Primo Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

19 Gennaio 2015

Esercizio 1 Sia $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = 1 + 3i$. Calcolare $\frac{z_1}{z_2}$.

Dimostrazione. Si ha
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{1+3i} = \frac{(1+i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{4-2i}{1+3^2} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$
□

Esercizio 2 Sia f la funzione definita da
$$f(x) = e^{-x}(-x^2 + 4x - 1).$$

a) Determinare dominio, zeri e segno di f;

b) determinare l'andamento di f agli estremi del dominio di definizione;

c) determinare estremo superiore ed inferiore, eventuali punti di massimo e minimo, punti di massimo e minimo locale;

d) tracciare un grafico approssimativo della funzione.

Dimostrazione. a) La funzione è un prodotto di funzioni con dominio $\mathbb{R}$, quindi ha dominio $\mathbb{R}$. Per calcolare gli zeri risolviamo $f(x) = 0$, da cui le due equazioni
$$e^{-x} = 0, \qquad -x^2 + 4x - 1 = 0.$$
La prima, come è noto, non ha soluzioni, mentre la seconda ha due soluzioni reali:
$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-1} = 2 \pm \sqrt{3}.$$
L'insieme degli zeri di f è quindi $Z = \{2 \pm \sqrt{3}\}$. Il segno di f è dato dalle soluzioni di $f(x) > 0$, cioè
$$e^{-x}(-x^2 + 4x - 1) > 0.$$
Poiché e^{-x} è sempre positivo, il segno di f è dato dal segno di $-x^2 + 4x - 1$, quindi è positiva se
$$2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3},$$
negativa (o nulla) altrimenti.

b) Essendo il dominio $\mathbb{R}$ e la funzione è continua su $\mathbb{R}$, gli unici limiti interessanti sono a $\pm\infty$. Abbiamo che
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2 + 4x - 1}{e^x} = 0$$
perché il denominatore è un infinito di ordine maggiore rispetto al numeratore. Ne segue che la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale (destro) per f. Inoltre
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty,$$

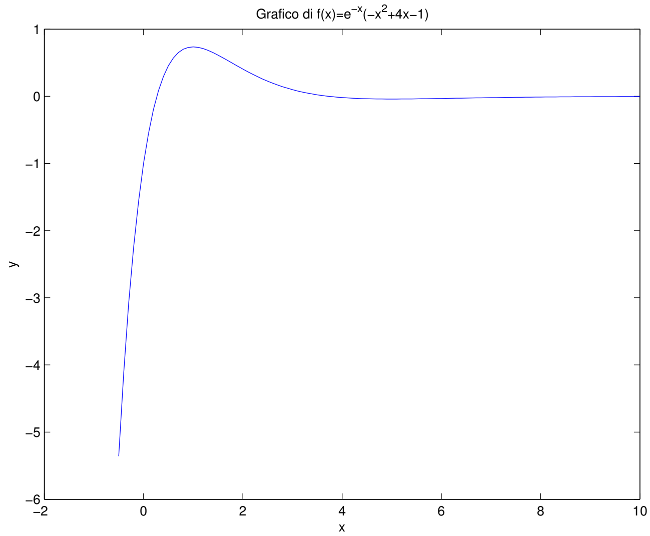

Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = e^{-x}(-x^2 + 4x - 1)$.

quindi potrebbe esserci un asintoto obliquo sinistro. In realtà, calcolando il limite di $f(x)/x$, si vede che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} \frac{-x^2 + 4x - 1}{x} = -\infty,$$

dunque non esiste un asintoto obliquo.

c) Poiché $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, allora concludiamo subito che $\inf f = -\infty$. Studiamo la monotonia di f per determinare eventuali massimi e minimi locali e ricavarne quindi sup e eventuale massimo assoluto. Abbiamo

$$f'(x) = e^{-x}(x^2 - 6x + 5),$$

da cui i due punti stazionari

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2;$$

è pressoché immediato vedere che la funzione è monotona crescente in $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$, mentre è monotona decrescente in $(1, 5)$. Ne concludiamo che $x = 1$ è punto di massimo locale, con massimo $f(1) = \frac{2}{e}$ e $x = 5$ è un punto di minimo locale con minimo $f(5) = -6e^{-5}$. È ovvio dalla monotonia di f che $x = 1$ è anche un punto di massimo assoluto, per cui $\max f = 2e^{-1}$.

d) Un grafico approssimativo della funzione è in figura 1.

$\square$

Esercizio 3 Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)}.$$

Dimostrazione. Dobbiamo risolvere l'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}dx.$$

Effettuiamo la sostituzione $t=\sqrt{x}$, da cui $dx = 2tdt$, e l'integrale diventa

$$\int \frac{2t}{t(t-1)(t-2)}dt = \int \frac{2}{(t-1)(t-2)}dt.$$

Si tratta di una funzione razionale fratta, dunque possiamo cercare $A, B \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{2}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}.$$

Facendo i calcoli, si arriva a

$$\frac{2}{(t-1)(t-2)} = \frac{(A+B)t-2A-B}{(t-1)(t-2)},$$

quindi A, B risolvono il sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=2 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-2 \\ B=2 \end{cases}.$$

Ne segue che l'integrale da calcolare si riduce a

$$\int \left(\frac{-2}{t-1} + \frac{2}{t-2} \right) dt = -2\ln|t-1| + 2\ln|t-2|,$$

quindi, risostituendo $t=\sqrt{x}$, una primitiva della funzione è

$$F(x) = 2\ln\left|\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}\right|.$$

□

Esercizio 4 Si consideri il sottoinsieme dei numeri reali

$$A = \left\{ \frac{n-n^2}{1+n^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \right\}.$$

a) Dimostrare che la successione $a_n = \frac{n-n^2}{1+n^2}$ è decrescente;

b) determinare estremo superiore ed inferiore di A;

c) dire se A ha massimo e minimo.

Dimostrazione. a) Per provare che la successione è decrescente basta dimostrare che $a_n > a_{n+1}$ per ogni $n \geq 1$ naturale. Abbiamo che

$$a_n > a_{n+1} \iff \frac{n-n^2}{1+n^2} > \frac{n+1-(n+1)^2}{1+(n+1)^2} \iff$$
$$(n-n^2)(1+n^2+2n+1) > (n+1-n^2-2n-1)(1+n^2) \iff n^2+n>0,$$

che è vera per ogni $n \geq 1$.

b)-c) Poiché a_n è decrescente, si conclude subito che A ha massimo e $\max A = a_1 = 0$. L'estremo inferiore, invece, è dato da

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -1.$$

Si vede subito che -1 non è il minimo: risolvendo $a_n = -1$ si trova $n = -1$, che evidentemente non è considerabile visto che non è ≥ 1. □

Esercizio 5 Sia $f_a = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + a$ e sia $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}$.

a) Determinare il numero degli zeri di $g(x)$;

b) determinare il numero degli zeri di $f_a(x)$ al variare del parametro a.

Dimostrazione. a) Studiamo la derivata della funzione g:

$$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2).$$

I punti stazionari di g sono $x = 0, 1, 2$ e si vede che la funzione è monotona crescente in $(0, 1) \cup (2, +\infty)$, mentre è monotona decrescente in $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$. Ne segue che:

- $x = 0$ è punto di minimo locale e $g(0) = -\frac{1}{2}$;
- $x = 1$ è punto di massimo locale e $g(1) = \frac{1}{2}$;
- $x = 2$ è punto di minimo locale e $g(2) = -\frac{1}{2}$.

Per il teorema degli zeri[1], tra 0 e 1 c'è uno zero e così anche tra 1 e 2. Inoltre, poiché $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, allora sempre per il teorema degli zeri la funzione ammette uno zero nell'intervallo $(2, +\infty)$. Analogamente, anche in $(-\infty, 0)$ c'è uno zero. Poiché la funzione è un polinomio di quarto grado, allora ammette al più 4 zeri. Avendone trovati già 4, concludiamo che non ne esistono altri e g ammette esattamente 4 zeri.

b) È evidente che $f_a' = g$, quindi f_a ha gli stessi punti di minimo e di massimo di g. Calcoliamo quanto valgono i massimi e i minimi in questo caso:

1. $x = 0$ è punto di minimo con minimo $f_a(0) = a$;
2. $x = 1$ è punto di minimo con minimo $f_a(1) = a + 1$;
3. $x = 2$ è punto di minimo con minimo $f_a(2) = a$.

Poiché i limiti all'infinito valgono $+\infty$ per ogni valore di a, allora abbiamo che:

se $a > 0$ allora f_a non ammette zeri perché il minimo assoluto è positivo;

se $a = 0$ allora f_a ha esattamente due zeri: $x = 0, 2$ e non può averne altri per motivi di monotonia;

se $-1 < a < 0$ allora f_a ha esattamente quattro zeri (per motivi analoghi al punto a));

se $a = -1$ allora f_a ha esattamente tre zeri (uno in $(-\infty, 0)$, uno in $(2, = \infty)$ e $x = 1$);

se $a < -1$ allora f_a ha esattamente due zeri (uno in $(-\infty, 0)$ e uno in $(2, = \infty)$) e non può averne altri perché il massimo locale è negativo.

□

[1] Si noti che la funzione è continua su $\mathbb{R}$.