Secondo Compito di Analisi Matematica
Corso di laurea in Informatica, corso B

16 Febbraio 2015

Soluzioni

Esercizio 1 Sia $z = 2 + 3i$, determinare $\|z\|$ e $\frac{1}{z}$.

Dimostrazione. Il modulo di un numero complesso $z = a + bi$ è dato da $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$, dunque nel nostro caso

$$\|z\| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

L'inverso di un numero complesso $z = a + bi$ è dato da

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2};$$

nel nostro caso,

$$\frac{1}{z} = \frac{2 - 3i}{13}.$$

□

Esercizio 2 Si calcoli una primitiva della funzione $f(x) = x \tan(x^2)$.

Dimostrazione. Ricordando che

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

l'integrale in questione è uguale a

$$\int x \frac{\sin(x^2)}{\cos(x^2)} dx;$$

moltiplicando e dividendo per -2 ci riconduciamo ad un integrale immediato:

$$-\frac{1}{2} \int -2x \frac{\sin(x^2)}{\cos(x^2)} dx;$$

infatti, l'integrale è del tipo

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

Concludiamo che una primitiva di f è data da

$$F(x) = -\frac{1}{2} \ln|\cos(x^2)|.$$

□

Esercizio 3 Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x^2 - 1}.$$

a) Si determini il dominio, gli zeri e il segno di f;

b) si determini l'estremo superiore ed inferiore e il comportamento agli estremi del dominio di definizione;

c) si determinino i punti di massimo e minimo locale;

d) si dica se l'immagine di f è tutto $\mathbb{R}$;

e) si disegni un grafico approssimativo della funzione.

Dimostrazione. a) Il dominio di f è $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$, perché dobbiamo escludere i valori che annullano il denominatore, cioè ± 1. Per calcolare gli zeri risolviamo

$$f(x)=0 \iff (x-2)(x-3)=0 \iff x=2 \vee x=3.$$

Il segno di f si ottiene studiando il segno del numeratore e del denominatore:

- Numeratore $>0 \iff x<2 \vee x>3$;
- Denominatore $>0 \iff x<-1 \vee x>1$.

Da un grafico per lo studio del segno si vede che $f(x)>0$ se $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)\cup(3,+\infty)$.

b) Calcoliamo i limiti a ± 1: poiché il numeratore è diverso da zero in tali punti, mentre il denominatore si annulla, concludiamo che tali limiti sono tutti infinito, con segno a seconda del segno della funzione:

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=-\infty \qquad \lim_{x\to 1+} f(x)=+\infty$$
$$\lim_{x\to -1-} f(x)=+\infty \qquad \lim_{x\to -1+} f(x)=-\infty.$$

Le rette $x=1$ e $x=-1$ sono dunque asintoti verticali. Segue che $\inf f=-\infty$ e $\sup f=+\infty$. Calcolando i limiti a $\pm\infty$, si vede che $y=1$ è asintoto orizzontale:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-2)(x-3)}{x^2-1}\sim\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2}=1.$$

c) La funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio, quindi possiamo calcolare la derivata $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{5x^2-14x+5}{(x^2-1)^2}.$$

Calcoliamo i punti stazionari:

$$f'(x)=0 \iff 5x^2-14x+5=0 \iff x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{24}}{5};$$

il segno è dato dal segno del numeratore di f', essendo il denominatore sempre positivo, perciò

$$f'(x)>0 \iff 5x^2-14x+5>0 \iff x<x_1 \vee x>x_2.$$

Segue che x_1 è punto di massimo locale, mentre x_2 è un punto di minimo locale.

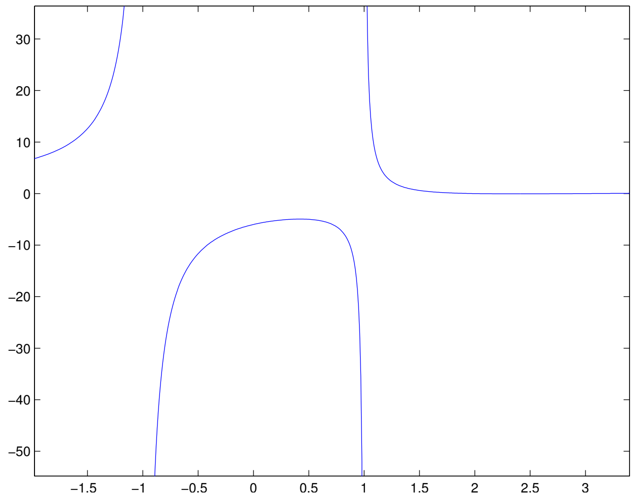

Figura 1: Grafico qualitativo della funzione $f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x^2-1}$.

d) Se l'immagine di f fosse tutto $\mathbb{R}$ sarebbe possibile risolvere $f(x) = k$ per ogni $k \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = k \iff \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1} = k \iff x^2(1 - k) - 5x + k + 6 = 0.$$

Ciò equivale a dire che per ogni valore di k il discriminante della precedente equazione di secondo grado sia maggiore o uguale a zero. Il discriminante è

$$\Delta = 25 - 4(1 - k)(k + 6) = 4k^2 + 20k + 1.$$

Andando a risolvere $\Delta \geq 0$, si vede che è soddisfatta solo per i valori di k tali che

$$k \leq \frac{-10 - \sqrt{96}}{4} \vee k \geq \frac{-10 + \sqrt{96}}{4},$$

quindi l'immagine di f non è tutto $\mathbb{R}$.

e) In figura 1 si trova un grafico qualitativo di f.

□

Esercizio 4

a) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si dica cosa vuol dire che f è derivabile in zero e che $f'(0) = 0$.

b) Si dia un esempio di una funzione continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che 0 è un punto di massimo, ma f non è derivabile in 0.

c) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$ e sia $f(-x) = f(x)$. Si dimostri che $f'(0) = 0$.

Dimostrazione. a) f è derivabile in $x = 0$ se esiste finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

La derivata vale 0 se il precedente limite ha valore 0.

b) Ad esempio basta prendere la funzione $f(x) = -|x|$.

c) Sapendo che $f(x) = f(-x)$ e derivando a destra e sinistra, si ottiene

$$f'(x) = -f'(-x),$$

per la regola di derivazione della funzione composta. Sostituendo al posto di x il valore 0, si ottiene

$$f'(0) = -f'(0) \iff 2f'(0) = 0 \iff f'(0) = 0.$$

□

Esercizio 5

a) Si verifichi che $2\sqrt{1+y} \leq y+2$ per ogni $y \geq 1$.

b) Si provi che

$$\int_0^1 \sqrt{1+e^x}dx \leq 2.$$

Dimostrazione. a) Consideriamo la funzione $f(y) = 2\sqrt{1+y} - y - 2$; essa ha dominio $[-1, +\infty)$. La tesi equivale a dimostrare che $f(y) \leq 0$ per ogni $y \in \operatorname{dom} f$. Calcolandone la derivata si vede che

$$f'(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y}} - 1$$

ed è positiva se

$$f'(y) > 0 \iff \frac{1}{\sqrt{1+y}} - 1 > 0 \iff \frac{1-\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+y}} > 0 \iff \sqrt{1+y} < 1 \iff y < 0.$$

Ne segue che $y = 0$ è punto di massimo assoluto per la funzione perché per $y > 0$ è sempre decrescente. Pertanto

$$f(y) \leq f(0) = 0 \quad \forall y \in \operatorname{dom} f,$$

come volevasi dimostrare.

b) Osservando che la funzione

$$f(x) = \sqrt{1+e^x}$$

è monotona crescente perché composizione di funzioni monotone crescenti, si ha che nell'intervallo di integrazione $[0,1]$ la funzione ammette valore massimo in 1, cioè $f(x) \leq f(1) = \sqrt{1+e}$. Sapendo che in generale

$$\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

abbiamo che

$$\int_0^1 \sqrt{1+e^x}dx \leq \sqrt{1+e}(1-0) = \sqrt{1+e}.$$

Poiché $e \leq 3$, allora

$$\int_0^1 \sqrt{1+e^x}dx \leq \sqrt{1+3} = 2.$$

□