Esercizi sui limiti - parte I

Daniele Serra

20 Novembre 2013

1 Limiti: definizioni

Per trattare i limiti di funzioni reali, adottiamo un *escamotage* che ci permetterà di dare una definizione unica.

Definizione 1. La *retta reale estesa* è l'insieme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Con la definizione precedente, adesso possiamo trattare $+\infty$ e $-\infty$ come se fossero dei punti di $\mathbb{R}$, al pari di ogni altro numero reale. Naturalmente abbiamo bisogno di sapere chi sono gli intorni di tali punti.

Definizione 2. Un *intorno di* $+\infty$ è un intervallo del tipo $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$; un intorno di $-\infty$ è un intervallo del tipo $(-\infty, b)$, con $b \in \mathbb{R}$.

Se $x \in \mathbb{R}$, ricordiamo che abbiamo definito un intorno di x del tipo (x, a) e del tipo (b, x) rispettivamente *intorno destro* e *intorno sinistro* di x. Perciò gli intorni di $+\infty$ sono solo intorni sinistri, e gli intorni di $-\infty$ sono solo intorni destri.

Possiamo dare la definizione di limite di una funzione reale.

Definizione 3. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f\colon A \to \mathbb{R}^*$ una funzione. Sia x_0 un punto di accumulazione per A. Un valore $\ell \in \mathbb{R}^*$ si dice *limite di f in x_0* se, per ogni intorno U di ℓ, esiste un intorno V di x_0 tale che $f(x) \in U$ per ogni $x \in V,\ x \neq x_0$.

In altre parole, ℓ è limite per f in x_0 se per ogni intorno U di ℓ riusciamo a trovare un intorno V di x_0 la cui immagine è tutta contenuta in U (ad eccezione di x_0, eventualmente). Geometricamente (e informalmente), questo corrisponde all'idea che il limite in x_0 è ℓ se punti vicini a ℓ sono immagini di punti vicini a x_0. *È essenziale che x_0 sia di accumulazione per l'insieme su cui è definita la funzione.* Quando non diversamente specificato, si intende che il punto x_0 sia di accumulazione.

Dalla definizione precedente, a seconda che ℓ e x_0 siano finiti o infiniti, possiamo derivare quattro definizioni di limite:

x_0 **finito,** ℓ **finito** : per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

x_0 **finito,** ℓ **infinito** : per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ t.c. se $|x - x_0| < \delta$, allora $|f(x)| > M$.

x_0 **infinito,** ℓ **finito** : per ogni $\epsilon > 0$ esiste $N > 0$ t.c. se $|x| > N$, allora $|f(x) - \ell| < \epsilon$.

x_0 **infinito,** ℓ **infinito** : per ogni $M > 0$ esiste $N > 0$ t.c. se $|x| > N$, allora $|f(x)| > M$.

Osservazione 1. Si vede dalle definizioni precedenti che se troviamo un valore $\bar{\delta}$ valido per un certo valore $\bar{\epsilon}$, allora $\bar{\delta}$ è valido per tutti i valori maggiori di $\bar{\epsilon}$. Di conseguenza, quando si verificano i limiti, non serve dimostrare le proprietà precedenti per ogni valore di ϵ, ma basta dimostrarle per ϵ piccoli (o meglio, più piccoli di un valore arbitrario).

2 Esercizi di verifica dei limiti

Esercizio 1. Verificare, usando la definizione, che

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x-3}{x+1} = 1.$$

Esercizio 2. Verificare, usando la definizione, che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2-x}{x} = +\infty.$$

Esercizio 3. Verificare, usando la definizione, che

$$\lim_{x \to 0} a^x = 1 \quad \text{per ogni } a > 0.$$

3 Limiti delle funzioni elementari

I seguenti limiti sono fondamentali per svolgere esercizi di calcolo dei limiti.

Monomi in una variabile

Sia n un numero naturale positivo.

- $\lim_{x \to 0} x^n = 0$ per ogni $n > 0$.
- $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ per ogni $n > 0$.
- $\lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ se n è pari, $-\infty$ se n è dispari.

Funzione esponenziale

Sia $a > 0$ un numero reale.

- Se $a > 1$, allora $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ e $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$.
- Se $a < 1$, allora $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$.

Funzione logaritmica

Sia $a > 0$ un numero reale.

- Per ogni $a > 0$, $\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$.
- Se $a > 1$, allora $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$.
- Se $a < 1$, allora $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ e $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$.

Funzioni trigonometriche

- $\lim_{x\to\pm\infty} \sin x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \cos x$, $\lim_{x\to\pm\infty} \tan x$ non esistono.
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

4 Teoremi sui limiti

Enunciamo due teoremi importanti sui limiti.

Teorema 1 (di unicità del limite)**.** *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 di accumulazione per A. Se esiste $\lim_{x\to x_0} f(x)$, questo è unico.*

Teorema 2 (dei due carabinieri)**.** *Siano $f(x), g(x), h(x)$ tre funzioni, e supponiamo che risulti $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ in un intorno di x_0 (escluso x_0), e*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell.$$

Allora si ha anche

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell.$$

5 Altri esercizi

Esercizio 4. Sia $c \in \mathbb{R}$, $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e x_0 di accumulazione per A. Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, allora $\lim_{x\to x_0} cf(x) = c\ell$.

Esercizio 5. Dimostrare che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0$. È vero per limiti finiti diversi da zero?

Esercizio 6. Sia $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione *infinitesima* in x_0, cioè $\lim_{x\to x_0} F(x) = 0$ e $G\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione *limitata*, cioè esiste un numero reale $K > 0$ tale che $|G(x)| \leq M$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Dimostrare che

$$\lim_{x\to x_0} F(x)G(x) = 0.$$

(Suggerimento: usare il Teorema dei Carabinieri.)

Esercizio 7. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} x^n \cos x \quad \text{se } n \in \mathbb{N}^+, \qquad \lim_{x\to 1} \log x \sin x.$$

Esercizio 8. Sia $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ \frac{2-x}{x} & x > 0. \end{cases}$$

Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x\to 0} f(x).$$