• Limiti notevoli

1) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \to e$	per $x \to \pm\infty$;
2) $\left(1+\frac{\vartheta}{x}\right)^{\alpha x} \to e^{\alpha\vartheta}$	per $x \to +\infty$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$, $\forall\alpha \in \mathbb{R}$;
3) $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to e$	per $x \to 0$;
4) $\frac{\log(1+x)}{x} \to 1 \qquad \frac{\log_a(1+x)}{x} \to \frac{1}{\log a}$	per $x \to 0$, $\forall a > 0$, $a \neq 1$;
5) $\frac{a^x - 1}{x} \to \log a$	per $x \to 0$, $\forall a > 0$;
6) $\frac{(1+x)^\vartheta - 1}{x} \to \vartheta$	per $x \to 0$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$;
7) $\frac{x^\vartheta}{e^x} \to 0 \qquad \frac{x^\vartheta}{a^x} \to 0$	per $x \to +\infty$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$, $\forall a > 1$;
8) $\frac{(\log x)^\vartheta}{x} \to 0$	per $x \to +\infty$, $\forall\vartheta \in \mathbb{R}$;
9) $x^{1/x} \to 1$	per $x \to +\infty$;
10) $\frac{\sin x}{x} \to 1$	per $x \to 0$;
11) $\frac{1-\cos x}{x^2} \to \frac{1}{2}$	per $x \to 0$;
12) $\frac{\tan x}{x} \to 1$	per $x \to 0$;
13) $\frac{\arcsin x}{x} \to 1$	per $x \to 0$;
14) $\frac{\arctan x}{x} \to 1$	per $x \to 0$;
15) $\frac{\sinh x}{x} \to 1$	per $x \to 0$;
16) $\frac{\tanh x}{x} \to 1$	per $x \to 0$;
17) $\frac{\cosh x - 1}{x^2} \to \frac{1}{2}$	per $x \to 0$;
18) $x\left\|\log\|x\|\right\|^\beta \to 0$	per $x \to 0$, $\forall\beta \in \mathbb{R}$;

Inoltre, date due funzioni f e g, definite e non nulle in un intorno di un punto $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, salvo al più il punto x_0 stesso, esse sono dette *asintotiche* fra loro (o *asintoticamente equivalenti*) per $x \to x_0$, se

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 ;$$

in tal caso si scrive $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$. Ovviamente, una funzione f può essere asintotica a g per $x \to x_0$, ma avere un comportamento completamente diverso dalla funzione g nell'intorno di un altro punto. Ad esempio, dalla precedente tabella, si ricava facilmente che $\sin x \sim x$ per $x \to 0$, ma ovviamente ciò non vale nell'intorno di qualunque altro punto $x_0 \neq 0$. Come detto in precedenza, la nozione di asintotico è in generale molto utile nel calcolo dei limiti, poiché permette di sostituire a funzioni complicate delle funzioni più semplici, che mantengono le "principali" caratteristiche di quelle eliminate. Tale nozione va però usata con cautela, ad esempio, nelle somme e nelle potenze (vedi osservazioni fatte all'inizio del Capitolo 3).

N.B. Si noti che, per definizione, nessuna funzione può essere asintotica a 0.

• Casi di indecisione

$$\infty - \infty \qquad \pm\infty \cdot 0 \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0^0 \qquad (\pm\infty)^0 \qquad 1^{\pm\infty}$$

• Ordini di infinito

Per $x \to +\infty$ si ha

$$\log x \quad \ll \quad x \quad \ll \quad a^x,\ a > 1 \quad \ll \quad x^x$$

Questo ordinamento di infiniti continua a valere anche nel caso in cui ciascun elemento della catena venga elevato ad una potenza positiva differente (ad esempio x^{150} è un infinito di ordine inferiore a $e^{x/100}$).

• Infinitesimi equivalenti del primo ordine

Dai limiti notevoli precedentemente elencati si ricava che, per $x \to 0$,

$$\log(1+x) \sim (e^x - 1) \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \sinh x \sim \tanh x \sim x$$

• Richiami sulla continuità: osserviamo che la definizione dei punti di discontinuità non è in generale uguale in tutti i testi. In questo libro ci affideremo alle seguenti definizioni.

Data $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo aperto di numeri reali contenente il punto x_0, abbiamo:

- f è continua in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) ;$$

- f ha un punto di discontinuità eliminabile in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq f(x_0) \qquad \text{con } l \in \mathbb{R} ;$$

- f ha un punto di salto o di discontinuità di prima specie in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_- \in \mathbb{R} \qquad \exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l_+ \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \quad l_- \neq l_+ ;$$

- f ha un punto di discontinuità di seconda specie in x_0 se e solo se

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty ; \quad \text{oppure}$$

in tutti gli altri casi in cui $\nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$.

Naturalmente, non si può parlare di punti di discontinuità dove la funzione f non è definita.