Equazione di una quadrica a centro.*
- *$x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_n = 0$, questa quadrica viene detta paraboloide. In questo caso quello che facciamo è innanzitutto diagonalizzare la parte di secondo grado della quadrica, otterremo quindi una matrice $A$ con degli $1$ seguiti da alcuni $0$ sulla diagonale; visto che questa conica non è a centro non possiamo sperare di eliminare del tutto i termini di primo grado, quindi quello che facciamo è prima di tutto annullare il termine noto, poi ridurre al massimo il termine di primo grado (vedremo come).*

*1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:*

- *$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 + d = 0$, con $d = 0$ oppure $d = 1$. Equazione di una quadrica a centro.*
- *$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_r^2 - x_n = 0$, anche le quadriche in questa forma vengono dette paraboloidi.*

*Osservazione* 96. Sia $\mathcal{C}$ una quadrica a centro in $\mathbb{R}^n$, se la forma canonica di $A$ è semidefinita positiva (o negativa) la quadrica si dice ellissoide; altrimenti si dice iperboloide.

**Proposizione 54** (Lista dei modelli affini per le quadriche di $\mathbb{R}^3$)**.**

- *Quadriche a centro:*
  - *Quadriche a centro non degeneri ($d \neq 0$):*

    *$\mathcal{Q}_1$ Ellissoide immaginario:*
    *Quadrica di equazione*

    $$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

    *Viene detto immaginario perché ha supporto vuoto.*

$\mathcal{Q}_2$ *Ellissoide:*
*Ha equazione:*

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

*In questo caso il supporto corrisponde a:*

$\mathcal{Q}_3$ *Iperboloide a una falda:*
*Quadriche affinemente equivalenti a:*

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

*Se scegliamo di intersecare il supporto di questa quadrica con gli i piani $H$ che hanno la componente $z$ fissata, troviamo che l'intersezione non è mai vuota ed è sempre una circonferenza (che ha raggio unitario quando $z = 0$).*

$\mathcal{Q}_4$ *Iperboloide a due falde:*
*L'equazione di questa quadrica è:*

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$$

*Quando facciamo l'intersezione tra il supporto di questa quadrica e i piani $H$ che ormai conosciamo, vediamo che l'intersezione è diversa dal vuoto solamente se $|z| > 1$, abbiamo quindi che l'intersezione con i piani che hanno come ultima componente un valore inferiore a 1 è l'insieme vuoto, mentre, con il crescere del valore assoluto di $z$, abbiamo le solite circonfereze.*
*Viene detto iperboloide a due falde perché, come si vede, è composto da due 'pezzi' distinti (non specifichiamo in termini più rigorosi).*

– *Quadriche a centro degeneri ($d = 0$) in particolare i supporti di queste quadriche sono coni:*

$\mathcal{Q}_5$ *punto o cono immaginario: Quadrica di equazione:*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

*Questa quadrica ha come supporto solo l'origine di $\mathbb{R}^3$, cioè un punto.*

$\mathcal{Q}_6$ *Cono reale:*
*Si dice cono una quadrica che sia affinemente equivalente a:*

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

*Il luogo degli zeri di questa quadrica è quello che comunemente viene chiamato cono, riusciamo a vederlo considerando che l'intersezione con i piani $H$ dà sempre una circonferenza.*

$\mathcal{Q}_7$ *Piani complessi incidenti:*
*Hanno equazione:*

$$x^2 + y^2 = 0$$

*È da notare che il supporto di questa quadrica (l'asse $z$) e delle prossime due quadriche, è un cilindro: abbiamo infatti che la variabile $z$ non influisce sulla soluzione, quindi l'intersezione con i vari piani $H$ sarà sempre uguale (in questo caso un punto).*

$\mathcal{Q}_8$ *Piani incidenti:*
*La quadrica di equazione*

$$x^2 - y^2 = 0$$

*Ha come supporto due piani incidenti, in paricolare questo supporto è un cilindro (manca la variabile* $z$ *nell'equazione) e l'intersezione tra il supporto e i piani* $H$ *è il luogo delle soluzioni di* $x^2 - y^2$ *in* $\mathbb{R}^2$*. Quindi la sezione del supporto di questa quadrica non varia al variare di* $z$ *(infatti è un cilindro).*

$\mathcal{Q}_9$ *Piano doppio:*
*Equazione:*

$$x^2 = 0$$

*Anche il supporto di questa quadrica è sia un cono sia un cilindro.*

– *A centro degeneri con* $d \neq 0$*.*

$\mathcal{Q}_{10}$ *Cilindro immaginario:*
*ha equazione:*

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

*e ha supporto vuoto (questo è un esempio del fatto che i supporti uguali possono appartenere a quadriche differenti).*

$\mathcal{Q}_{11}$ *Cilindro iperbolico: Viene detto cilindro iperbolico una quadrica affinemente equivalente alla quadrica di equazione:*

$$x^1 - y^2 + 1 = 0$$

*Anche il supporto di questa quadrica è un cilindro: non appare la* $z$*.*

$\mathcal{Q}_{12}$ *Cilindro ellittico:*
*Ha equazione:*

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

*E il suo luogo degli zeri è quello che si intende comunemente per cilindro (ed è effettivamente un cilindro) che, intersecato con gli* $H$ *che conosciamo, dà delle ellissi reali (circonferenze).*

$\mathcal{Q}_{13}$ *Piani paralleli:*
*Quadrica di equazione:*

$$x^2 - 1 = 0$$

$\mathcal{Q}_{13}$ *Piani complessi paralleli:*
*di equazione:*

$$x^2 + 1 = 0$$

*e di supporto vuoto.*

- *Quadriche non a centro (paraboloidi):*

- *Quadriche non a centro non degeneri:*

  $\mathcal{Q}_{15}$ *Paraboloide ellittico:*
  *quadrica di equazione:*

$$x^2 + y^2 - z = 0$$

  $\mathcal{Q}_{16}$ *Paraboloide iperbolico o 'sella':*
  *ha equazione:*

$$x^2 - y^2 - z = 0$$

- *Quadriche non a centro degeneri:*

  $\mathcal{Q}_{17}$ *Cilindro parabolico:*
  *Ha equazione:*

$$x^2 - z = 0$$

  *vediamo che questo è un cilindro (in questo caso la variabile libera è però $y$). Vediamo che al variare di $y$ le soluzioni non cambiano e l'intersezione con i piani paralleli questa volta al piano degli assi $z$ e $x$ dà delle parabole; se invece facciamo l'intersezione con i piani $H$ che tengono fissa l'ultima componente abbiamo che l'intersezione sono delle rette parallele (e questo è coerente con il fatto che sia un cilindro e che l'intersezione con i piani lungo $y$ dia luogo a delle parabole).*

*Osservazione* 97. Possiamo riassumere il tutto in una tabella (ipotizzando la solita notazione matriciale delle quadriche: la quadrica è espressa dalla matrice $Q$ di dimensione 4 che ha come sottomatrice principale di dimensione 3 il minore $A$):

| | $\mathcal{Q}_1$ | $\mathcal{Q}_2$ | $\mathcal{Q}_3$ | $\mathcal{Q}_4$ | $\mathcal{Q}_5$ | $\mathcal{Q}_6$ | $\mathcal{Q}_7$ | $\mathcal{Q}_8$ | $\mathcal{Q}_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $rnk\ A$ | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| $rnk\ Q$ | 4 | 4 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| $w(A)$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| $w(Q)$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |

| | $\mathcal{Q}_{10}$ | $\mathcal{Q}_{11}$ | $\mathcal{Q}_{12}$ | $\mathcal{Q}_{13}$ | $\mathcal{Q}_{14}$ | $\mathcal{Q}_{15}$ | $\mathcal{Q}_{16}$ | $\mathcal{Q}_{17}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $rnk\ A$ | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| $rnk\ Q$ | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 4 | 3 |
| $w(A)$ | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| $w(Q)$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 2 | 2 |

Abbiamo quindi che $(rnk\ A, rnk\ Q, w(A), w(Q))$ è un sistema completo di invarianti per equivalenza affine di quadriche in $\mathbb{R}^3$.

## Riduzione a forma canonica affine di una quadrica non a centro

*Riflessione* 67. Supponiamo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $\mathcal{Q}$ una quadrica non a centro di $\mathbb{C}^n$ tale che (con la solita notazione) $det\ A = 0$; chiamiamo $r = rnk\ A$.
Vediamo allora quello che dobbiamo fare (visto che sappiamo che la quadrica non ha centro vogliamo comunque ottenere una forma decente):

- Per il teorema di Sylvester, e per mezzo di una trasformazione lineare, ci riduciamo a:

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & \multirow{2}{*}{$B$} \\ 0 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{{}^\tau B} & c \end{array}\right)$$

Sia $B = \left(\begin{smallmatrix} B_1 \\ B_2 \end{smallmatrix}\right)$, con $B_1 \in \mathbb{C}^r$ e $B_2 \in \mathbb{C}^{n-r}$.

- Con una traslazione ci si riduce a $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ B_2 \end{smallmatrix}\right)$. A questo punto, se $c = 0$, ci troviamo:

$$Q = \left(\begin{array}{cc|c} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ \hline 0 & {}^\tau B_2 & 0 \end{array}\right)$$

Sappiamo però a questo punto che esiste $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\phi} \mathbb{C}^n$ isomorfismo lineare tale che:

$$\begin{cases} \phi \mid_{\mathbb{C}^r = Span(\{e_1, \ldots, e_r\})} = id \\ \phi(C^{n-r}) \subseteq \phi(C^{n-r}) \\ \phi(B_2) = e_n \end{cases}$$

Abbiamo allora che la matrice associata a $\phi$ nella base canonica sarà del tipo:

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{C}}(\phi) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$$

con $G$ (invertibile) tale che $GB_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-r}$. A questo punto trasformiamo $Q$ attraverso l'applicazione lineare:

$$X \longrightarrow \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & {}^\tau G \end{pmatrix} X = MX$$

Avremo che $Q$ viene trasformata in una qualche $Q' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ {}^\tau B' & c' \end{pmatrix}$ (con $c' = 0$, infatti non abbiamo fatto traslazioni). Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} A' = {}^\tau MAM = A \\ B' = {}^\tau MB = e_n \end{cases}$$

Abbiamo quindi la forma canonica che volevamo.

# Esercitazione

*Riflessione* 68. Sia $V$ uno spazio vettoriale e $A \subseteq V$ un suo sottoinsieme. Abbiamo visto che:

$$comb_a(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \;\middle|\; \forall i,\ P_i \in A,\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

è il più piccolo sottospazio affine contenente tutti i punti di $A$. La giacitura di $comb_a(A)$ è:

$$W = giac(comb_a(A)) = Span(\{P - Q \mid P, Q \in A\})$$

Infatti, fissato un punto $P_0 \in A$, le combinazioni affini di $A$ sono il traslato di $P_0$ di vettori della giacitura, possiamo cioè scrivere:

$$comb_a(A) = P_0 + W$$

Vediamo perché:

'$\supseteq$'

$$v \in P_0 + W \Rightarrow v = P_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_i - Q_i) = P_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i Q_i$$

Ma questa è una combinazione affine di elementi di $A$, infatti per ipotesi $P_0 \in A$ ma anche $P_i, Q_i \in A$ per ogni $i$. Inoltre la somma dei coefficienti dà esattamente 1.

'$\subseteq$' Sia $v \in comb_a(A)$. Allora $v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$ per opportuni $P_i \in A$ e $\lambda_i$ tali che $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Allora:

$$v = P_0 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i = P_0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (P_0 - P_i) \Rightarrow v \in P_0 + W$$

Dove l'ultima implicazione è dovuta al fatto che $P_0 - P_i \in W$ in quanto $P_0, P_i \in A$.

*Riflessione* 69. Siano $L_1, L_2$ sottospazi affini di $V$. Possiamo allora definire:

$$L_1 + L_2 = comb_a(L_1 \cup L_2)$$

Il più piccolo sottospazio affine contenente $L_1$ e $L_2$. Ma a cosa corrisponde la giacitura della somma?

$$giac(L_1 + L_2) = \begin{cases} giac(L_1) + giac(L_2) \Leftarrow L_1 \cap L_2 \neq \varnothing \\ (giac(L_1) + giac(L_2)) \oplus Span(\{P - Q\}) \;\; con\ P \in L_1, Q \in L_2 \Leftarrow L_1 \cap L_2 = \varnothing \end{cases}$$

È facile vedere che questo funziona nel caso dell'intersezione non vuota. Possiamo infatti prendere un punto nell'intersezione e rimontare su di esso la struttura di spazio vettoriale di $V$. Non ci è possibile fare la stessa cosa se l'intersezione è vuota. Ma vediamo formalmente la dimostrazione in entrambi i casi:

*Dimostrazione.* Separiamo i casi a seconda dell'intersezione.

1) $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$.

   '$\supseteq$' Sia $P_0 \in L_1 \cap L_2$. Abbiamo allora:

$$\begin{aligned} L_1, L_2 \subseteq L_1 + L_2 &\Rightarrow giac(L_1), giac(L_2) \subseteq giac(L_1 + L_2) \\ &\Rightarrow giac(L_1) + giac(L_2) \subseteq giac(L_1 + L_2) \end{aligned}$$

   '$\subseteq$' Sappiamo di poter scrivere:

$$L_1 = P_0 + giac(L_1) \qquad\qquad L_2 = P_0 + giac(L_2)$$

Siano $P = P_0 + v, Q = P_0 + w \in L_1 \cup L_2$. Allora:

$$P - Q \in \begin{cases} giac(L_1) \Leftarrow P, Q \in L_1 \\ giac(L_2) \Leftarrow P, Q \in L_2 \\ P \in L_1, Q \in L_2 \Rightarrow P - Q = v - w \in giac(L_1) + giac(L_2) \end{cases}$$

2) $L_1 \cap L_2 = \varnothing$.

- Visto che l'intersezione è nulla se abbiamo:

$$P \in L_1 \qquad\qquad Q \in L_2$$

abbiamo $P \neq Q$. Possiamo allora scrivere:

$$\begin{cases} giac(L_1), giac(L_2) \subseteq giac(L_1 + L_2) \\ P - Q \in giac(L_1 + L_2) \end{cases}$$
$$\Rightarrow giac(L_1) + giac(L_2) + Span\left(\{P - Q\}\right) \subseteq giac(L_1 + L_2)$$

- Abbiamo inoltre che:

$$P - Q \notin (giac(L_1) + giac(L_2))$$
$$\Rightarrow Span\left(\{P - Q\}\right) \cap (giac(L_1) + giac(L_2)) = \{0\}$$

Abbiamo che $P - Q \notin (giac(L_1) + giac(L_2)$, infatti, se appartenesse, avremmo $P - Q = v + w$ e quindi $P - v = Q + w$, ma questo è assurdo, visto che il primo membro appartiene a $L_1$ e il secondo a $L_2$.

'$\subseteq$' Siano $P_1, Q_1 \in L_1 \cup L_2$ Abbiamo allora che:

$$P_1 - Q_1 \in \begin{cases} giac(L_1) \Leftarrow P_1, Q_1 \in L_1 \\ giac(L_2) \Leftarrow P_1, Q_1 \in L_2 \end{cases}$$

Se abbiamo invece che $P_1 \in L_1$ e $Q_1 \in L_2$ possiamo allora scrivere (con i $P$ e $Q$ del punto precedente):

$$L_1 = P + giac(L_1) \qquad\qquad L_2 = Q + giac(L_2)$$

e quindi:

$$P_1 = P + v,\ Q_1 = Q + w \Rightarrow P_1 - Q_1 = (P - Q) + (v - w)$$

## Coniche

*Riflessione* 70. Sia

$$p = ax^2 + bxy9cy^2 + dx + ey + f$$

Questo polinomio definisce una ipersuperficie: una classe di equivalenza di polinomi (rispetto alla proporzionalità). Ci interessiamo a queste classi di equivalenza (alle ipersuperfici) perché siamo interessati al supporto di $p$: al luogo degli zeri ($V(p)$). abbiamo che:

$$supp. = V(p) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, p(x,y) = 0 \right\}$$

E il supporto non varia per proporzionalità (anche se ipersuperfici non proporzionali possono avere supporti uguali), per questo ci interessiamo alle ipersuperfici e non ai singoli polinomi.
Possiamo studiare $p$ utilizzando delle matrici che ci siano comode:

$$p(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} Q \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad con\ Q = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix} = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^{\tau}B & c \end{array} \right)$$

Quindi ci stiamo interessando a dei vettori isotropi di un prodotto scalare, argomento già trattato abbastanza approfonditamente. Ci siamo quindi ricondotti a un problema più o meno noto. In realtà quello che noi cerchiamo (il supporto di $P$) è dato dall'intersezione tra il cono isotropo di $Q$ e il piano formato dai vettori che hanno come ultima coordinata 1. Stiamo quindi intersecando un cono isotropo a un iperpiano affine.

*Riflessione* 71. Sia $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2$ un'affinità tale che $f(X) = MX + N$ (con $M \in GL(2,\mathbb{R})$ e $N \in \mathbb{R}^2$. Cosa succede se agiamo sulla quadrica $Q$ con questa affinità?

$$Q \longrightarrow {}^{\tau}\left( \begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) Q \left( \begin{array}{c|c} M & N \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} {}^{\tau}MAM & * \\ \hline * & * \end{array} \right)$$

Questo ci fa capire che sia la matrice $A$ che la matrice $Q$ cambiano per congruenza, in particolare $A$ è modificata solo dalla parte lineare dell'affinità.
Ma sapendo come agisce l'affinità sulla conica possiamo ridurre $A$ alla sua forma diagonale e poi normalizzarla, per ottenere una matrice canonica (in questo modo possiamo classificare le coniche secondo l'equivalenza affine).

**Esempio 50.** Sia $p = x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y$. Abbiamo allora:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che $\sigma(A) = (1,1,0)$, quindi, visto che sappiamo che esiste una affinità che porta $A$ in una base ortogonale, abbiamo che la forma canonica di questa conica avrà come parte di secondo grado: $x^2 - y^2$. Per vedere se la conica è a centro (e quindi per capire se sono presenti termini di primo grado) dobbiamo vedere se ha soluzione il sistema $AX = -B$. Ma abbiamo appena visto che $A$ è invertibile, quindi il sistema ha soluzione, qualunque sia la $B$. Quindi la conica è a centro, quindi è possibile trovare un'affinità che elimini i termini di primo grado.

Bisogna solo vedere se il termine noto, nella forma canonica, sarà nullo oppure no; ma visto che *det* $Q = 0$, sappiamo che avremo una base nella quale:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

E quindi la conica è affinemente equivalente a $x^2 - y^2$. Quindi il supporto della conica sono due rette incidenti.
Sappiamo quindi che $p$ può essere scritta come differenza di due quadrati, infatti abbiamo (ci sono diversi conti da fare):

$$p = \left(x^2 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right)^2$$

Quindi un modo (di solito non utilizzato, visto che funziona solamente nelle coniche e non sempre: potrebbero semplificarsi i termini e non permetterci di fare il raccoglimento) per trovare l'affinità è: trovare (come abbiamo fatto qui senza riportare i conti) come scrivere la quadrica come differenza di quadrati (in questo caso particolare) e poi cercare (a questo punto è facile) un'affinità $f$ tale che:

- $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}$
- $f(y) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$

Abbiamo quindi:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Questa affinità porta la nostra conica nel rappresentante standard della sua classe di equivalenza affine.

# Lezione 42

## Esercitazione

### Fasci di coniche

*Riflessione* 72. Siano $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x, y]$ dei polinomi di secondo grado. Ci interessiamo al fascio delle coniche:

$$P_\lambda = p_1 + \lambda p_2$$

chiamiamo cioè fascio di coniche l'insieme dei vari $P_\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Si dice base del fascio di coniche l'insieme:

$$\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} supp(P_\lambda) = supp(p_1) \cap supp(p_2) = supp(P_{\lambda_1}) \cap supp(P_{\lambda_2}),\ \forall \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Dove il $\supseteq$ della prima uguaglianza è dato dal fatto che:

$$R \in supp(p_1) \cap supp(p_2) \Rightarrow p_1(R) + \lambda p_2(R) = 0$$

Comunque ci è particolarmente utile l'uguaglianza del terzo membro: significa che possiamo scegliere una qualsiasi coppia di coniche del fascio per fare l'intersezione, in particolare è più semplice utilizzare delle coniche degeneri. Ma come facciamo a sapere quali sono i valori di $\lambda$ per i quali $P_\lambda$ è degenere?
Ricordiamoci che, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $P_\lambda$ è una conica, quindi esiste una matrice associata ad essa, in particolare, se chiamiamo $Q_1$ la matrice associata a $p_1$ e $Q_2$ la matrice associata a $p_2$, abbiamo che la matrice $Q_\lambda$ associata a $P_\lambda$ sarà:

$$Q_\lambda = Q_1 + \lambda Q_2$$

Abbiamo quindi che il determinante di $Q_\lambda$ sarà un polinomio in $\lambda$; abbiamo che $P_\lambda$ è degenere se il suo determinante è zero, quindi per trovare i $\lambda$ per i quali $P_\lambda$ è degenere basta scegliere i $\lambda$ che annullano il determinante di $Q_\lambda$.

*Osservazione* 98. Vediamo abbastanza facilmente che, data una retta (di equazione $y = mx + n$), questa, rispetto a un'ellisse di equazione $p(x, y)$, può essere:

- esterna: se non interseca l'ellisse.

- secante: se interseca l'ellisse in due punti.

- tangente: se interseca l'ellisse in un punto.

Se la retta non è interna alla conica (cosa impossibile nel caso dell'ellisse) al massimo l'intersezione tra retta e conica può avvenire in due punti, infatti il sistema:

$$\begin{cases} p(x,y) = 0 \\ y = mx + n \end{cases} \Rightarrow q(x) = p(x, mx+n) = 0$$

Abbiamo quindi che $q(x)$ è un polinomio in $x$ di grado secondo, che può quindi al massimo avere due radici reali. Abbiamo quindi che, se $\Delta < 0$, il sistema non ha soluzioni e quindi la retta è esterna; se $\Delta = 0$ vi è un'unica soluzione, quindi la retta è tangente; se $\Delta > 0$ vi sono due soluzioni. Se invece $q(x)$ fosse nullo a tappeto allora tutti i punti della retta sarebbero soluzione e quindi avremmo che la retta è contenuta nella conica.

**Esempio 51.** Sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$$

La matrice $Q$ associata a $\mathcal{C}$ e la sua segnatura sono:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma(Q) = (2,1,0)$$

Vediamo (mantenendo la notazione utilizzata fin ora) che $\sigma(A) = (2,0,0)$; abbiamo quindi che il modello canonico affinemente equivalente a $\mathcal{C}$ è $\widetilde{\mathcal{C}}$ che ha equazione:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Quindi la nostra conica è affinemente equivalente a un'ellisse.

Vediamo se il punto $P = (0,0)$ è contenuto o no nella conica (se fosse contenuto tutte le rette passante per il punto sarebbero secanti l'ellisse, se fosse esterno sarebbero alcune secanti, alcune esterne e solo due tangenti, se fosse sull'ellissi avremmo una retta tangente e tutte le altre secanti).
Il fascio di rette passanti per $(0,0)$ è l'insieme:

$$\{y = mx\} \cup \{x = 0\}$$

Abbiamo allora:

- $\mathcal{C} \cap \{x = 0\}$ sono i punti che soddisfano il sistema:

  $$\begin{cases} 2y^2 - 2y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

  Vediamo che questi sono esattamente due punti, questo vuol dire che l'asse $y$ interseca in due punti l'ellisse.

- Vediamo invece l'intersezione con le altre generiche rette, di equazione $y = mx$. Cerchiamo le soluzioni del sistema:

  $$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \\ y = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2mx^2 + 2(mx)^2 - 2x - 2mx - 1 = 0 \\ y = mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - 2m + 2m^2 \\ y = mx \end{cases}$$

> Abbiamo che $\Delta = 4(3m^2 + 4m + 2)$, numero sempre positivo $\forall m \in \mathbb{R}$. Quindi, qualsiasi $m$ scegliamo, abbiamo che l'equazione dell'intersezione tra $y = mx$ e $\mathcal{C}$ ha sempre due soluzioni. Quindi il punto $P$ è interno alla conica, infatti tutte le rette passanti per esso sono secanti.

Possiamo ricavarci facilmente un altro punto interno: il centro; che è soluzione di $AX = -B$. Inoltre, visto che l'ellisse è convessa, tutti i punti tra il centro e l'origine saranno compresi nell'ellisse.

**Esempio 52.** Sia $p = x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 2$ un polinomio in $\mathbb{R}[x]$. Vogliamo trovarne le radici. Esistono delle formule particolarmente complicate, ma possiamo cercare di risolvere il sistema equivalente:

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - xy - 5x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

Vediamo quindi le radici del polinomio come intersezione di due coniche, la conica di equazione $p_2$ cioè $y = x^2$ (una parabola) e la conica $p_1$ di equazione $y^2 - xy - 5x^2 + 3x + 2$. Dobbiamo cercare $p_1 \cap p_2$. Ma, se diciamo:

$$P_\lambda = p_1 + \lambda p_2$$

allora abbiamo visto che:

$$supp(p_1) \cap supp(p_2) = supp(P_{\lambda_1}) \cap supp(P_{\lambda_2}),\ \forall \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Cerchiamo quindi $Q_\lambda$ la matrice associata a $P_\lambda$, poi cerchiamo un valore $\mu$ per il quale $Q_\mu$ è degenere (e quindi $P_\mu$ è degenere) poi facciamo l'intersezione tra $P_\mu$ e $p_1$.

$$Q_\lambda = \begin{pmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\lambda & & \\ & & \frac{\lambda}{2} \\ & \frac{\lambda}{2} & \end{pmatrix}$$

Abbiamo che

$$det(2Q_\lambda) = 2\lambda^3 + 10\lambda^2 - 22\lambda - 102$$

Quindi $\lambda = -3$ è radice, quindi $P_{-3}$ è una conica degenere. Più precisamente abbiamo:

$$2Q_{-3} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \sigma(A_{-3}) = (1,1,0),\ \sigma(Q_{-3}) = (1,1,1)$$

abbiamo quindi che $P_{-3}$ è affinemente equivalente a $x^2 - y^2 = 0$, a una coppia di rette incidenti. Voglio quindi scrivere $P_{-3}$ come

$$P_{-3} = c(y + mx + n)(y + m'x + n')$$

sappiamo che è possibile perché c'è una base nella quale $P_{-3}$ diventa $x^2 - y^2$. Comunque troviamo che:

$$P_{-3} = (y - 2x - 1)(y + x - 2)$$

Calcoliamo dunque l'intersezione tra $P_{-3}$ e $p_1$ e abbiamo finito.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y - 2x - 1 = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = x^2 \\ y + x - 2 = 0 \end{cases}$$

## Quadriche

**Esempio 53.** Consideriamo le due rette in $\mathbb{R}^3$:

$$r_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\right) \qquad r_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

Chiamiamo $P_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ e $P_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$. Comunque $r_1$ e $r_2$ sicuramente sono rette non parallele (le giaciture si intersecano solo nell'origine) quindi possono essere sghembe o incidenti; per vederlo potremmo esaminare la dimensione di $r_1 + r_2$ (il più piccolo sottospazio affine contenente $r_1$ e $r_2$): se la dimensione è 2 le rette sono incidenti, se $r_1 + r_2 = \mathbb{R}^3$ invece le rette sono sghembe.
Abbiamo visto che per vedere in quale caso ci troviamo dobbiamo chiederci se:

$$P_1 - P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in giac(r_1) + giac(r_2) = Span\left(\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$

vediamo che il punto non appartiene, e quindi le due rette sono sghembe.

Consideriamo adesso, dato $t \in \mathbb{R}$,

$$Q_1(t) = P_1 + t\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad Q_2(t) = P_2 + t\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

E definiamo $\ell(t)$ la retta passante per $Q_1(t)$ e $Q_2(t)$. Vediamo a cosa corrisponde:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \ell(t)$$

Vediamo che $\mathcal{C}$ è una quadrica e cerchiamone l'equazione.

$$\begin{aligned} \ell(t) &= \{\lambda Q_1(t) + (1-\lambda)Q_2(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1+t \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$\mathcal{C} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2+t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (1-\lambda)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1+t \end{pmatrix} \;\middle|\; t, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Cerchiamo quindi di trovare le equazioni liberandoci dai parametri:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\lambda + \lambda t - 1 \\ y = \lambda \\ x = 2\lambda - 1 - \lambda t + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = y \\ t = x + z - 5y + 2 \\ x = 3y + y(x + z - 5y + 2) - 1 \end{cases}$$

Abbiamo quindi che $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x = 3y + y(x + z - 5y + 2) - 1$. Quindi questa è l'equazione della quadrica, che non è parametrica (vale l'uguaglianza perché vi sono dei se e solo se, altrimenti di solito è necessario fare l'inclusione della conica trovata nella conica $\mathcal{C}$ dalla quale siamo partiti). Abbiamo quindi che la matrice associata a $\mathcal{C}$ è:

$$2Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

A questo punto sappiamo quello che dobbiamo trovare:

- $rnk\ A = 2$.
- $\sigma(A) = (1, 1, 1)$.
- $det\ Q > 0$.
- $\sigma(A) \Rightarrow w\,(Q) \geq 2$ ma $det\ Q > 0 \Rightarrow w\,(Q) = 2$.

Abbiamo quindi che $\mathcal{C}$ è affinemente equivalente alla conica di equazione $z^2 - y^2 + 2z = 0$, che è un paraboloide iperbolico o sella.

Sono interessanti le intersezioni che otteniamo con i piani perpendicolari agli assi, per vederle fissiamo una variabile e vediamo che conica viene mantenendo l'equazione.

**Esempio 54.** Cerchiamo di scrivere la sella (il modello canonico) come unione di rette:

$$x^2 - y^2 + 2z = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = \frac{-2}{\lambda}(z\lambda) \quad con\ \lambda \neq 0$$

Ma possiamo allora uguagliare membro a membro e trovare:

$$\begin{cases} x + y = -\frac{2}{\lambda} \\ x - y = z\lambda \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x + y = z\lambda \\ x - y = -\frac{2}{\lambda} \end{cases}$$

Questi due sistemi, al variare di $\lambda$, rappresentano una famiglia di rette, infatti ciascuna equazione individua un piano e l'intersezione di due piani (che qui non sono paralleli) individua una retta. Al variare di $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ ciascuna famiglia ricopre tutta la quadrica, e ogni retta di ciascuna famiglia è contenuta completamente nella quadrica (ovviamente), non interseca le altre rette della sua famiglia ma interseca tutte le rette dell'altra famiglia. Le due famiglie sono quindi insiemi di rette tra di loro sghembe ciascuna delle quali incidenti con l'altra famiglia.

**Esempio 55.** Vediamo di fare la stessa cosa con l'iperboloide a una falda (che ha equazione $x^2 + y^2 = z^2 + 1$). Intanto vediamo le intersezioni con i piani ottenuti fissando una coordinata:

- $z = c$, si ottiene $x^2 + y^2 = c^2 + 1$, l'equazione di una circonferenza. Quindi l'intersezione con i piani di punti che hanno terza coordinata $c$, è una circonferenza.
- $x = c$, sono l'equazione di un'iperbole.

- $y = c$, anche queste vengono iperbole.

Vediamo di scrivere l'iperboloide come unione di rette.

$$x^2 + y^2 = z^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - z^2 = 1 - y^2 \Leftrightarrow (x-z)(x+z) = \frac{1-y}{\lambda}(1+y)$$

Abbiamo quindi le due famiglie:

$$\begin{cases} x + z = \lambda(1+y) \\ x - z = \frac{1-y}{\lambda} \end{cases} \qquad \vee \qquad \begin{cases} x + z = \frac{1-y}{\lambda} \\ x - z = \lambda(1+y) \end{cases}$$

Anche in questo caso ciascuna famiglia ricopre tutta la quadrica, inoltre tutte le rette di una famiglia sono tra di loro sghembe e intersecano in un punto tutte le rette dell'altra famiglia.