STUDIO DI UN INSIEME

Di FRANCESCO RIZZO

A seguito di una lezione tenuta da DANIELE SERRA.

ESERCIZIO:

Studiare l'insieme:

$$A = \left\{ \left| (-1)^n \cdot \frac{n}{n+3} - \frac{1}{5} \right| \middle| n \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Iniziamo notando che l'insieme è composto da tre parti: $'(-1)^n', '\frac{n}{n+3}'$ e $' - \frac{1}{5}'$.

Osservazione: $(-1)^n$ non è altro che l'insieme composto dagli elementi $\{-1,1\}$.

Per facilitare lo studio di A, possiamo dividerlo in altri due insiemi B e C.

$$\boldsymbol{A = B \cup C}$$

In modo tale che se n è pari, il valore di $(-1)^n$ sarà 1, se n è dispari, il valore di $(-1)^n$ sarà -1.

$$B = \left\{ \left| \frac{n}{n+3} - \frac{1}{5} \right| \middle| n \text{ pari}, n \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$C = \left\{ \left| -\frac{n}{n+3} - \frac{1}{5} \right| \middle| n \text{ dispari}, n \geq 0, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Studiamo adesso questi due insieme separatamente.

Studio di B.

! Se $\frac{n}{n+3} - \frac{1}{5} \geq 0$ ha come soluzioni tutti gli n pari, posso togliere il modulo.

Verifichiamo: $\frac{5n-n-3}{5(n+3)} \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{4n-3}{5(n+3)} \geq 0$

! Visto che il denominatore è positivo $\forall n \epsilon \mathbb{R}$, posso eliminarlo:

$$4n - 3 \geq 0$$

$$n \geq \frac{3}{4}$$

? Ho verificato che per ogni valore di n pari ottengo soluzioni positive, in modo da togliere il modulo?

R: **No!** Per n=0 ho un numero negativo.

Dividiamo dunque il nostro insieme B in due ulteriori insiemi: B_1 e B_2.

$$B = B_1 \cup B_2$$

In modo da avere:

$$B_1 = \left\{ \left| \frac{n}{n+3} - \frac{1}{5} \right| \middle| n = 0 \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \left| \frac{n}{n+3} - \frac{1}{5} \right| \middle| n > 0, n \text{ è pari} \right\}$$

Studio di B_1.

Sostituiamo 0 a n:

$B_1 = \left\{ \left| 0 - \frac{1}{5} \right| \right\} \quad \rightarrow \quad B_1 = \left\{ \left| -\frac{1}{5} \right| \right\} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{B_1} = \left\{ \boldsymbol{\frac{1}{5}} \right\}$

B_1 ha un unico elemento.

Studio di B_2.

Abbiamo stabilito che per tutti i numeri pari l'espressione ha soluzioni positive, possiamo dunque togliere il modulo:

$$B_2 = \left\{ \frac{n}{n+3} - \frac{1}{5} \middle| n \in \mathbb{N}, n \text{ pari} \right\}$$

Vogliamo, prima di tutto, trovare il punto minimo di B_2.

Vediamo se i suoi elementi sono crescenti, in questo modo potremmo concludere che il punto di minimo è il primo elemento dell'insieme.

In termini matematici vogliamo vedere se:

$$a_{n+1} \geq a_n$$

Quindi se:

$\frac{n+1}{n+1+3} - \frac{1}{5} \geq \frac{n}{n+3} - \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{(n+1)(n+3)-n(n+4)}{(n+4)(n+3)} \geq 0$

Tolgo il denominatore poiché è sempre positivo:

$n^2 + 3n + n + 3 - n^2 - 4n \geq 0 \quad \rightarrow \quad 3 \geq 0$.

La disequazione $3 \geq 0$ è sempre verificata!

Dunque l'ipotesi iniziale che **gli elementi di B_2 sono disposti in maniera crescente** è vera.

Abbiamo trovato il minimo, nonché il primo punto dell'insieme: $\boldsymbol{min\ B_2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$.

Vogliamo ora trovare se l'insieme ha punti di massimo.

Possiamo fare un semplice calcolo per farci un'idea di quale può essere (se c'è) il sup: sostituiamo all'incognita n numeri molto grandi, ad esempio 10.000 e 100.000:

$B_2 = \left\{\frac{10.000}{10.003} - \frac{1}{5}\right\} \cong \frac{4}{5}$

$B_2 = \left\{\frac{100.000}{100.003} - \frac{1}{5}\right\} \cong \frac{4}{5}$

Intuiamo che il sup si aggira intorno al valore $\frac{4}{5}$. Ma questo semplice calcolo non è sufficiente ad affermarlo, dobbiamo dimostrarlo.

! Un punto è un estremo superiore se:

1. **È un maggiorante**, cioè se: $\forall n \in B_2, n \leq L$.
2. **È il più piccolo dei maggioranti**, quindi: $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} \in B_2 | a_{\bar{n}} > sup - \varepsilon$.

Verifichiamo:

1. $\frac{n}{n+3} - \frac{1}{5} \leq \frac{4}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{5n-n-3-4n-4}{5(n+3)} \leq 0 \quad \rightarrow \quad -7 \leq 0.$ Sempre verificata: è un maggiorante.

2.

$$\frac{n}{n+3} - \frac{1}{5} \geq \frac{4}{5} - \varepsilon$$

a) Se non esiste una soluzione, non è affatto il più piccolo dei maggioranti.
b) Se esiste, lo è.

$$\frac{n}{n+3}-\frac{1}{5}+\varepsilon \geq \frac{4}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{n-n-3+\varepsilon(n+3)}{n+3} \xrightarrow{\textit{Tolgo il denominatore poiché è sempre maggiore di } 0.}$$

$$-3+\varepsilon n+3\varepsilon > 0 \quad \rightarrow \quad n > \frac{3-3\varepsilon}{\varepsilon}$$

$$\bar{n} = \left[\frac{3-3\varepsilon}{\varepsilon}\right]+1$$

Abbiamo trovato una soluzione.

Dunque l'estremo superiore di B_2 è $sup = \frac{4}{5}$.

Ricapitoliamo:

- **B_1 ha come unico punto $\frac{1}{5}$;**
- **B_2 ha $min = \frac{1}{5}$ e $sup = \frac{4}{5}$.**

D'accordo ma,

$$A = B_1 \cup B_2 \cup C$$

Studio di C.

$$C = \left\{\left|-\frac{n}{n+3}-\frac{1}{5}\right| | n \text{ dispari}, n \geq 0, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Iniziamo considerando che $\frac{n}{n+3}$ è sempre positivo, ovvero $\forall n \in \mathbb{N}$.

Notiamo dunque che tutto ciò che sta dentro il modulo, cioè $-\frac{n}{n+3}-\frac{1}{5}$ sarà sempre negativo.

Possiamo allora togliere il modulo e cambiare di segno, arrivando a:

$$C = \left\{+\frac{n}{n+3}+\frac{1}{5} | n \text{ dispari}, n \geq 0, n \in \mathbb{N}\right\}$$

Come abbiamo fatto per B, vogliamo trovare il punto minimo di C.

Vediamo se i suoi elementi sono crescenti, in modo tale da stabilire che il punto di minimo è il primo elemento dell'insieme.

In termini matematici vogliamo constatare se:

$$a_{n+1} \geq a_n$$

Quindi se:

$\frac{n+1}{n+1+3}+\frac{1}{5}\geq\frac{n}{n+3}+\frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{(n+1)(n+3)-n(n+4)}{(n+4)(n+3)}\geq 0$

Tolgo il denominatore poiché è sempre positivo:

$n^2+3n+n+3-n^2-4n\geq 0 \quad \rightarrow \quad 3\geq 0$.

La disequazione $3\geq 0$ è sempre verificata!

Dunque l'ipotesi iniziale che anche **gli elementi di C sono disposti in maniera crescente** è vera.

Abbiamo trovato il minimo di C, che è il suo primo punto: $\boldsymbol{min\ B_2=\frac{9}{20}}$.

Troviamo adesso, se ci sono, i punti di massimo di C.

Effettuiamo il semplice calcolo che abbiamo sfruttato anche nello studio di B per farci un'idea di quale può essere (se c'è) il sup: sostituiamo all'incognita n numeri molto grandi, ad esempio 10.000 e 100.000:

$C=\left\{\frac{10.000}{10.003}+\frac{1}{5}\right\}\cong\frac{6}{5}$

$C=\left\{\frac{100.000}{100.003}+\frac{1}{5}\right\}\cong\frac{6}{5}$

Supponiamo che il sup di C si aggira intorno al valore $\frac{6}{5}$. Ma supporlo non basta, deve essere dimostrato:

! Ripetiamo che un punto è un estremo superiore se:

1. **È un maggiorante**, cioè se: $\forall n\in B_2, n\leq L$.
2. **È il più piccolo dei maggioranti**, quindi: $\forall\varepsilon>0, \exists\bar{n}\in B_2|a_{\bar{n}}>sup-\varepsilon$.

Verifichiamo:

1. $\frac{n}{n+3}+\frac{1}{5}\leq\frac{6}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{5n+n+3-6n-6}{5(n+3)}\leq 0 \quad \rightarrow \quad -3\leq 0.$ È sempre verificata: è un maggiorante.

2.

$$\frac{n}{n+3}+\frac{1}{5}\geq\frac{6}{5}-\varepsilon$$

a) Se non esiste una soluzione, non è affatto il più piccolo dei maggioranti.
b) Se esiste, lo è.

$$\frac{n}{n+3}+\frac{1}{5}+\varepsilon\geq\frac{6}{5} \quad \rightarrow \quad \frac{n-n-3+\varepsilon(n+3)}{n+3} \xrightarrow{\text{Tolgo il denominatore poiché è sempre maggiore di } 0.}$$

$-3 + \varepsilon n + 3\varepsilon > 0 \quad \rightarrow \quad n > \frac{3-3\varepsilon}{\varepsilon}$

$$\bar{n} = \left[\frac{3 - 3\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$$

Abbiamo trovato una soluzione.

Dunque l'estremo superiore di C è $sup = \frac{6}{5}$.

Conclusione:

$$A = B_1 \cup \ B_2 \cup C$$

Con:

$\boldsymbol{B_1} = \left\{\frac{1}{5}\right\}$

$\inf \boldsymbol{B_2} = \frac{1}{5}$, $\sup \boldsymbol{B_2} = \frac{4}{5}$.

$\inf \boldsymbol{C} = \frac{9}{20}$, $\sup \boldsymbol{C} = \frac{6}{5}$.

$\inf A = \frac{1}{5}$, $\sup A = \frac{6}{5}$.