Esercizi sui limiti - parte III

Daniele Serra

4 Dicembre 2013

1 Prodotto di infinitesima per limitata

Ricordiamo il teorema, presente nelle note del 20 Novembre, sul limite del prodotto di infinitesima per limitata.

Teorema 1. *Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tali che f è infinitesima in x_0 e g è limitata. Allora*

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Usando il teorema precedente, si calcoli il seguente limite:

$$\lim_{x \to +\infty} x - \sin^2 x \ln x.$$

2 Altri limiti notevoli

Un limite notevole decisamente importante è il seguente:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

dove e è il numero di Eulero, $e = 2.7172\ldots$. Da esso discendono altri limiti notevoli altrettanto importanti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Si calcolino i seguenti limiti.

Esercizio 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\ln(1 + \sin^4 x)}$$

Esercizio 2.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2 x)^{\tan^2 x}.$$

Esercizio 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

Esercizio 4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\tan^4 x + 1)}{e^{2\sin^4 x}-1}.$$

Esercizio 5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}.$$

3 Limiti di successioni

Una successione è una funzione $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Vista la dipendenza di a da n, si usa indicare una successione con la scrittura $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e il termine generico semplicemente come a_n. Ad esempio, la successione $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, data da $a(n) = 2n + 1$, viene indicata con

$$a_n = 2n + 1.$$

Delle successioni se ne calcolano solo i limiti a $+\infty$, per cui spesso nei testi si trova scritto, ad esempio,

$$\lim_n a_n \quad \text{invece di} \quad \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Esercizio 6. Perché non ha senso calcolare, ad esempio,

$$\lim_{n\to 3} \frac{1}{n-3}?$$

Un altro paio di limiti notevoli (il primo può essere usato anche nel caso delle funzioni):

$$\lim_n \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0,\ \alpha > 0, \qquad \lim_n \sqrt[n]{n}.$$

Esercizio 7. Ricavare il secondo limite notevole dal primo.

Ci sono diverse tecniche per calcolare limiti delle successioni. Valgono tutti i limiti notevoli visti per le funzioni (quando applicabili), in particolare quelli delle funzioni razionali fratte. Ad esempio, calcolare

$$\lim_n n\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+3}}-1\right).$$

3.1 Calcolo di limiti con maggiorazioni

È spesso utile usare il teorema dei carabinieri, per cui bisogna imparare a maggiorare in modo furbo.

Esercizio 8. Calcolare

$$\lim_n \sqrt[n]{n \ln n}.$$

Esercizio 9. Calcolare

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{3n+2}{n^2}}$$

Esercizio 10. Calcolare

$$\lim_n \frac{n + \sin n}{n+1}.$$

3.2 Criterio del rapporto

Si può usare il seguente teorema, a cui ci riferiremo con il nome *criterio del rapporto.*

Teorema 2. *Sia a_n una successione a termini positivi. Se*

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell,$$

allora

$$\lim_n a_n = \begin{cases} +\infty & \textit{se } \ell > 1 \\ 0 & \textit{se } \ell < 1; \end{cases}$$

non si può dire nulla se $\ell = 1$.

[Criterio del rapporto]

Esercizio 11. Calcolare

$$\lim_n \frac{n^n}{n!}.$$

Esercizio 12. Calcolare

$$\lim_n n \frac{2^n}{3^n}.$$

3.3 Teorema di Cesaro

In realtà il criterio del rapporto è un caso particolare del quarto teorema di Cesaro:

Teorema 3 (IV Teorema di Cesaro)**.** *Sia a_n a termini positivi. Se*

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell,$$

allora

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

Si calcoli, usando il teorema precedente,

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}.$$

3.4 Criterio della radice

Per concludere, enunciamo il criterio della radice (anche lui deriva dal quarto teorema di Cesaro).

Teorema 4 (Criterio della radice)**.** *Sia a_n una successione a termini positivi tale che*

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \ell.$$

Allora:

$$\lim_n a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell > 1 \\ 0 & \text{se } \ell < 1. \end{cases}$$

Non si può dire nulla nel caso $\ell = 1$.

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_n \left(\frac{n^5 - 4n + 2}{2n^5 + 7n + 1} \right)^n.$$

3.5 Esercizi

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_n \frac{n^{n-2} + (n-2)^n}{4n^n + 3n!}, \quad \lim_n \frac{n! + (2n)!}{n^n}.$$