Primo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

6 Novembre 2013

Fila A - Soluzioni

Esercizio 1 a) Falsa. Ad esempio, l'intorno di centro 2 e raggio 1/2 non contiene elementi dell'insieme.

b) Vera. Infatti è somma di funzioni pari.

c) Falsa. Il dominio è $\mathscr{D} = (-1, 1/2]$, dato dalla soluzione del sistema

$$\begin{cases} 2 - x \geq x + 1 \\ 2 - x > 0 \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

d) Vera. Infatti $B = \{-2, 0\}$ e il suo complementare è $B^c = (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, +\infty)$, che è unione di insiemi aperti e perciò è aperto.

e) Vera. Basta fare la verifica:

- $(2n-1)/n \leq 2 \iff -1 \leq 0$, che è sempre verificata;
- fissato $\epsilon > 0$, cerco $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ vale $(2n-1)/n \geq 2 - \epsilon$:

$$\frac{2n-1}{n} \geq 2 - \epsilon \iff 2n - 1 \geq 2n - \epsilon n \iff \epsilon n \geq 1 \iff n \geq 1/\epsilon.$$

Esercizio 2 a) Ad esempio $f(x) = |x|$, $g(x) = x$ e $h(x) = x^2$.

b) Se esistono numeri naturali k, h tali che $kT_1 = hT_2$ (cioè se sono commensurabili), allora, chiamando $T := kT_1 = hT_2$, si ha che $f \cdot g$ è periodica di periodo T:

$$\begin{aligned} (f+g)(x+T) &= f(x+T) + g(x+T) = f(x+kT_1) + g(x+hT_2) \\ &= f(x) + g(x) = (f+g)(x). \end{aligned}$$

c) Ad esempio $f(x) = 3 + x^2$, $g(x) = \log x$ e $h(x) = 2x - 1$.

Esercizio 3 a) Dimostriamo che la successione è monotona decrescente per $n \geq 2$ e crescente per $n = 1$: imponendo $a_{n+1} < a_n$,

$$\begin{aligned} &\frac{4n+1}{3(n+1)^2} < \frac{4n-3}{3n^2} \iff 4n^3 + n^2 < 4n^3 - 3n^2 + 8n^2 - 6n + 4n - 3 \\ &\iff 4n^2 - 2n - 3 > 0, \end{aligned}$$

che è verificata se $n > 1$; ciò significa che $a_{n+1} < a_n$ per ogni $n \geq 2$, e $a_1 < a_2$, cioè la successione prima cresce e poi decresce. Concludiamo che $\sup A = a_2 = 5/12$.

b) È la classica verifica:

- $(4n-3)/3n^2 \geq 0 \iff n \geq 3/4$; potendo n assumere solo valori interi, la precedente vale per $n \geq 1$, come voluto;

- fissato $\epsilon > 0$, vogliamo trovare $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ vale $(4n-3)/3n^2 \leq 0+\epsilon$:

$$\frac{4n-3}{3n^2} \leq \epsilon \iff 3\epsilon n^2 - 4n + 3 \iff n \geq \frac{2+\sqrt{4-9\epsilon}}{3\epsilon}.$$

  Se $\epsilon > 4/9$, tale disuguaglianza è verificata per ogni n; se $\epsilon \leq 4/9$, è verificata scegliendo $n \geq \bar{n} := \frac{2+\sqrt{4-9\epsilon}}{3\epsilon}$. In ogni caso, si ottiene la tesi.

c) $\sup A$ è un massimo perché $\sup A \in A$, ma non ammette minimo perché $\inf A \notin A$.

d) No. L'unico punto di accumulazione per A è 0, ma non vi appartiene.

Esercizio 4 a) Il dominio $\mathscr{D}$ è dato dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} e^{-x}-1>0 \\ \log(e^{-x}-1)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{-x}-1>0 \\ e^{-x}-1>1, \end{cases}$$

per cui $\mathscr{D} = (-\infty, -\log 2)$. Si tratta di un intervallo aperto (ogni punto è interno).

b) Si osserva che la funzione è monotona in tale dominio in quanto composizione di funzioni monotone, per cui iniettiva e quindi invertibile. La legge è $x = -\log(e^{1/y^2} + 1)$, il dominio è $(0, +\infty)$ (il codominio di f) e il codominio è $\mathscr{D}$.

Primo Compitino di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

6 Novembre 2013

Fila B - Soluzioni

Esercizio 1 a) Falsa. Ad esempio, l'intorno di centro 0 e raggio 1/4 non contiene elementi dell'insieme.

b) Vera. Infatti e somma di funzioni dispari.

c) Falsa. Il dominio è $\mathscr{D} = (-1, 1]$, soluzione del sistema

$$\begin{cases} 4 - 2x \geq x + 1 \\ 4 - 2x > 0 \\ x + 1 > 0. \end{cases}$$

d) Vera. Infatti $B = \{0, 2\}$ e il suo complementare è $B^c = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$, che è unione di insiemi aperti e perciò è aperto.

e) Vera. Basta fare la verifica:

- $(3n + 1)/n \geq 3 \iff 1 \geq 0$, che è sempre verificata;
- fissato $\epsilon > 0$, cerco $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ vale $(3n + 1)/n \leq 3 + \epsilon$:

$$\frac{3n+1}{n} \leq 3 + \epsilon \iff 3n + 1 \leq 3n + \epsilon n \iff \epsilon n \geq 1 \iff n \geq 1/\epsilon.$$

Esercizio 2 a) Ad esempio $f(x) = x^2,\ g(x) = x^3$ e $h(x) = 1$.

b) Se esistono numeri naturali k, h tali che $kT_1 = hT_2$ (cioè se sono commensurabili), allora, chiamando $T := kT_1 = hT_2$, si ha che $f \cdot g$ è periodica di periodo T:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(x + T) &= f(x + T) \cdot g(x + T) = f(x + kT_1) \cdot g(x + hT_2) \\ &= f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x).\end{aligned}$$

c) Ad esempio $f(x) = 3x + 1,\ g(x) = e^x$ e $h(x) = \sqrt{x}$.

Esercizio 3 Considera l'insieme

$$A = \left\{ \frac{4 - 5n}{4n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}.$$

a) Dimostriamo che la successione è monotona crescente per $n \geq 2$ e decrescente per $n = 1$: imponendo $a_{n+1} > a_n$,

$$\begin{aligned}&\frac{-1 - 5n}{4(n+1)^2} > \frac{4 - 5n}{4n^2} \iff -5n^3 - n^2 > 4n^2 - 5n^3 + 8n - 10n + 4 - 5 \\ &\iff 5n^2 - 3n - 4 > 0,\end{aligned}$$

che è verificata se $n > 1$; ciò significa che $a_{n+1} > a_n$ per ogni $n \geq 2$, e $a_1 > a_2$, cioè la successione prima decresce e poi cresce. Concludiamo che $\inf A = a_2 = -3/8$.

b) È la classica verifica:

- $(4-5n)/4n^2 \le 0 \iff n \ge 4/5$; potendo n assumere solo valori interi, la precedente vale per $n \ge 1$, come voluto;
- fissato $\epsilon > 0$, vogliamo trovare $\bar{n}$ tale che per ogni $n > \bar{n}$ vale $(4-5n)/4n^2 \ge 0-\epsilon$:

$$\frac{4-5n}{4n^2} \ge -\epsilon \iff 4\epsilon n^2 - 5n + 4 \iff n \ge \frac{5+\sqrt{25-64\epsilon}}{8\epsilon}.$$

  Se $\epsilon > 25/64$, tale disuguaglianza è verificata per ogni n; se $\epsilon \le 25/64$, è verificata scegliendo $n \ge \bar{n} := \frac{5+\sqrt{25-64\epsilon}}{8\epsilon}$. In ogni caso, si ottiene la tesi.

c) $\inf A$ è un minimo perché $\inf A \in A$, ma non ammette massimo perché $\sup A \notin A$.

d) No. L'unico punto di accumulazione per A è 0, ma non vi appartiene.

Esercizio 4 Si consideri la funzione di legge

$$f(x) = \frac{1}{\log\sqrt{e^x - 1}}.$$

a) Il dominio $\mathscr{D}$ è dato dalla soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \log\sqrt{e^x-1} \ne 0 \\ \sqrt{e^x-1} > 0 \\ e^x - 1 \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{e^x-1} \ne 1 \\ x \ne 0 \\ x \ge 0, \end{cases}$$

per cui $\mathscr{D} = (0, \log 2) \cup (\log 2, +\infty)$, che è ovviamente unione di intervalli aperti.

b) Scegliamo $\mathscr{D}_1 = (\log 2, +\infty)$; la funzione è ivi monotona in quanto è composizione di funzioni monotone in tale intervallo, quindi iniettiva e conseguentemente invertibile. La legge è $x = \log(e^{2/y}+1)$, il dominio è $(0, +\infty)$ (il codominio di f) e il codominio è $\mathscr{D}_1$.